Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 514.154+517.583

ТЭТА–ФУНКЦИИ НА КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ТОРОВ С НУЛЕВЫМ КЛАССОМ ЭЙЛЕРА

Д. В. Егоров

Аннотация. Построен аналог классической тэта-функции на абелевом многообразии для четырехмерных замкнутых симплектических многообразий, являющихся косыми произведениями двумерных вещественных торов с нулевым классом Эйлера. Введенные тэта-функции используются для канонического симплектического вложения данных многообразий в комплексное проективное пространство (аналог теоремы Лефшеца).

Ключевые слова: тэта-функция, симплектическое вложение.

§ 1. Введение

В работе [1] предложена конструкция тэта-функций на многообразии Кодаиры — Терстона. Здесь излагается иной подход к их построению на четырехмерных замкнутых симплектических многообразиях, который распространяется на косые произведения двумерных торов с нулевым классом Эйлера.

Как известно, классическая тэта-функция абелева многообразия с геометрической точки зрения является сечением голоморфного линейного расслоения над комплексным тором. Теорема Лефшеца утверждает, что сечения достаточно большой тензорной степени этого расслоения задают комплексно-аналитическое вложение абелева многообразия в некоторое комплексное проективное пространство. Теорема Лефшеца верна для абелевых торов любой размерности.

Зададимся целью обобщить данную конструкцию на расслоения, где слой и база — одномерные комплексные торы, а класс Эйлера нулевой. Мы вводим аналоги классических тэта-функций как сечения линейных комплексных расслоений над данными расслоениями. Нам придется отказаться от голоморфности вложения, так как на данных расслоениях, вообще говоря, нет не только кэлеровой структуры, но и комплексной. Тем не менее, данные многообразия симплектические. Будем строить тэта-функции так, чтобы для них выполнялся симплектический аналог теоремы Лефшеца — тэта-функции с характеристиками, которые являются сечениями тензорной степени данного линейного расслоения, задают симплектическое вложение многообразия в $\mathbb{CP}^k$ (для достаточно больших тензорных степеней).

Многообразие Кодаиры — Терстона может быть представлено в виде косого произведения двумерных торов двумя различными (расслоения не изоморфны) способами, один из которых рассматривается в этой статье. Поэтому тэта-функции на многообразии Кодаиры — Терстона, вводимые в данной работе, по

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00598–а).

своей конструкции отличаются от тэта-функций из [1] и, как оказалось, совпадают с тэта-функциями Кирвина и Урибе [2], которые использовали подход со стороны теории представлений. Подробнее мы обсудим данное совпадение в п. 4.4.

В § 2 напоминаются необходимые сведения из классической теории тэта-функций, в § 3 описаны расслоения, с которыми собираемся работать. В § 4 дано определение тэта-функции на расслоениях и изучены некоторые ее свойства, в § 5 построено вложение расслоений в комплексное проективное пространство (теорема 1) и в § 6 доказана симплектичность вложения (теорема 2).

Интересно установить, насколько далеко простирается аналогия с классическими тэта-функциями: например, связаны ли построенные тэта-функции с задачами теории чисел (см., например, [3]) или нелинейными уравнениями и формулами секущих (см. обзор [4]).

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и А. Е. Миронова за полезные обсуждения.

§ 2. Классическая тэта-функция

Напомним некоторые факты о тэта-функции на одномерном комплексном торе, полезные в дальнейшем.

Рассмотрим формальный ряд

$$\theta(z,\tau)=e^{\pi iz+\pi i\tau/4+\pi i/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{2\pi ikz+\pi ik(k+1)\tau+\pi ik}.$$

При $\operatorname{Im}\tau>0$ этот ряд сходится в любой компактной области в $\mathbb{C}$ и определяет целую функцию.

Тэта-функция ведет себя при сдвигах следующим образом:

$$\theta(z+1,\tau)=-\theta(z,\tau), \tag{1}$$

$$\theta(z+\tau,\tau)=-e^{-2\pi iz-\pi i\tau}\theta(z,\tau). \tag{2}$$

Наш выбор именно этой тэта-функции, в обозначениях Мамфорда $\theta_{11}(z,\tau)$, связан с тем, что данная функция умножается на экспоненту при всех модулярных преобразованиях:

$$\theta\left(\frac{z}{c\tau+d},\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=\zeta(c\tau+d)^{1/2}\exp\left(\frac{cz^2}{c\tau+d}\right)\theta(z,\tau),\quad ad-bc=1. \tag{3}$$

Здесь ζ — ненулевая константа, зависящая от матрицы $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

Обобщением тэта-функции является тэта-функция степени k, где k — натуральное число. Тэта-функция степени k — это целая функция на $\mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами периодичности:

$$\theta_k(z+1,\tau)=e^{\pi ik}\theta_k(z,\tau),\quad \theta_k(z+\tau,\tau)=e^{-2\pi ikz-\pi i\tau k+\pi ik}\theta_k(z,\tau).$$

Несложно убедиться, что тэта-функции степени k образуют линейное пространство размерности k. Обозначим его через $\mathscr{L}_k$.

При перемножении тэта-функций можно получить тэта-функцию более высокой степени. Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ — набор констант такой, что их сумма равна нулю. Тогда $\prod\limits_{i=1}^k\theta(z+\alpha_i,\tau)\in\mathscr{L}_k$.

Тэта-функция равна нулю в точке $z = 0$ по модулю решетки. В фундаментальной области решетки $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ находится единственный с учетом кратности нуль.

Тэта-функция удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial\theta(z,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2\theta(z,\tau)}{\partial z^2}. \tag{4}$$

§ 3. Расслоения

Многообразия, являющиеся пространствами расслоения, где слой и база — двумерные торы, классифицированы в [5]. Опишем расслоения, где класс Эйлера нулевой.

Пусть A, B — коммутирующие матрицы, принадлежащие $SL(2,\mathbb{Z})$. Обозначим через $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ точку $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, соответствующую $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Тогда расслоение, соответствующее паре $\{A, B\}$, получается при факторизации $T^2 \times \mathbb{R}^2/\sim$ по действию матриц A,B:

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}\right) \sim \left(\left[A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

и

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}\right) \sim \left(\left[B\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}\right], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

Полный список расслоений, с точностью до диффеоморфизма пространства расслоения, приведен в таблице, где I — единичная матрица.

Таблица

	$\{A, B\}$	Примечание
(A)	$\{I, I\} = T^4$	Четырехмерный тор
(B)	(1) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I\right\}$ (3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I\right\}$ (4) $\{-I, I\}$	Гиперэллиптические поверхности
(C)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $k \neq 0$	Многообразие Кодаиры — Терстона
(D)	$\left\{\begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $k \neq 0$	
(E)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -I\right\}$, $k \neq 0$	
(F)	$\{A, I\}$, $\lvert\operatorname{tr} A\rvert > 2$	
(G)	$\{A, -I\}$, $\operatorname{tr} A > 2$	

Обзор, посвященный многообразиям вида (B), можно найти, например, в работе [6].

Покажем, что все расслоения являются однородными пространствами вещественных групп Ли. Пусть G — вещественная группа Ли с координатами (x, y, s, t) и следующим линейным представлением:

$$\rho : (x, y, s, t) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A^x B^y & \begin{matrix} s \\ t \end{matrix} \\ \hline 0 \ \ 0 & 1 \end{array} \right).$$

Обозначим через Γ дискретную подгруппу элементов с целыми координатами. Тогда однородное пространство $\Gamma\backslash G$ является пространством расслоения, соответствующего $\{A, B\}$. Заметим, что ρ является точным представлением не G, а $\Gamma\backslash G$.

Очевидно, можно перейти к определению расслоений в виде фактор-многообразия $\mathbb{R}^4$ по действию группы Γ со следующими образующими (если $B = I$):

$$a : (x + 1, y, \alpha s + \beta t, \gamma s + \delta t), \tag{5}$$

$$b : (x, y + 1, s, t), \tag{6}$$

$$c : (x, y, s + 1, t), \tag{7}$$

$$d : (x, y, s, t + 1), \tag{8}$$

где $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Если $B = -I$, то

$$b : (x, y + 1, -s, -t). \tag{9}$$

Зная точное представление $\Gamma\backslash G$, мы можем вычислить образующие алгебры левоинвариантных форм. Для этого, как обычно, найдем

$$\rho^{-1} d\rho = \left(\begin{array}{c|c} C dx + D dy & A^{-x} B^{-y} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix} \\ \hline 0 \ \ 0 & 0 \end{array} \right),$$

где C, D — постоянные матрицы. Таким образом, 1-формы dx, dy, ω_1, ω_2, где

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A^{-x} B^{-y} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix},$$

являются образующими.

§ 4. Тэта-функция на расслоениях

4.1. Определение тэта-функции. Здесь и далее через M будем обозначать пространство расслоений, где слой и база — двумерные торы и класс Эйлера нулевой.

Введем формально функцию на $\mathbb{R}^4$, универсальной накрывающей M:

$$\vartheta_M(x, y, s, t) = \theta(s + \omega t, \omega)\theta(x + iy, i). \tag{10}$$

Здесь $\theta(z, \tau)$ — классическая тэта-функция с аргументом z и периодом τ (см. § 2). Укажем функции ω в зависимости от расслоения ($i = \sqrt{-1}$):

	ω
$(B1), (B3)$	$(-1 + \sqrt{-3})/2$
$(B2), (B4)$	i
$(C), (E)$	$-kx + i$
(D)	$kx + i$
$(F), (G)$	$(\lambda^{-x} v^+ + i\lambda^x v^-)/(\lambda^{-x} u^+ + i\lambda^x u^-)$

Здесь λ, λ^{-1} — собственные значения A, а $(u^+, v^+)^T$, $(u^-, v^-)^T$ — собственные векторы транспонированной матрицы A:

$$A^T \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \end{pmatrix}, \quad A^T \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \end{pmatrix},$$

где векторы нормированы так, что $u^+v^- - u^-v^+ = 1$.

Лемма 1. *Для всех расслоений* $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Доказательство. Неочевиден только случай последней функции:

$$\operatorname{Im}\omega = \frac{u^+v^- - u^-v^+}{(\lambda^{-x}u^+)^2 + (\lambda^x u^-)^2} > 0.$$

Лемма доказана.

Согласно лемме 1 ряд, определяющий тэта-функцию, сходится и функция ϑ_M корректно определена.

Лемма 2. *Под действием образующей* (5) *из* Γ*:*

$$(x, y, s, t) \mapsto (x + 1, y, \alpha s + \beta t, \gamma s + \delta t),$$

функции ω, $s + \omega t$ *преобразуются следующим образом:*

$$\omega \mapsto \frac{\alpha\omega - \beta}{-\gamma\omega + \delta}, \quad s + \omega t \mapsto \frac{s + \omega t}{-\gamma\omega + \delta}.$$

Доказательство. Лемма доказывается прямыми вычислениями.

Пусть $\left\{\theta_k^p(z, \tau)\right\}_{p=1}^k$ — базис классических тэта-функций степени k (см. § 2). Определим пространство тэта-функций степени k многообразия M как линейную оболочку попарных произведений обыкновенных базисных тэта-функций степени k на слое и базе:

$$\theta_k^p(s + \omega t, \omega)\theta_k^q(x + iy, i), \quad p, q = 1, \dots, k.$$

Будем обозначать это пространство через $\mathscr{L}_k$. Заметим, что размерность пространства $\mathscr{L}_k$ равна k^2. Тэта-функция степени один — это ϑ_M.

4.2. ϑ_M — сечение линейного комплексного расслоения. Покажем, что функция ϑ_M является сечением линейного комплексного расслоения над многообразием M. Для этого вспомним, что сечения состоят во взаимно однозначном соответствии с функциями f на универсальной накрывающей такими, что $f(\lambda u) = e_\lambda(u) f(u)$, где λ — элемент решетки Γ дискретной группы, действующей на $\mathbb{R}^4$, $e_\lambda(u)$ — мультипликаторы, т. е. ненулевые функции $e_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^*$, удовлетворяющие тождествам

$$e_\lambda(\mu u) e_\mu(u) = e_{\lambda\mu}(u), \ \lambda, \mu \in \Gamma, \quad e_0(u) = 1.$$

Мультипликаторы задают линейное комплексное расслоение над многообразием M так, что прямое произведение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$ факторизуется по действию Γ:

$$(u, w) \sim (\lambda u, e_\lambda(u) w), \quad u \in \mathbb{R}^4, \ w \in \mathbb{C}, \ \lambda \in \Gamma.$$

Рассмотрим поведение функции ϑ_M под действием образующих группы Γ (5)–(8) (при $B = I$):

$$\vartheta_M(x+1, y, \alpha s+\beta t, \gamma s+\delta t) = \zeta(-\gamma\omega+\delta)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\gamma(s+\omega t)^2}{-\gamma\omega+\delta}\right) \vartheta_M(x, y, s, t), \quad (11)$$

$$\vartheta_M(x, y+1, s, t) = -\exp(-2\pi i(x+iy)+\pi)\vartheta_M(x, y, s, t), \tag{12}$$

$$\vartheta_M(x, y, s+1, t) = -\vartheta_M(x, y, s, t), \tag{13}$$

$$\vartheta_M(x, y, s, t+1) = -\exp(-2\pi i(s+\omega t)-\pi i\omega)\vartheta_M(x, y, s, t). \tag{14}$$

При $B = -I$ формулу (12) следует заменить следующей:

$$\vartheta_M(x, y+1, -s, -t) = \exp(-2\pi i(x+iy)+\pi)\vartheta_M(x, y, s, t). \tag{15}$$

Мы воспользовались свойствами периодичности классической тэта-функции (1)–(3) и леммой 2. Из этих формул следует, что ϑ_M является сечением расслоения, заданного мультипликаторами (11)–(15).

Чтобы убедиться в корректности конструкции расслоения, заданного этими мультипликаторами, надо проверить, что нетривиальные соотношения между образующими решетки Γ (5)–(9):

$$[a, c] = c^{1-\delta}d^{\gamma}, \quad [a, d] = c^{\beta}d^{1-\alpha}, \quad [g, h] = g^{-1}h^{-1}gh,$$

влекут за собой тождества на мультипликаторы. Это очевидно, если учесть, что все мультипликаторы заданы поведением одной и той же функции.

4.3. Мультипликативное свойство ϑ_M. Введем действие $\zeta = (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ на ϑ_M:

$$(\zeta\vartheta_M)(x, y, s, t) = \theta(s+\omega t+\lambda, \omega)\theta(x+iy+\mu, i). \tag{16}$$

Пусть $\zeta_i = (\lambda_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, k$, — набор постоянных векторов из $\mathbb{C}^2$ такой, что его сумма равна нулю. Как и для классической тэта-функции, желательно, чтобы произведение

$$\prod_{i=1}^{k}(\zeta_i \cdot \vartheta_M)(x, y, s, t) \tag{17}$$

было тэта-функцией степени k. Данное свойство тэта-функции является ключевым при доказательстве теоремы о вложении в комплексное проективное пространство. Легко убедиться, что этому мешает мультипликатор (11) вида $\exp(-\gamma(s+\omega t)^2)$. Если данный мультипликатор нетривиален, т. е. $\gamma \neq 0$, потребуем, чтобы выполнялось еще соотношение

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^2 = 0. \tag{18}$$

Тогда, как нетрудно убедиться, произведение (17) является тэта-функцией степени k.

4.4. Связь с тэта-функциями Кирвина и Урибе. В [2] введены тэта-функции на многообразии Кодаиры — Терстона следующим образом. Для любой интегрируемой с квадратом функции $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ и любых $m, n = 0, 1, \dots, 2k-1$ функции $\vartheta_k^{m,n}f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ задаются формулой

$$\big(\vartheta_k^{m,n}f\big)(x, y, z, t) = e^{-2\pi i[my-n(z+xy)]-4\pi ikzx} \times \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} e^{2\pi inya-4\pi ik(by-za-y(x+a)^2/2)}f(x+a, t+b).$$

Данные функции имеют следующие условия псевдопериодичности:

$$\big(\vartheta_k^{m,n}f\big)(x+1, y, z, t) = \big(\vartheta_k^{m,n}f\big)(x, y, z, t),$$

$$\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y+1, z-x, t) = e^{-2\pi i k x^2}\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y, z, t),$$
$$\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y, z+1, t) = e^{4\pi i k x}\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y, z, t),$$
$$\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y, z, t+1) = e^{4\pi i k y}\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y, z, t).$$

Покажем, что при определенном выборе $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ функция $\vartheta_k^{m,n} f$ оказывается с определенной степенью точности тэта-функцией на многообразии Кодаиры — Терстона, определенной в данной статье.

Пусть $k = 1$, $m = 0$, $n = 0$, $f = g(t)h(x)$, $g(t) = e^{-2\pi t^2}$, $h(x) = e^{-2\pi x^2}$. Тогда

$$\big(\vartheta_k^{m,n} f\big)(x, y, z, t) = e^{-4\pi i z x - 2\pi t^2 - 2\pi x^2}\theta(2(z + (y+i)x), 2(y+i))\theta(2(-y+it), 2i), \tag{19}$$

где $\theta(z, \tau)$ — классическая тэта-функция с характеристиками $[0, 0]$.

Напомним, что определенная здесь тэта-функция на многообразии Кодаиры — Терстона (10) имеет вид

$$\theta[1/2, 1/2](s + \omega t, \omega)\theta[1/2, 1/2](x + iy, i), \quad \omega = -kx + i, \quad k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

где $\theta[a, b](z, \tau)$ — классическая тэта-функция с характеристиками $[a, b]$. Мы выбрали несколько иную тэта-функцию ввиду ее инвариантности относительно модулярных преобразований. Кирвин и Урибе, видимо, с той же целью домножили аргумент и период на два. Если сделать замену переменных

$$x' = t,\ y' = -x,\ z' = s,\ t' = y,\ k = 1,$$

то функция

$$\theta[1/2, 1/2](s + \omega t, \omega)\theta[1/2, 1/2](x + iy, i), \quad \omega = -kx + i,$$

переходит в

$$\theta[1/2, 1/2](z' + (y'+i)x', y'+i)\theta[1/2, 1/2](-y' + it', i),$$

которая с точностью до сдвига на характеристики и домножения на экспоненту совпадает с функцией (19).

§ 5. Вложение в комплексное проективное пространство

Перенумеруем базисные тэта-функции пространства $\mathscr{L}_k$: $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k^2}$. Тогда отображение $\varphi_k = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{k^2})$ будет корректно построенным отображением многообразия M в $\mathbb{CP}^{k^2-1}$.

Напомним, что элементы матрицы монодромии A мы обозначаем через $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и при $\gamma \neq 0$ требуем выполнения дополнительного условия (18).

Теорема 1. *Отображение φ_k является вложением при*
(a) $k \geq 4$, *если* $\gamma \neq 0$,
(b) $k \geq 3$, *если* $\gamma = 0$.

Доказательство. Докажем п. (a) утверждения теоремы при $k = 4$. Из доказательства будет ясно, как доказывать в остальных случаях.

Сначала установим инъективность отображения φ_k. Будем следовать доказательству классической теоремы Лефшеца о вложении для абелевых многообразий (см. ее изложение в [3, гл. 2, теорема 1.3]).

Заметим, что пространство тэта-функций степени k состоит из глобальных сечений k-й тензорной степени расслоения, заданного мультипликаторами (11)–(15).

Если верно, что для любых точек $u \neq v \in M$ существует сечение $\sigma \in \mathscr{L}_k$ такое, что $\sigma(u) = 0$ и $\sigma(v) \neq 0$, то отображение φ_k инъективно. Действительно, допустим, что отображение «склеивает» точки u и v. Так как φ_k составлено из базисных сечений $\mathscr{L}_k$, для всех сечений $\sigma \in \mathscr{L}_k$ верно, что $\sigma(v) = \zeta\sigma(u)$, где ζ — некоторая ненулевая константа. Если σ — сечение, удовлетворяющее вышеуказанному условию, то приходим к противоречию.

Также заметим, что при выполнении данного условия для любой точки $u \in M$ не все сечения обращаются в нуль в точке u.

Будем подбирать тэта-функцию степени четыре в виде произведения двух функций $\sigma = f \cdot g$:

$$\begin{aligned} f(s+\omega(x)t, x, \alpha, \beta) = \theta(s+\omega t+\alpha, \omega)\theta(s+\omega t+\beta, \omega) \\ \times \theta(s+\omega t+\gamma, \omega)\theta(s+\omega t+\delta, \omega), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} g(x+iy, \alpha', \beta', \gamma') = \theta(x+iy+\alpha', i)\theta(x+iy+\beta', i) \\ \times \theta(x+iy+\gamma', i)\theta(x+iy+\delta', i). \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{4}(-2(\alpha+\beta) + \sqrt{-4(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}), \tag{22}$$

$$\delta = \frac{1}{4}(-2(\alpha+\beta) - \sqrt{-4(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}), \tag{23}$$

$$\delta' = -\alpha' - \beta' - \gamma'. \tag{24}$$

В п. 4.3 показано, что функция $f \cdot g$ действительно является тэта-функцией степени четыре многообразия M.

Обозначим координаты точек u, v через (x, y, s, t) и (x', y', s', t') соответственно. Выберем α' так, что $\theta(x+iy+\alpha') = 0$. Теперь подберем β', γ', δ' так, что остальные сомножители в определении функции g не равны нулю в точке v:

$$\theta(x'+iy'+\beta')\theta(x'+iy'+\gamma')\theta(x'+iy'+\delta') \neq 0.$$

Мы можем этого добиться, так как нули тэта-функции изолированы. Также малым шевелением $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можно добиться, чтобы функция f не равнялась нулю в точке v.

Заметим, что теперь легко объяснить, почему в п. (a) k должно быть не меньше четырех. При $k = 3$, когда нет δ', константы β',γ' суть функции от α' вследствие условий (18), и невозможно добиться вышеуказанного отличия от нуля.

Построенное сечение решит задачу, если $\theta(x'+iy'+\alpha') \neq 0$. Допустим, что это так. Поскольку у классической тэта-функции в фундаментальной области решетки, образованной ее периодами, единственный нуль, отсюда следует, что $x = x'$, $y = y'$. Равенство понимается по модулю решетки, но без ограничения общности можно считать, что u, v находятся в фундаментальной области, т. е. единичном кубе $0 \leq x, y, s, t < 1$.

Выберем α так, что $\theta(s+\omega(x)t+\alpha, \omega(x)) = 0$. Заметим, что тогда $\theta(s' + \omega(x')t' + \alpha, \omega(x')) \neq 0$, ибо иначе $u = v$. Подберем β, γ, δ так, что $f(v) \neq 0$, а $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ так, что $g(v) \neq 0$.

Таким образом мы построили необходимое сечение и доказали инъективность отображения φ_k.

Теперь докажем, что ранг φ_k максимален. Будем следовать доказательству теоремы Лефшеца, изложенному в [4]. Для начала покажем, что ранг отображения максимален, если максимален ранг (над $\mathbb{C}$) следующей матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{k^2} \\ \partial_x\sigma_1 & \dots & \partial_x\sigma_{k^2} \\ \partial_y\sigma_1 & \dots & \partial_y\sigma_{k^2} \\ \partial_s\sigma_1 & \dots & \partial_s\sigma_{k^2} \\ \partial_t\sigma_1 & \dots & \partial_t\sigma_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что отображение φ_k, записанное в однородных координатах, является композицией отображения $\widetilde{\varphi}_k$ в $\mathbb{C}^{k^2}$ и дальнейшей проекции $\pi : \mathbb{C}^{k^2}\backslash\{0\} \to \mathbb{CP}^{k^2-1}$. Очевидно, дифференциал $\widetilde{\varphi}_k$ совпадает с подматрицей J, получающейся при вычеркивании первой строки.

Теперь допустим, что в точке $u^* \in M$ первая строка J является линейной комбинацией остальных. Это означает, что радиус-вектор $\widetilde{\varphi}_k(u^*)$ коллинеарен образу некоторого касательного вектора в точке u^*. Так как π проецирует вдоль комплексных прямых, проходящих через начало координат, то ядро дифференциала π как раз и состоит из таких векторов. Следовательно, максимальность ранга матрицы J является необходимым и достаточным условием максимальности ранга φ_k.

Преобразуем матрицу J к удобному для нас виду. Ранг следующей матрицы совпадает с рангом J:

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{k^2} \\ (\partial_x - i\partial_y)\sigma_1 & \dots & (\partial_x - i\partial_y)\sigma_{k^2} \\ (\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_1 & \dots & (\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_{k^2} \\ (\partial_x + i\partial_y)\sigma_1 & \dots & (\partial_x + i\partial_y)\sigma_{k^2} \\ (\partial_s - \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_1 & \dots & (\partial_s - \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что для голоморфной функции f комплексного аргумента $w = u+iv$

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)f, \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{w}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)f = 0.$$

Последние две строки $\widetilde{J}$ участвуют в условиях Коши — Римана. Так как сечения σ_j для любого x разлагаются в ряд по $s + \omega(x)t$, последняя строка $\widetilde{J}$ всегда нулевая.

Заметим, что если $\omega = \mathrm{const}$ (это выполняется для тэта-функций на расслоениях (B)), то сечения голоморфны и можно использовать доказательство классической теоремы Лефшеца. Будем предполагать, что $(\partial_x + i\partial_y)\theta_M \neq 0$.

Предположим, что ранг $\widetilde{J}$ (над $\mathbb{C}$) в некоторой фиксированной точке $u^* = (x^*, y^*, s^*, t^*) \in M$ меньше 4. Это означает, что существует нетривиальный набор констант a, b, c, d такой, что

$$a\sigma_j(u^*) + \frac{b}{2}\left(\partial_x - i\partial_y\right)\sigma_j(u^*) + \frac{c}{2}\left(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\right)\sigma_j(u^*) + \frac{d}{2}(\partial_x + i\partial_y)\sigma_j(u^*) = 0,$$

$j = 1, \dots, k^2$. Функция $\sigma = f(s + \omega(x)t, x, \alpha, \beta)g(x + iy, \alpha', \beta', \gamma')$, описываемая формулами (20)–(24), лежит в $\mathscr{L}_k$ $(k = 4)$ при любых α, β, α', β', γ'. Значит, она раскладывается по базису σ_j, и для нее верно следующее равенство в точке u^*:

$$a\sigma + \frac{b}{2}(\partial_x - i\partial_y)\sigma + \frac{c}{2}\left(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\right)\sigma + \frac{d}{2}(\partial_x + i\partial_y)\sigma = 0. \tag{25}$$

Введем обозначение $L = \frac{b}{2}(\partial_x - i\partial_y) + \frac{c}{2}\left(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\right) + \frac{d}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ и перепишем (25) в виде

$$\begin{aligned} L\log((\alpha,\alpha')\theta_M)(u^*) = -a - L\log((\beta,\beta')\theta_M)(u^*) \\ - L\log((\gamma,\gamma')\theta_M)(u^*) - L\log((\delta,\delta')\theta_M)(u^*). \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $((\lambda,\mu)\theta_M)$ — действие, описанное формулой (16). Для любых u, α, α' существуют β, β', γ' такие, что

$$((\beta,\beta')\theta_M)(u) \times ((\gamma,\gamma')\theta_M)(u) \times ((\delta,\delta')\theta_M)(u) \neq 0. \tag{27}$$

Из (26), (27) следует, что функция

$$\xi(\alpha,\alpha') = L\log((\alpha,\alpha')\theta_M)(u^*) \tag{28}$$

является целой функцией от $(\alpha,\alpha') \in \mathbb{C}^2$. Согласно (11)–(15) функция $\xi(\alpha,\alpha')$ удовлетворяет следующим условиям периодичности:

$$\xi(\alpha+1,\alpha') = \xi(\alpha,\alpha'), \tag{29}$$

$$\xi(\alpha+\omega(x^*),\alpha') = \xi(\alpha,\alpha') - 2\pi i c - \pi i\frac{(b+d)}{2}\omega(x^*), \tag{30}$$

$$\xi(\alpha,\alpha'+1) = \xi(\alpha,\alpha'), \tag{31}$$

$$\xi(\alpha,\alpha'+i) = \xi(\alpha,\alpha') - 2\pi i b. \tag{32}$$

Следовательно, производные $\partial_\alpha\xi$, $\partial_{\alpha'}\xi$ являются целыми двоякопериодическими функциями. Это означает, что они постоянны и $\xi = A\alpha + B\alpha' + C$. Отсюда $A = B = 0$ и функция $\xi \equiv C$ постоянна. Из (29), (31) следует, что

$$b = 2\pi i c + \pi i\frac{(b+d)}{2}\omega(x^*) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi = C = c\left[\frac{(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\theta)(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}{\theta(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}\right]_{u=u^*} \\ + \frac{d}{2}\left[\frac{(\partial_x\theta)(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}{\theta(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}\right]_{u=u^*}. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь мы неявно использовали условия Коши — Римана:

$$(\partial_x + i\partial_y)\theta(x+iy,i) = 0.$$

Обозначим через D дифференцирование по $s+\omega t$:

$$D = \frac{1}{2}\left(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\right).$$

Из (4) следует, что

$$\partial_x\theta(s+\omega t,\omega) = \frac{1}{4\pi i}(D^2\theta)(s+\omega t,\omega) + t(D\theta)(s+\omega t,\omega). \tag{34}$$

Подставляя (34) в (33) и учитывая при этом, что

$$(D\theta)(s+\omega t+\alpha,\omega)=\pi_\alpha\theta(s+\omega t+\alpha,\omega),$$

получим, что функция $\theta(s^*+\omega t^*+\alpha,\omega)$ как функция от α удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d}{2}\frac{\partial\omega(x^*)}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi i}\theta''+t^*\theta'\right)+c\theta'-C\theta=0.$$

Выписав общее решение данного уравнения, можно легко убедиться, что это приводит к противоречию с условиями периодичности тэта-функции (1), (2) и тем самым $c=d=C=0$. Из (25) следует, что $a=0$.

Мы получаем, что набор постоянных a,b,c,d тривиален и матрица $\widetilde{J}$ имеет максимальный ранг. Так как точка u^* выбрана произвольной, ранг φ_k всюду равен 4. Теорема доказана.

§ 6. Симплектичность

Для всех $\{A,B\}$ пространство расслоения M является симплектическим многообразием, где симплектическая форма может быть, к примеру, задана следующей 2-формой: $\omega_M=dx\wedge dy+ds\wedge dt$. В этом параграфе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. 1. *Если отображение φ_k является вложением, то оно индуцирует симплектическую структуру на многообразии M.*

2. *Индуцированная симплектическая форма когомологична $k\omega_M$.*

Доказательство. В определении отображения φ_k выберем в качестве базисных тэта-функций из $\mathscr{L}_k$ следующие функции:

$$\theta_k^p(s+\omega t,\omega)\theta_k^q(x+iy,i),\quad p,q=1,\dots,k.$$

Заметим, что отображение φ_k является композицией отображения Сегре $\sigma_k:\mathbb{CP}^{k-1}\times\mathbb{CP}^{k-1}\to\mathbb{CP}^{k^2-1}$, которое задается в однородных координатах формулой

$$\sigma_k([z^1:\dots:z^k],[w^1:\dots:w^k])=[z^1w^1:z^1w^2:\dots:z^kw^{k-1}:z^kw^k],$$

и отображения $\psi_k:M\to\mathbb{CP}^{k-1}\times\mathbb{CP}^{k-1}$, $\psi_k=(\psi_k',\psi_k'')$, где

$$\psi_k'(x,s,t)=\bigl[\theta_k^1(s+\omega t,\omega):\dots:\theta_k^k(s+\omega t,\omega)\bigr],$$

$$\psi_k''(x,y)=\bigl[\theta_k^1(x+iy,i):\dots:\theta_k^k(x+iy,i)\bigr].$$

Итак, $\varphi_k=\sigma_k\circ\psi_k$. Обозначим через Ω' симплектическую форму (ассоциированную с метрикой Фубини — Штуди) на первом сомножителе $\mathbb{CP}^k\times\mathbb{CP}^k$, через Ω'' — на втором. Тогда $\Omega'+\Omega''$ является симплектической формой на произведении. Так как отображение Сегре является голоморфным вложением, достаточно доказать, что индуцированная форма $\psi_k^*(\Omega'+\Omega'')$ симплектическая.

Напомним, что в § 3 мы вычислили образующие алгебры левоинвариантных форм dx, dy, ω_1, ω_2.

Отображение ψ_k'' является голоморфным вложением комплексного тора в $\mathbb{CP}^k$ согласно классической теоремы Лефшеца, а значит,

$$(\psi_k'')^*(x,y)(\Omega'')=\mu\cdot dx\wedge dy,$$

где $\mu \neq 0$ всюду на M. Пусть

$$(\psi'_k)^*(x,s,t)(\Omega') = f \cdot \omega_1 \wedge dx + g \cdot \omega_2 \wedge dx + h \cdot ds \wedge dt.$$

Здесь f, g, h — некоторые функции на M. Это общий вид 2-формы, индуцированной отображением ψ'_k, зависящим от x, s, t.

Заметим, что для любого фиксированного x отображение ψ'_k также является голоморфным вложением и тем самым

$$(\psi'_k)^*(\Omega') = \nu \cdot ds \wedge dt,$$

где $\nu \neq 0$ всюду на M. Отсюда следует, что $h \equiv \nu$. Собирая все вместе, получим

$$\begin{aligned}(\psi_k^*(\Omega' + \Omega''))^2 &= ((\psi'_k)^*(\Omega') + (\psi''_k)^*(\Omega''))^2 \\ &= (f \cdot \omega_1 \wedge dx + g \cdot \omega_2 \wedge dx + \nu \cdot ds \wedge dt + \mu \cdot dx \wedge dy)^2.\end{aligned}$$

Раскроем скобки:

$$(\psi_k^*(\Omega' + \Omega''))^2 = 2\mu\nu \cdot dx \wedge dy \wedge ds \wedge dt.$$

Последнее равенство эквивалентно условию невырожденности индуцированной формы. Замкнутость следует из того, что дифференциал коммутирует с ψ_k^*. Значит, $\psi_k^*(\Omega' + \Omega'')$ является симплектической формой. Мы доказали п. 1 утверждения теоремы.

Докажем п. 2. Обозначим через L расслоение, заданное мультипликаторами (11)–(15). При доказательстве вложения мы отмечали, что тэта-функции степени k являются сечениями $L^{\otimes k}$.

Вспомним, что любое линейное комплексное расслоение над многообразием M индуцируется универсальным расслоением над $\mathbb{CP}^n$ при отображении M в комплексное проективное пространство. Следовательно, расслоение $L^{\otimes k}$ и его форма кривизны являются образами универсального расслоения и его формы кривизны, которая есть форма Фубини — Штуди. Также вспомним, что первый класс Чжэня линейных расслоений реализуется именно формой кривизны. Значит, когомологический класс индуцированной формы совпадает с первым классом Чжэня $c_1(L^{\otimes k}) = k \cdot c_1(L)$, и нам нужно доказать, что

$$c_1(L) = [dx \wedge dy + ds \wedge dt].$$

Воспользуемся теорией когомологий Чеха для того, чтобы вычислить $c_1(L)$. Введем покрытие $\mathbb{R}^4$ множествами $U_\lambda = \lambda U_0, \quad \lambda \in \Gamma$. Для этого разнесем множество $U_0 = \{|u^k| < 3/4\}$ сдвигами из решетки Γ. Заметим, что данное покрытие хорошее — все непустые конечные пересечения диффеоморфны $\mathbb{R}^4$. Поэтому когомологии нерва этого покрытия изоморфны когомологиям всего пространства M.

Функции перехода $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathbb{C}^*$ можно выразить через мультипликаторы

$$g_{\lambda\mu}(u) = e_\lambda(u) e_{\mu^{-1}}(\mu u), \quad \lambda, \mu \in \Gamma. \tag{35}$$

Нерв $N(\mathscr{U})$ минимального подпокрытия построенного выше покрытия U_λ гомеоморфен M, и его когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ совпадают с $H^*(M; \mathbb{Z})$. Коцикл

$$z_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i}(\log(g_{\lambda\mu}) + \log(g_{\mu\nu}) - \log(g_{\nu\lambda})) \in C^2(\mathscr{U}; \mathbb{Z}) \tag{36}$$

по определению реализует первый класс Чжэня расслоения L. Данная формула задает значение z на двумерном симплексе $(\lambda, \mu, \nu) \in N(\mathscr{U})$.

Легко установить, что

1) $H^2(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, если M является многообразием Кодаиры — Терстона:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = E,$$

и образующие $H^2(M;\mathbb{R})$ могут быть выбраны в виде $[dx \wedge dy]$, $[ds \wedge dt]$, $[dy \wedge dt]$, $[(ds - \lambda x dt) \wedge dx]$;

2) во всех остальных случаях $H^2(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$ и образующими являются $[dx \wedge dy]$, $[ds \wedge dt]$.

Таким образом, для всех многообразий M торы T_{ab}, T_{cd}, образованные коммутирующими сдвигами из Γ (5)–(9), являются циклами, двойственными к $[dx \wedge dy]$, $[ds \wedge dt]$. В случае многообразия Кодаиры — Терстона получаем еще два цикла: T_{bd}, T_{ac}.

Определим функции $f_\lambda(u)$ по формуле

$$e_\lambda(u) = e^{2\pi i f_\lambda(u)}. \tag{37}$$

Согласно (35)–(37)

$$c_1([T_{\lambda\mu}]) = f_\mu(u) + f_\lambda(\mu u) - f_\lambda(u) - f_\mu(\lambda u).$$

Вычисляя первый класс Чжэня на T_{ab}, T_{cd}, получим

$$c_1([T_{ab}]) = c_1([T_{cd}]) = 1. \tag{38}$$

В случае многообразия Кодаиры — Терстона

$$c_1([T_{bd}]) = c_1([T_{ac}]) = 0. \tag{39}$$

Так как многообразие M является однородным пространством вещественной группы Ли, любой элемент из $H^2(M;\mathbb{R})$ реализуется левоинвариантными формами, двойственными к базисным 2-циклам. Из (38), (39) следует, что $c_1(L) = [dx \wedge dy + ds \wedge dt]$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Егоров Д. В.* Тэта-функции на многообразии Кодаиры — Терстона // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 320–328.
2. *Kirwin W. D., Uribe A.* Theta-functions on the Kodaira–Thurston manifold. http://arxiv.org/abs/0712.4016.
3. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
4. *Тайманов И. А.* Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, № 1. С. 149–224.
5. *Sakamoto K., Fukuhara S.* Classification of T^2-bundles over T^2 // Tokyo J. Math. 1983. V. 6, N 2. P. 311–327.
6. *Hasegawa K.* Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds. http://arxiv.org/abs/0804.4223v2.

Статья поступила 11 января 2009 г.

Егоров Дмитрий Владимирович
НИИ математики при Якутском гос. университете им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
egorov.dima@gmail.com