Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 512.5

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ, КОЦЕНТРАЛЬНЫЕ И АННУЛЯТОРНЫЕ НА ПОЛИЛИНЕЙНЫХ МНОГОЧЛЕНАХ

В. Де Филиппис

Аннотация. Пусть R — первичное кольцо характеристики, отличной от 2, с обобщенным центроидом C, $f(x_1,\dots,x_n)$ — полилинейный многочлен над C, не являющийся центральным на R, и δ — ненулевое дифференцирование кольца R. Предположим, что d и g — дифференцирования на R такие, что

$$\delta(d(f(r_1,\dots,r_n))f(r_1,\dots,r_n) - f(r_1,\dots,r_n)g(f(r_1,\dots,r_n))) = 0$$

для всех $r_1,\dots,r_n \in R$. Тогда d и g являются внутренними дифференцированиями на R и выполняется одно из следующих условий: 1) $d = g = 0$; 2) $d = -g$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R.

Ключевые слова: первичное кольцо, дифференцирование, дифференциальное тождество.

1. Введение

Некоторые авторы изучали проблемы, касающиеся взаимосвязи между структурой первичного кольца R и поведением некоторых дифференцирований, определенных на R. Многие результаты этого типа можно сформулировать в терминах подходящих условий на подмножество $P(d,g,S) = \{d(s)s - sg(s) : s \in S\}$, где S — некоторое подмножество в R, а d и g — ненулевые дифференцирования кольца R. В [1] рассмотрен случай $S = f(R)$, где $f(x_1,\dots,x_n)$ — полилинейный многочлен, который не является центральным на R. Там доказано, что если $P(d,g,f(R)) = 0$, то либо $d = -g$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R, либо $\mathrm{char}(R) = 2$ и R удовлетворяет стандартному тождеству s_4 степени 4. Позднее в [2] получено аналогичное утверждение в результате рассмотрения произвольных многочленов вместо полилинейных. Подход, который может быть использован при изучении $P(d,g,S)$, состоит в изучении величины данного множества. Подходящими же критериями оценки величины $P(d,g,S)$ являются его левый аннулятор $L_P = \{x \in R,\ xt = 0\ \forall t \in P(d,g,S)\}$ и централизатор $C_P = \{x \in R,\ [x,t] = 0\ \forall t \in P(d,g,S)\}$. Если множество $P(d,g,S)$ довольно большое, то мы можем ожидать, что $L_P = 0$ и $C_P = Z(R)$. Так, в [3] показано, что если L является нецентральным лиевым идеалом в R и $\mathrm{char}(R) \neq 2$, то левый аннулятор множества $P(d,g,L)$ в R должен быть нулевым, за исключением случая, когда R удовлетворяет s_4 и $d = -g$.

Естественно задаться вопросом о том, что происходит при существовании ненулевого дифференцирования δ на R такого, что $\delta(a) = 0$ для всех $a \in P(d,g,f(R))$, где $f(x_1,\dots,x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над C. Здесь дан ответ на этот вопрос и доказана следующая

Теорема 1. *Пусть R — первичное кольцо характеристики не 2 с обобщенным центроидом C, $f(x_1,\ldots,x_n)$ — полилинейный многочлен над C, который нецентрален на R, и δ — ненулевое дифференцирование кольца R. Предположим, что d и g — дифференцирования на R такие, что*

$$\delta(d(f(r_1,\ldots,r_n))f(r_1,\ldots,r_n)-f(r_1,\ldots,r_n)g(f(r_1,\ldots,r_n)))=0$$

для всех $r_1,\ldots,r_n\in R$. Тогда d и g являются внутренними дифференцированиями на R и выполняется одно из следующих условий:

1) $d=g=0$;

2) $d=-g$ *и* $f(x_1,\ldots,x_n)^2$ *централен на* R.

Всюду далее R означает первичное кольцо, $Z(R)$ — центр кольца R, U — кольцо частных Утуми кольца R и $C=Z(R)$ — обобщенный центроид кольца R. Если R первично, то $R\subseteq U$, U первично и C — поле (подробнее см. в [4]).

Будем всюду предполагать, что $f(x_1,\ldots,x_n)$ — полилинейный многочлен, не являющийся центральным на R, и обозначать через

$$f(R)=\{f(r_1,\ldots,r_n):r_1,\ldots,r_n\in R\}$$

множество всех значений многочлена $f(x_1,\ldots,x_n)$ в R.

Известно, что любое дифференцирование первичного кольца R единственным образом продолжается до дифференцирования его кольца частных Утуми U, и потому любое дифференцирование из R может быть определено на всем U (см. [4, с. 87]).

Будем использовать следующее обозначение:

$$f(x_1,\ldots,x_n)=x_1x_2\ldots x_n+\sum_{\sigma\in S_n,\sigma\neq id.}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$$

для некоторых $\alpha_\sigma\in C$; S_n — симметрическая группа степени n. Более того, если d — дифференцирование на R, то обозначим через $f^d(x_1,\ldots,x_n)$ многочлен, полученный из $f(x_1,\ldots,x_n)$ заменой каждого коэффициента α_σ на $d(\alpha_\sigma)$. Таким образом,

$$d(f(r_1,\ldots,r_n))=f^d(r_1,\ldots,r_n)+\sum_i f(r_1,\ldots,d(r_i),\ldots,r_n)$$

для всех $r_1,r_2,\ldots,r_n$ из R.

Заметим, что при $d=g$ предположение теоремы является следующим:

$$\delta(d(f(r_1,\ldots,r_n))f(r_1,\ldots,r_n)-f(r_1,\ldots,r_n)d(f(r_1,\ldots,r_n)))=0$$

для всех $r_1,\ldots,r_n\in R$. В этом случае в предположении, что $\mathrm{char}(R)\neq 2$, заключение следует из [5], как сообщает следующее

Утверждение 1. *Пусть K — коммутативное кольцо с единицей, R — первичная K-алгебра характеристики, отличной от 2, d и δ — ненулевые дифференцирования на R и $f(x_1,\ldots,x_n)$ — полилинейный многочлен над K. Если $\delta([d(f(r_1,\ldots,r_n)),\ f(r_1,\ldots,r_n)])=0$ для всех $r_1,\ldots,r_n\in R$, то $f(x_1,\ldots,x_n)$ централен на R.*

Далее мы часто будем использовать следующее

Утверждение 2. *Пусть G и H — дифференцирования кольца R, а $p(x_1,\dots,x_n)$ — произвольный нецентральный многочлен над C. Предположим, что $GH(x)=0$ для всех $x\in p(R)$. Если* $\mathrm{char}(R)\neq 2$, *то либо $H=0$, либо $G=0$.*

Доказательство. Пусть S — аддитивная подгруппа в R, порожденная всеми значениями многочлена $p(x_1,\dots,x_n)$ на R. Очевидно, что $GH(x)=0$ для всех $x\in S$. Более того, согласно [6] ввиду нецентральности $p(x_1,\dots,x_n)$ либо $\mathrm{char}(R)=2$ и R удовлетворяет s_4, либо существует нецентральный лиев идеал L в R такой, что $GH(u)=0$ для всех $u\in L$. Известно, что в случае $\mathrm{char}(R)\neq 2$ существует нецентральный двусторонний идеал I в R такой, что $0\neq [I,I]\subseteq L$ (см. [7, гл. 1]). Следовательно, $GH([x,y])=0$ для всех $x,y\in I$. Предположим, что H и G — ненулевые дифференцирования. Тогда в силу [8] $G=\alpha H$ для некоторого $0\neq\alpha\in C$ и $H^2(r)=0$ для всех $r\in R$. Заменяя r на xy, получим

$$0=H^2(xy)=H(H(x)y+xH(y))=H^2(x)y+2H(x)H(y)+xH^2(y)=2H(x)H(y)$$

и $H(x)H(y)=0$ для всех $x,y\in R$, поскольку $\mathrm{char}(R)\neq 2$. В итоге, заменяя x на xz, имеем

$$0=H(xz)H(y)=H(x)zH(y)+xH(z)H(y)=H(x)zH(y)$$

и первичность R влечет $H=0$; противоречие. □

2. Случай внутренних дифференцирований

В данном пункте мы изучаем случай, когда δ, d и g являются внутренними дифференцированиями, соответственно определенными как $\delta(x)=[a,x]$, $d(x)=[b,x]$ и $g(x)=[c,x]$ для подходящих $a,b,c\in U$, где U — кольцо частных Утуми кольца R. Мы всегда предполагаем, что a не лежит в центре кольца R. Пусть

$$\begin{aligned}P(x_1,\dots,x_n)&=a([b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)[c,f(x_1,\dots,x_n)])\\&\quad-([b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)[c,f(x_1,\dots,x_n)])a.\end{aligned}$$

Многочлен $P(x_1,\dots,x_n)$ является обобщенным многочленом в свободном произведении $U*_C C\{x_1,\dots,x_n\}$ C-алгебры U и свободной C-алгебры $C\{x_1,\dots,x_n\}$. По предположению $P(r_1,\dots,r_n)=0$ для всех $r_1,\dots,r_n\in R$, т. е. R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x_1,\dots,x_n)$.

Предложение 1. *Либо $P(x_1,\dots,x_n)$ — нетривиальное обобщенное полиномиальное тождество кольца R, либо справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$a\in C$;*
2) *$b,c\in C$;*
3) *$b+c\in C$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R.*

Доказательство. Пусть $T=U*_C C\{X\}$ — свободное произведение над C C-алгебры U и свободной C-алгебры $C\{X\}$, где X — счетное множество некоммутирующих переменных $x_1,x_2,\dots,x_n,\dots$. Напомним, что если B — базис U над C, то любой элемент из $T=U*_C C\{x_1,\dots,x_n\}$ может быть записан в виде $g=\sum_i \alpha_i m_i$, где $\alpha_i\in C$ и m_i являются B-мономами, т. е. $m_i=q_0y_1\cdot\ldots\cdot y_nq_n$, $q_i\in B$ и $y_i\in\{x_1,\dots,x_n\}$. В [9] (см. также [10]) показано, что обобщенный полином $g=\sum_i\alpha_i m_i$ является нулевым элементом алгебры T тогда и только тогда, когда все α_i нулевые. Как следствие если $a_1, \dots, a_m \in U$ линейно независимы над C и для любого i и некоторых $h_j(x_1, \dots, x_n) \in T$ элементы

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j h_j(x_1, \dots, x_n)$$

таковы, что

$$a_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + a_m g_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \in T,$$

то $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$ являются нулевыми элементами из T.

Аналогично если $b_1, \dots, b_m \in U$ линейно независимы над C и для некоторых $h_j(x_1, \dots, x_n) \in T$ элементы

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} h_j(x_1, \dots, x_n) x_j$$

таковы, что

$$g_1(x_1, \dots, x_n) b_1 + \dots + g_m(x_1, \dots, x_n) b_m = 0 \in T,$$

то $g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)$ являются нулевыми элементами из T.

Для краткости будем писать X вместо $(x_1, \dots, x_n)$.

Рассмотрим обобщенный полином $P(X) \in U *_C C\{X\}$. По предположению R удовлетворяет следующему обобщенному полиномиальному тождеству:

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) = {} & abf(X)^2 - af(X)(b+c)f(X) \\ & + af(X)^2 c - bf(X)^2 a + f(X)(b+c)f(X)a - f(X)^2 ca. \end{aligned}$$

Если $b + c \in C$, то R удовлетворяет $[a, [-c, f(X)^2]]$ и ввиду утверждения 2 либо $f(x_1, \dots, x_n)^2$ централен на R, либо $a \in C$, либо $c \in C$. Следовательно, мы можем предполагать в дальнейшем, что $b+c \notin C$. Более того, предположим, что R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, а один из элементов b и c не лежит в центре кольца R, и приведем данное предположение к противоречию. Без ограничения общности мы можем считать, что $b \notin C$.

Если $\{ab, a, b, 1\}$ линейно C-независимы, то $P(X) \neq 0$, т. е. $P(X)$ — нетривиальное обобщенное полиномиальное тождество кольца R, и мы приходим к противоречию. Таким образом, мы рассматриваем случай, когда существуют $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in C$ такие, что $\alpha_1 ab + \alpha_2 a + \alpha_3 b + \alpha_4 = 0$.

Разобьем доказательство на два случая.

Рассмотрим сначала случай, когда $\{a, b, 1\}$ линейно C-независимы. Тогда существуют $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in C$ такие, что $ab = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3$, поэтому

$$\begin{aligned} P(X) = {} & a(\beta_1 f(X)^2 - f(X)(b+c)f(X) + f(X)^2 c) \\ & + b(\beta_2 f(X)^2 - f(X)^2 a) + (\beta_3 f(X)^2 + f(X)(b+c)f(X)a - f(X)^2 ca). \end{aligned}$$

Поскольку $\{a, b, 1\}$ линейно C-независимы и R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, имеем

$$\beta_1 f(X)^2 - f(X)(b+c)f(X) + f(X)^2 c = 0,$$

что противоречит нецентральности $f(X)^2$ и $b + c$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\{a,b,1\}$ линейно C-зависимы. В этом случае существуют $\beta_1,\beta_2\in C$ такие, что $b=\beta_1a+\beta_2$. Более того, $\beta_1\neq 0$, поскольку предполагаем, что b нецентрален. Следовательно, R удовлетворяет

$$a^2(\beta_1 f(X)^2)+a(\beta_2 f(X)^2-f(X)(b+c)f(X)+f(X)^2c-\beta_1 f(X)^2a)\\ +(-\beta_2 f(X)^2a+f(X)(b+c)f(X)a-f(X)^2ca),$$

что является нетривиальным обобщенным полиномиальным тождеством в случае линейной C-независимости элементов $\{a^2,a,1\}$. С другой стороны, если существуют $\lambda,\mu\in C$ такие, что $a^2=\lambda a+\mu$, то мы можем переписать $P(X)$ следующим образом:

$$a(\lambda\beta_1 f(X)^2+\beta_2 f(X)^2-f(X)(b+c)f(X)+f(X)^2c-\beta_1 f(X)^2a)\\ +(\mu\beta_1 f(X)^2-\beta_2 f(X)^2a+f(X)(b+c)f(X)a-f(X)^2ca).$$

Поскольку a не лежит в центре, то

$$\lambda\beta_1 f(X)^2+\beta_2 f(X)^2-f(X)(b+c)f(X)+f(X)^2c-\beta_1 f(X)^2a=0.$$

В случае, когда $\{a,c,1\}$ линейно C-независимы, R удовлетворяет нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству; противоречие. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда существуют $\eta,\vartheta\in C$ такие, что $c=\eta a+\vartheta$.

В данном случае ситуация следующая: $[b,x]=\alpha[a,x]$ и $[c,x]=\eta[a,x]$, где α — ненулевой элемент из C, и по предположению R удовлетворяет

$$a(\alpha\lambda f(X)^2-\alpha f(X)af(X)-\eta f(X)af(X)+\eta f(X)^2a-\alpha f(X)^2a)\\ +(\alpha\mu f(X)^2+\alpha f(X)af(X)a+\eta f(X)af(X)a-\eta\lambda f(X)^2a-\eta\mu f(X)^2).$$

Как и выше, поскольку a не лежит в центре, имеем

$$(\alpha\lambda f(X)^2-\alpha f(X)af(X)-\eta f(X)af(X))+(\eta-\alpha)f(X)^2a=0$$

и $(\eta-\alpha)f(X)^2=0\in T$. Если $\eta=0$, то $\alpha=0$, так как R не удовлетворяет никакому нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству, что дает противоречие. В случае $\eta\neq 0$ имеем $\eta=\alpha$, т. е. $[b,x]=[c,x]=\alpha[a,x]$ при $\alpha\neq 0$.

Следовательно, R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству

$$P(X)=\alpha[a,[[a,f(X)],f(X)]].$$

Так как характеристика R отлична от 2, ввиду [5] (см. утверждение 1) получаем противоречие либо с тем, что $a\in C$, либо с тем, что $f(x_1,\dots,x_n)$ централен на R. $\square$

Для того чтобы проанализировать случай, когда R является матричной алгеброй, нам потребуется следующая

Лемма 1. *Пусть C — бесконечное поле и $m\geq 2$. Если $A_1,\dots,A_k$ не являются скалярными матрицами из $M_m(C)$, то существует обратимая матрица $P\in M_m(C)$ такая, что все элементы матриц $PA_1P^{-1},\dots,PA_kP^{-1}$ ненулевые.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что если $A\in M_m(C)$ не является скалярной, то сопряжением можно добиться того, что матрица PAP^{-1} будет иметь ненулевой элемент в любой наперед заданной позиции.

Предположим, что A не диагональна, т. е. (i,j)-элемент A_{ij} матрицы A ненулевой для некоторых $i\neq j$. Ясно, что если $p\neq q$, то существует подстановка

$\sigma \in S_m$ такая, что $\sigma(i) = p$ и $\sigma(j) = q$. Рассмотрим автоморфизм φ_σ на $M_m(C)$, определенный на матричных единицах e_{rs} правилом $\varphi_\sigma(e_{rs}) = e_{\sigma(r)\sigma(s)}$. Пусть $P \in M_m(C)$ — матрица подстановки, которая индуцирует на $M_m(C)$ этот автоморфизм φ_σ. Тогда (p,q)-элемент матрицы PAP^{-1} равен A_{ij}. Предположим теперь, что $p = q$. По предыдущему некоторое сопряжение A' матрицы A имеет ненулевой (p,s)-элемент. Возьмем $\lambda \in C$ и положим $A'_\lambda = (I + \lambda e_{sp})A'(I - \lambda e_{sp})$. Тогда (p,p)-элемент матрицы A'_λ равен $A'_{pp} - \lambda A'_{ps}$. Очевидно, что мы можем выбрать λ из C так, что $A'_{pp} - \lambda A'_{ps}$ ненулевой. Это доказывает наше утверждение в том случае, когда A не является диагональной. Если A — диагональная матрица, не являющаяся скалярной, то существуют $i \neq j$ такие, что $A_{ii} \neq A_{jj}$. (i,j)-Элемент сопряжения $A'' = (I + e_{ij})A(I - e_{ij})$ равен $A_{jj} - A_{ii}$, что не равно нулю. Следовательно, A'' не является диагональной, и мы можем применить предыдущие рассуждения.

Рассмотрим множество $\{x_{ij} : 1 \leq i,\ j \leq m\}$, состоящее из m^2 коммутирующих неизвестных. Пусть $M_m(C[x_{ij}])$ — алгебра $m \times m$-матриц над кольцом многочленов $C[x_{ij}]$, $N = \sum\limits_{ij} x_{ij}e_{ij}$ — общая матрица и $N_l = N \cdot A_l \cdot \operatorname{adj}(N)$, $l = 1, \dots, k$. Любая замена неизвестных x_{ij} элементами $c_{ij} \in C$ индуцирует гомоморфизм $\varphi : M_m(C[x_{ij}]) \longrightarrow M_m(C)$. Если $P = \varphi(N)$ — обратимая матрица, то $\varphi(N_l)$ отличается на ненулевой множитель от PA_lP^{-1}. Очевидно, любая матрица $P \in M_m(C)$ является образом N при действии некоторого такого гомоморфизма. Любой элемент матрицы $\operatorname{adj}(N)$ является однородным многочленом от $\{x_{ij}\}$, поэтому элементы матрицы N_l суть однородные многочлены от $\{x_{ij}\}$ без свободных членов. Ни один из этих элементов не является нулевым, ибо, как отмечено выше, в любой наперед выбранной позиции некоторое сопряжение матрицы A_l имеет ненулевой элемент. Кроме того, $\det(N)$ является ненулевым многочленом из $C[x_{ij}]$. Пусть $h(x_{ij})$ — произведение $\det(N)$ и всех элементов матриц N_l, $l = 1, \dots, k$. Ясно, что $h(x_{ij})$ — ненулевой многочлен, и поскольку C бесконечно, некоторое означивание многочлена $h(x_{ij})$ является ненулевым в C. Как и выше, пусть φ — гомоморфизм, индуцированный этим означиванием. Тогда $P = \varphi(N)$ обратима и $PA_lP^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\varphi(N_l)$ — матрица со всеми ненулевыми элементами, $l = 1, \dots, k$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $R = M_m(C)$ — кольцо $m \times m$-матриц над полем C, $m > 1$ и $\operatorname{char}(R) \neq 2$. Если C бесконечно и R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x_1, \dots, x_n)$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $a \in C$;
2) $b, c \in C$;
3) $b + c \in C$ *и* $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен на* R.

Доказательство. Обозначим через e_{ij} обычную матричную единицу с 1 на (i,j)-позиции и остальными нулями. Пусть $a = \sum\limits_{i,j} a_{ij}e_{ij}$, $b = \sum\limits_{i,j} b_{ij}e_{ij}$, $c = \sum\limits_{i,j} c_{ij}e_{ij}$ для подходящих $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in C$. Напомним, что

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) = a([b, f(x_1, \dots, x_n)]f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)[c, f(x_1, \dots, x_n)]) \\ - ([b, f(x_1, \dots, x_n)]f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)[c, f(x_1, \dots, x_n)])a \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a([b, f(r_1, \dots, r_n)]f(r_1, \dots, r_n) - f(r_1, \dots, r_n)[c, f(r_1, \dots, r_n)]) \\ - ([b, f(r_1, \dots, r_n)]f(r_1, \dots, r_n) - f(r_1, \dots, r_n)[c, f(r_1, \dots, r_n)])a = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

для всех $r_1, \dots, r_n \in M_m(C)$. Если $b + c \in C$, то R удовлетворяет соотношению $[a, [-c, f(x_1, \dots, x_n)^2]]$ и по утверждению 2 либо $f(x_1, \dots, x_n)^2$ централен на R, либо $a \in C$, либо $c \in C$. В любом случае мы приходим к требуемому заключению.

Далее покажем, что если a не является скалярной матрицей, то таковой будет $b + c$, и все доказано по предыдущему рассуждению. С этой целью приведем к противоречию предположение о том, что $b + c$ не скалярна. Пусть $w = b + c = \sum w_{ij} e_{ij}$ для подходящих $w_{ij} \in C$.

Так как $f(x_1, \dots, x_n)$ нецентрален, то по [11] (см. также [12]) существуют $u_1, \dots, u_n \in M_m(C)$ и $\gamma \in C - \{0\}$ такие, что $f(u_1, \dots, u_n) = \gamma e_{kl}$, где $k \neq l$. Более того, поскольку множество $\{f(r_1, \dots, r_n) : r_1, \dots, r_n \in M_m(C)\}$ инвариантно относительно действия всех C-автоморфизмов алгебры $M_m(C)$, для любых $i \neq j$ существуют $r_1, \dots, r_n \in M_m(C)$ такие, что $f(r_1, \dots, r_n) = e_{ij}$.

Тогда из (1) получаем $0 = -a e_{ji} w e_{ji} + e_{ji} w e_{ji} a$. В частности, (j, j)-элемент равен $w_{ij} a_{ij} = 0$, откуда

$$w_{ij} = 0 \quad \text{или} \quad a_{ij} = 0. \tag{2}$$

По лемме 1 существует C-автоморфизм φ алгебры $M_m(C)$ такой, что все элементы матриц $w' = \varphi(w)$ и $a' = \varphi(a)$ ненулевые. Очевидно, w' и a' должны удовлетворять (2), что дает противоречие. $\square$

Предложение 2. *Пусть $R = M_m(C)$ — алгебра $m \times m$-матриц над полем C характеристики, отличной от 2. Если R удовлетворяет обобщенному полиномиальному тождеству $P(x_1, \dots, x_n)$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) $a \in C$;
2) $b, c \in C$;
3) $b + c \in C$ *и* $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен на* R.

Доказательство. Если предположить, что C бесконечно, то утверждение следует из леммы 2.

Пусть K — бесконечное поле, являющееся расширением поля C, и $\overline{R} = M_m(K) \cong R \otimes_C K$. Заметим, что полилинейный многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ централен на R тогда и только тогда, когда он централен на $\overline{R}$. Рассмотрим обобщенный многочлен

$$\begin{aligned} P(x_1, \dots, x_n) = a([b, f(x_1, \dots, x_n)] f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)[c, f(x_1, \dots, x_n)]) \\ - ([b, f(x_1, \dots, x_n)] f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)[c, f(x_1, \dots, x_n)]) a, \end{aligned}$$

который является обобщенным полиномиальным тождеством на R. Более того, он однороден мультистепени $(2, \dots, 2)$ от неизвестных $x_1, \dots, x_n$. Следовательно, полная линеаризация многочлена $P(x_1, \dots, x_n)$ является полилинейным обобщенным многочленом $\Theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ от $2n$ неизвестных и

$$\Theta(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n) = 2^n P(x_1, \dots, x_n).$$

Очевидно, что полилинейный многочлен $\Theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является обобщенным полиномиальным тождеством на R и $\overline{R}$. Поскольку $\mathrm{char}(C) \neq 2$, получаем $P(r_1, \dots, r_n) = 0$ для всех $r_1, \dots, r_n \in \overline{R}$, и утверждение следует из леммы 2. $\square$

Предложение 3. *Пусть R — первичное кольцо с обобщенным центроидом C характеристики, отличной от 2, а $f(x_1,\dots,x_n)$ — полилинейный многочлен над C, который не является центральным на R. Предположим, что $a,b,c\in U$ таковы, что*

$$[a,[b,f(r_1,\dots,r_n)]f(r_1,\dots,r_n)-f(r_1,\dots,r_n)[c,f(r_1,\dots,r_n)]]=0$$

для всех $r_1,\dots,r_n\in R$. Если характеристика R отлична от 2, то справедливо одно из следующих утверждений:

1) *$a\in C$;*
2) *$b,c\in C$;*
3) *$b+c\in C$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R.*

Доказательство. По предложению 1 можно считать, что R удовлетворяет нетривиальному обобщенному полиномиальному тождеству

$$\begin{aligned}P(x_1,\dots,x_n)=a([b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)[c,f(x_1,\dots,x_n)])\\ -([b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)[c,f(x_1,\dots,x_n)])a.\end{aligned}$$

По теореме Бейдара [10, теорема 2] это обобщенное полиномиальное тождество также выполняется на U. Если C бесконечно, то $P(r_1,\dots,r_n)=0$ для всех $r_1,\dots,r_n\in U\otimes_C\overline{C}$, где $\overline{C}$ — алгебраическое замыкание поля C. Так как U и $U\otimes_C\overline{C}$ являются центрально замкнутыми [13, теоремы 2.5 и 3.5], можно заменить R на U или $U\otimes_C\overline{C}$ в зависимости от того, является C конечным или бесконечным. Таким образом, можно предполагать, что R центрально замкнуто над C, которое, в свою очередь, либо конечно, либо алгебраически замкнуто. По теореме Мартиндейла [14] R является примитивным кольцом с ненулевым цоколем H и C — ассоциированное с ним тело. Более того, eHe — центральная простая конечномерная алгебра над C для любого минимального идемпотента $e\in RC$. Можем считать, что H некоммутативно, так как в противном случае коммутативным должно быть R. Заметим, что H удовлетворяет $P(x_1,\dots,x_n)$ (см., например, доказательство теоремы 1 в [15]). В силу теоремы Джекобсона [16, с. 75] R изоморфно плотному кольцу линейных преобразований некоторого векторного пространства V над C.

Предположим сначала, что V конечномерно над C. Тогда плотность R на V влечет $R\cong M_k(C)$, где $M_k(C)$ — кольцо $k\times k$-матриц над C. Поскольку R не является коммутативным, можно считать, что $k\geq 2$. В этом случае утверждение следует из предложения 2.

Пусть теперь V бесконечномерно над C. Как и в лемме 2 из [17], множество $f(R)$ плотно на R. Так как $P(r_1,\dots,r_n)=0$ для всех $r_1,\dots,r_n\in R$, имеем

$$[a,[b,r]r-r[c,r]]=0 \tag{3}$$

для всех $r\in R$. Возьмем $\alpha\neq 0$ из C и заменим в (3) элемент r на $r+\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}0=[a,[b,r+\alpha](r+\alpha)-(r+\alpha)[c,r+\alpha]]=[a,[b,r]r+[b,r]\alpha-r[c,r]-\alpha[c,r]]\\ =[a,[b,r]\alpha-\alpha[c,r]]=\alpha[a,[b-c,r]]\quad (4)\end{aligned}$$

для всех $r\in R$. Из утверждения 2 следует, что либо $a\in C$, либо $b-c\in C$.

Считаем, что $a\notin C$. В случае, когда $b-c\in C$, по (3) получаем, что для всех $r\in R$ справедливо

$$0=[a,[b,r]r-r[b,r]]=[a,[[b,r],r]],$$

и $b\in C$ ввиду утверждения 1, т. е. $c\in C$, как и требовалось. $\square$

3. Доказательство основной теоремы

Для доказательства основного результата нам потребуются следующие факты.

Утверждение 3 [1]. *Пусть R — первичное кольцо с обобщенным центроидом C и $f(x_1,\dots,x_n)$ — многочлен над C, который не является центральным на R. Если d и g — дифференцирования кольца R такие, что*

$$d(f(x_1,\dots,x_n))f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)g(f(x_1,\dots,x_n))\in C$$

для всех $x_1,\dots,x_n\in R$, то либо $d=g=0$, либо $d=-g$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R, за исключением случаев $\mathrm{char}(R)=2$, *и R удовлетворяет s_4.*

Утверждение 4 [18, теорема 5]. *Пусть R — первичное кольцо с обобщенным центроидом C и $f(x_1,\dots,x_n)$ — многочлен над C. Если d — ненулевое дифференцирование кольца R такое, что $d(f(x_1,\dots,x_n))\in C$ для всех $x_1,\dots,x_n\in R$, то $f(x_1,\dots,x_n)$ централен на R, за исключением случаев* $\mathrm{char}(R)=2$ *и R удовлетворяет s_4.*

Доказательство теоремы 1. По предположению для всех $r_1,\dots,r_n\in R$

$$\delta(d(f(r_1,\dots,r_n))f(r_1,\dots,r_n)-f(r_1,\dots,r_n)g(f(r_1,\dots,r_n)))=0,$$

т. е. R удовлетворяет дифференциальному тождеству

$$\delta\Big(\Big(f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\Big) \\ -\delta\Big(f(x_1,\dots,x_n)\Big(f^g(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,g(x_i),\dots,x_n)\Big)\Big). \quad (5)$$

Во-первых, предположим, что g — внешнее дифференцирование кольца R.

По теореме Харченко [19] R удовлетворяет дифференциальному полиномиальному тождеству

$$\delta\Big(\Big(f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\Big) \\ -\delta\Big(f(x_1,\dots,x_n)\Big(f^g(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\Big).$$

В частности, для всех $i=1,\dots,n$ кольцо R удовлетворяет любой компоненте

$$\delta(f(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)), \quad (6)$$

т. е. $\delta(f(x_1,\dots,x_n)^2)$ — дифференциальное тождество кольца R.

Согласно утверждению 4 $[f(x_1,\dots,x_n)^2,x_{n+1}]$ — полиномиальное тождество кольца R. Поскольку R является PI-кольцом, то $RZ^{-1}=RC=U$ — центральная простая конечномерная алгебра, удовлетворяющая (6); а именно, считаем, что $U=M_m(C)$. Возьмем нецентральный элемент $r\in U$ и заменим в (6) y_i на $[r,x_i]$ для всех $i=1,\dots,n$. Тогда U удовлетворяет

$$\delta(f(x_1,\dots,x_n)f(x_1,\dots,[r,x_i],\dots,x_n)),$$

которое равно

$$\delta(f(x_1,\dots,x_n)[r,f(x_1,\dots,x_n)]).$$

Вычисления показывают, что U удовлетворяет

$$\delta(f(x_1,\dots,x_n))[y,f(x_1,\dots,x_n)]+f(x_1,\dots,x_n)[\delta(y),f(x_1,\dots,x_n)] \\ +f(x_1,\dots,x_n)[y,\delta(f(x_1,\dots,x_n))]. \quad (7)$$

Поскольку $f(x_1,\dots,x_n)$ нецентрален, согласно [11] (см. также [12]) существуют $u_1,\dots,u_n\in M_m(C)$ и $\gamma\in C-\{0\}$ такие, что $f(u_1,\dots,u_n)=\gamma e_{kl}$ при $k\neq l$. Более того, так как множество $\{f(r_1,\dots,r_n):r_1,\dots,r_n\in M_m(C)\}$ инвариантно относительно действия всех C-автоморфизмов алгебры $M_m(C)$, то для любых $i\neq j$ существуют $r_1,\dots,r_n\in M_m(C)$ такие, что $f(r_1,\dots,r_n)=e_{ij}$. Из (7) следует, что

$$\delta(e_{ij})[y,e_{ij}]+e_{ij}[\delta(y),e_{ij}]+e_{ij}[y,\delta(e_{ij})]=0. \quad (8)$$

Если δ является внешним дифференцированием, то, снова по теореме Харченко и (8) U удовлетворяет

$$\delta(e_{ij})[y,e_{ij}]+e_{ij}[t,e_{ij}]+e_{ij}[y,\delta(e_{ij})].$$

В частности, U удовлетворяет $e_{ij}[t,e_{ij}]$, что противоречиво при $t=e_{ji}$.

Пусть теперь δ — внутреннее дифференцирование, индуцированное элементом $a=\sum a_{rs}e_{rs}\in U$, т. е. $\delta(x)=[a,x]$. По (7) U удовлетворяет

$$[a,f(x_1,\dots,x_n)][y,f(x_1,\dots,x_n)]+f(x_1,\dots,x_n)[[a,y],f(x_1,\dots,x_n)] \\ +f(x_1,\dots,x_n)[y,[a,f(x_1,\dots,x_n)]], \quad (9)$$

и (8) дает

$$[a,e_{ij}][y,e_{ij}]+e_{ij}[[a,y],e_{ij}]+e_{ij}[y,[a,e_{ij}]]=0 \quad (10)$$

для всех $y\in U$. Домножая (10) слева на e_{ij}, получаем $e_{ij}ae_{ij}ye_{ij}=0$. Последнее влечет $a_{ji}=0$ для всех $i\neq j$, т. е. a является диагональной матрицей.

Рассмотрим теперь внутренний автоморфизм $\varphi(x)=(1+e_{sj})x(1-e_{sj})$ в $M_m(C)$ для некоторых $s\neq j$. Заметим, что по (9)

$$[\varphi(a),(f(x_1,\dots,x_n)][y,f(x_1,\dots,x_n)]+f(x_1,\dots,x_n)[[\varphi(a),y],f(x_1,\dots,x_n)] \\ +f(x_1,\dots,x_n)[y,[\varphi(a),f(x_1,\dots,x_n)]]$$

является тождеством на U, так как $f(x_1,\dots,x_n)$ инвариантен относительно действия всех внутренних автоморфизмов алгебры $M_m(C)$. Следовательно, в силу предыдущих рассуждений $\varphi(a)$ диагональна, т. е. матрица

$$(1+e_{sj})a(1-e_{sj})=a+e_{sj}a-ae_{sj}-e_{sj}ae_{sj}=a+(a_{jj}-a_{ss})e_{sj}$$

диагональна, что влечет $a_{jj}=a_{ss}$ для всех $s\neq j$. Это означает, что a является центральным элементом, и мы снова приходим к противоречию.

Аналогично с учетом симметрии если d является внешним дифференцированием кольца R, то приходим к противоречию.

Следовательно, можно считать, что d и g являются внутренними дифференцированиями R; положим $d(x)=[b,x]$ и $g(x)=[c,x]$ для некоторых $b,c\in U$. В этом случае по предложению 3 можно предполагать, что δ является внешним дифференцированием на R, так как в противном случае все доказано.

Опираясь на наше основное предположение, получаем, что U удовлетворяет

$$\delta([b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)[c,f(x_1,\dots,x_n)]),$$

которое равно

$$
\begin{aligned}
&\delta(b)\cdot f(x_1,\dots,x_n)^2+b\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\cdot f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad+b\cdot f(x_1,\dots,x_n)\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\
&\quad-\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\cdot b\cdot f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad-f(x_1,\dots,x_n)\cdot\delta(b)\cdot f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)\cdot b\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)\\
&\qquad+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\
&\quad-\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\cdot c\cdot f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad-f(x_1,\dots,x_n)\cdot\delta(c)\cdot f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)\cdot c\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)\\
&\qquad+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\
&\quad+\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\cdot f(x_1,\dots,x_n)\cdot c\\
&\quad+f(x_1,\dots,x_n)\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\cdot c\\
&\qquad\qquad+f(x_1,\dots,x_n)^2\cdot\delta(c).
\end{aligned}
$$

Поскольку δ является внешним, по теореме Харченко получаем, что U удовлетворяет

$$
\begin{aligned}
&\delta(b)\cdot f(x_1,\dots,x_n)^2+b\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\cdot f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad+b\cdot f(x_1,\dots,x_n)\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\
&\quad-\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n))\cdot b\cdot f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad-f(x_1,\dots,x_n)\cdot\delta(b)\cdot f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n\Big)\cdot b\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)\\
&\qquad+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\
&\quad-\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\cdot c\cdot f(x_1,\dots,x_n)\\
&\quad-f(x_1,\dots,x_n)\cdot\delta(c)\cdot f(x_1,\dots,x_n)-f(x_1,\dots,x_n)\cdot c\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)\\
&\qquad+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\
&\quad+\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\cdot f(x_1,\dots,x_n)\cdot c\\
&+f(x_1,\dots,x_n)\cdot\Big(f^\delta(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\cdot c+f(x_1,\dots,x_n)^2\cdot\delta(c).
\end{aligned}
$$

В частности, U удовлетворяет

$$2bf(x_1,\dots,x_n)^2 - 2f(x_1,\dots,x_n)bf(x_1,\dots,x_n) \\ - 2f(x_1,\dots,x_n)cf(x_1,\dots,x_n) + 2f(x_1,\dots,x_n)^2c$$

и

$$2([b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n) - f(x_1,\dots,x_n)[c,f(x_1,\dots,x_n)]).$$

Так как $\mathrm{char}(U) \neq 2$, из утверждения 3 получаем, что либо $b, c \in C$, либо $b+c \in C$ и $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R. В любом случае приходим к требуемому. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wong T. L.* Derivations cocentralizing multilinear polynomials // Taiwanese J. Math. 1997. V. 1, N 1. P. 31–37.
2. *Lee T. K., Shiue W. K.* Derivations cocentralizing polynomials // Taiwanese J. Math. 1998. V. 2, N 4. P. 457–467.
3. *Wu W., Niu F. N.* Annihilator on co-commutator with derivation on Lie ideals in prime rings // Northeast. Math. J. 2006. V. 22, N 4. P. 415–424.
4. *Beidar K. I., Martindale III W. S., Mikhalev A. V.* Rings with generalized identities. New York: Dekker, 1996. (Pure Appl. Math.).
5. *De Filippis V., Di Vincenzo O. M.* Posner's second theorem, multilinear polynomials and vanishing derivations // J. Australian Math. Soc. 2004. V. 76, N 3. P. 357–368.
6. *Chuang C. L.* The additive subgroup generated by a polynomial // Israel J. Math. 1987. V. 59, N 1. P. 98–106.
7. *Herstein I. N.* Topics in ring theory. Chicago: Univ. Chicago Press, 1969.
8. *Chang C. M.* Compositions of derivations in prime rings // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. 2001. V. 29, N 3. P. 211–223.
9. *Chuang C. L.* GPI's having coefficients in Utumi quotient rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103, N 3. P. 723–728.
10. *Beidar K. I.* Rings with generalized identities // Moscow Univ. Math. Bull. 1978. V. 33, N 4. P. 53–58.
11. *Lee T. K.* Derivations with invertible values on a multilinear polynomial // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 119, N 4. P. 1077–1083.
12. *Leron U.* Nil and power central polynomials in rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 202. P. 97–103.
13. *Erickson T. S., Martindale III W. S., Osborn J. M.* Prime nonassociative algebras // Pacific J. Math. 1975. V. 60, N 1. P. 49–63.
14. *Martindale III W. S.* Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12, N 4. P. 576–584.
15. *Lanski C.* An Engel condition with derivation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118, N 3. P. 731–734.
16. *Jacobson N.* Structure of rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1964.
17. *Wong T. L.* Derivations with power central values on multilinear polynomials // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 4. P. 369–378.
18. *Lee T. K.* Derivations with Engel conditions on polynomials // Algebra Colloq. 1998. V. 5, N 1. P. 13–24.
19. *Харченко В. К.* Дифференциальные тождества первичных колец // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 4. С. 220–238.

Статья поступила 12 марта 2008 г.

Vincenzo de Filippis (Де Филиппис Винченцо)
Dipartimento di Scienze per l'Ingegneria e per l'Architettura
Sezione di Matematica e Eidomatica
Universitá di Messina, Facoltá di Ingegneria
98166, Messina, Italia
defilippis@unime.it