*Сибирский математический журнал*
*Июль—август, 2009. Том 50, № 4*

*УДК 519.711*

# ФАКТОР–ГРУППЫ ПОДПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

**Ю. М. Горчаков**

**Аннотация.** Найдена точная оценка ступени нильпотентности фактор-группы подпрямого произведения групп.

**Ключевые слова:** подпрямое произведение, ступень нильпотентности, подгруппы подпрямых произведений.

Систематическое изучение подпрямых произведений групп начал Ремак в [1]. В частности, в этой работе появилось понятие мероморфного произведения групп. Напомним его. Если даны группы $A$ и $B$, их нормальные подгруппы $A_1$ и $B_1$ и изоморфное отображение $\varphi : A/A_1 \to B/B_1$ группы $A/A_1$ на $B/B_1$, то совокупность элементов $ab$ прямого произведения $A \times B$, удовлетворяющих условию $\varphi(aA_1) = bB_1$, образует подгруппу в $A \times B$. Ремак называет ее *мероморфным произведением групп* $A$ и $B$ с нормальными подгруппами $A_1$ и $B_1$. Всякое подпрямое произведение групп $A$ и $B$ является мероморфным произведением этих групп. Это описание подпрямых произведений групп Ремак, возможно, считал удовлетворительным. В дальнейшем выяснилось, что дело обстоит намного сложнее. Л. С. Понтрягин [2, пример 15] построил пример подпрямой суммы двух групп 2-ичных дробей, неразложимой в прямую сумму подгрупп. Тем самым было доказано, что даже в случае абелевых групп различные изоморфизмы $\varphi$ могут давать неизоморфные мероморфные произведения. Именно это обстоятельство является причиной необыкновенной сложности теории абелевых групп без кручения конечного ранга.

Ремак сделал попытку «описать» подгруппы и нормальные подгруппы подпрямых произведений [3, 4]. Но даже для случая трех множителей [3] «описание» получилось громоздким. К сожалению, в дальнейшем подпрямые произведения были объектом изучения лишь для случая абелевых групп.

При изучении локально нормальных групп [5, лемма 1] получилось такое утверждение: если группа $G$ и ее нормальная подгруппа $H$ являются подпрямыми произведениями одних и тех же $n$ групп, то $G/H$ — нильпотентная группа ступени $\leq n-1$. Е. И. Хухро [6] доказал, что с ростом $n$ ступень нильпотентности фактор-группы $G/H$ растет. Тем самым была выявлена вторая трудность при изучении подпрямых произведений: подгрупп в нильпотентных группах слишком много.

Таким образом, именно наличие различных изоморфизмов факторов и существование нильпотентных факторов в множителях определяют сложность изучения подпрямых произведений.

Утверждение из [6] о росте ступени нильпотентности фактор-группы $G/H$ удается заметно усилить. В настоящей заметке получена неулучшаемая оценка.

**Теорема.** *Для любого натурального числа $n$ существуют группы $G_1, \ldots, G_n$ и такие подпрямые произведения этих групп $Q$ и $H$, что $Q/H$ — нильпотентная группа ступени точно $n-1$.*

Доказательство получается из лемм 1, 6, 7, 13–15.

Возможно, верна гипотеза: если $Q/H$ из теоремы является $p$-группой, то $Q/H$ регулярна.

В заметке приняты, в основном, обычные обозначения и термины. Отметим, что знак $C_n^k$ означает количество подмножеств, содержащих $k$ элементов в множестве, состоящем из $n$ элементов. Для удобства считаем $C_n^k = 0$ если $k > n$ либо если $k < 0$.

**Лемма 1.** *Пусть $n_1 < n_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность натуральных чисел. Допустим, что для любого $n_k$ доказано следующее утверждение: существуют такие группы $G_1, G_2, \ldots, G_{n_k}$ и такие их подпрямые произведения $G$ и $H$, где $H \triangleleft G$, что $G/H$ — нильпотентная группа ступени $n_k - 1$. Тогда для любого натурального $n$ существуют группы $G_1, G_2, \ldots, G_n$ и такие подпрямые произведения $G$ и $H$ этих групп, что $H \triangleleft G$ и фактор-группа $G/H$ имеет ступень нильпотентности $n-1$.*

Доказательство. Пусть $n$ — фиксированное натуральное число. Так как последовательность $n_1 < n_2 < \ldots$ растет, существует $m = n_k \geq n$. По условию существуют такие группы $G_1, \ldots, G_m$ и их подпрямые произведения $G$ и $H$, что $H \triangleleft G$ и $G/H$ — нильпотентная группа ступени $m-1$. Если $m = n$, то лемма верна. Пусть $m > n$. Если $g = g_1 g_2 \ldots g_m$ — произвольный элемент из $G$, то отображение $\psi : g \to g_2 \ldots g_m$ задает гомоморфное отображение группы $G$ в $G_2 \times \cdots \times G_m$. Ясно, что $\psi(G)$ и $\psi(H)$ — подпрямые произведения групп $G_2, \ldots, G_m$. Очевидно также, что $\psi(H) \triangleleft \psi(G)$. В силу леммы 1 из [5] $\psi(G)/\psi(H)$ — нильпотентная группа ступени $\leq m-2$. По теореме о гомоморфизмах коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \psi(G) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G/(G_1 \cap G) & \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} H(G_1 \cap G) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \psi(H) \arrow[dl, "\varphi"] \\ & H(G_1 \cap G)/(G_1 \cap G) & \end{tikzcd}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \psi(G)/\psi(H) &\simeq G/(G_1 \cap G)/H(G_1 \cap G)/(G_1 \cap G) \\ &\simeq G/H(G_1 \cap G) \simeq G/H/H(G_1 \cap G)/H. \end{aligned}$$

Покажем, что $H(G_1 \cap H)/H$ лежит в центре $G/H$. Это будет означать,что ступень нильпотентности группы $\psi(G)/\psi(H)$ не меньше $m-2$. Так что мы получим подпрямые произведения $\psi(G)$ и $\psi(H)$ групп $G_2, \ldots, G_m$ с фактор-группой ступени точно $m-2$. Пусть $t \in H(G_1 \cap G)$, $t = hf_1$, $h = h_1 h_2 \ldots h_m$, $h_i \in G_i$, $h \in H$, $f_1 \in G_1 \cap G$, и пусть $g \in G$, $g = g_1 g_2 \ldots g_m$, $g_i \in G_i$. Тогда $[t, g] = [hf_1, g] = [h, g]^{f_1}[f_1, g]$. Коммутатор $[h, g]^{f_1}$ принадлежит $H$. Имеем $[f_1, g] = [f_1, g_1]$. Так как $H$ — подпрямое произведение, существует элемент $h' = g_1 h'_2 \ldots h'_m$. Получаем $[f_1, g] = [f_1, g_1] = [f_1, h'] \in H$. Итак, $[t, g] \in H$. Мы доказали, что $H(G_1 \cap G)/H$ лежит в центре $G/H$.

Если $n = m-1$, то лемма доказана. Если же $n < m-1$, то предыдущее рассуждение повторяем, что докажет лемму.

**Лемма 2.** *Верно равенство $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$.*

Равенство известно и очевидно.

**Лемма 3.** *Верно равенство* $C_j^i C_{i+1}^s = C_{j-s}^{i-s+1} C_j^{s-1} + C_{j-s}^{i-s} C_{j+1}^s$.

Равенство известно и очевидно.

Пусть $p$ — нечетное простое число. Рассмотрим группу $G$, порожденную элементами $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}, a$, которые удовлетворяют соотношениям: $e_i^p = a^p = 1$, $a^{-1}e_i a = e_i e_{i-1}$ при $i > 1$, $a^{-1}e_1 a = e_1$, $e_i e_j = e_j e_i$, где индексы $i, j$ пробегают множество $1, 2, \dots, p-1$. Группа $G$ — это полупрямое произведение двух групп $G = (\langle e_1 \rangle \times \dots \times \langle e_{p-1} \rangle) \leftthreetimes \langle a \rangle$, первая из них — элементарная $p$-группа порядка $p^{p-1}$, вторая — циклическая группа порядка $p$. Так как

$$a^{-1}e_1 a = e_1^1 e_2^0 \dots e_{p-1}^0, a^{-1}e_2 a = e_1^1 e_2^1 \dots e_{p-1}^0, \dots, a^{-1}e_{p-1} a = e_1^0 e_2^0 \dots e_{p-2}^1 e_{p-1}^1,$$

отображение, вызываемое элементом $a$ в $E = \langle e_1 \rangle \times \dots \times \langle e_{p-1} \rangle$, имеет своей матрицей клетку Жордана

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как [7, с. 181]

$$A^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_s{}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_s{}^2 & C_s{}^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ C_s{}^3 & C_s{}^2 & C_s{}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

верна

**Лемма 4.** *Имеет место равенство*

$$[e_j^t, a^s] = \prod_{m=1}^{s} e_{j-m}^t{}^{C_s^m}.$$

Для простоты записи мы здесь используем обозначения $1 = e_0 = e_{-1} = \dots$.

Изготовим $p$ экземпляров группы $G$. Группу $G_i$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, изоморфную $G$, породим элементами $e_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, p-1, a_i$. Соотношения такие же, как в $G$: $e_{ij}^p = a_i^p = 1$, $e_{ij}e_{is} = e_{is}e_{ij}$, $[e_{ij}, a_i] = e_{ij-1}$. В прямом произведении $\prod_{i=1}^{p} G_i$ возьмем элементы

$$b = \prod_{k=0}^{p-1} a_{1+k}^{(-1)^k C_{p-1}^k}, \quad b_1 = \prod_{k=0}^{p-2} a_{1+k}^{(-1)^k C_{p-2}^k},$$

$$b_2 = \prod_{k=0}^{p-2} a_{2+k}^{(-1)^k C_{p-2}^k}, \quad f_{ij} = \prod_{k=0}^{j-1} e_{i+kj}^{(-1)^k C_{j-1}^k},$$

где $j = 1, \dots, p-1$, $i = 1, \dots, p-j+1$;

$$h_{ij} = \prod_{k=0}^{j} e_{i+kj}^{(-1)^k C_j^k},$$

где $j = 1, \dots, p-1$, $i = 1, \dots, p-j$. В дальнейшем будем рассматривать группы

$$Q = \langle b_1, b_2, f_{ij},\ j = 1, \dots, p-1,\ i = 1, \dots, p-j+1 \rangle,$$
$$H = \langle b, h_{ij},\ j = 1, \dots, p-1,\ i = 1, \dots, p-j \rangle.$$

**Лемма 5.** *Верны равенства* $b = b_1 b_2^{-1}$, $h_{ij} = f_{ij} f_{i+1j}^{-1}$.

Доказательство проводится прямыми вычислениями при помощи леммы 2.

**Лемма 6.** $H$ *— подгруппа группы* $Q$.

Следует из леммы 5.

**Лемма 7.** *Группы* $H$ *и* $Q$ *являются подпрямыми произведениями групп* $G_i$ $(i = 1, \ldots, p)$.

Доказательство. В силу леммы 6 утверждение достаточно доказать для $H$. Обозначим через $H_i$ проекцию $H$ на $G_i$. Так как $b \in H$, то $H_i$ содержит элементы $e_i^{(-1)^{i-1} C_{p-1}^{i-1}}$. Показатель $(-1)^{i-1} C_{p-1}^{i-1}$ взаимно прост с $p$. Следовательно, $a_i \in H_i$. Покажем теперь, что $H_i$ содержит $e_{ij}$ для любого $j$. Группа $H$ содержит элементы

$$h_{1j} = e_{1j}^{(-1)^0 C_j^0} e_{2j}^{(-1)^1 C_j^1} \ldots e_{1+jj}^{(-1)^j C_j^j},$$
$$h_{2j} = e_{2j}^{(-1)^0 C_j^0} \ldots e_{1+jj}^{(-1)^{j1} C_{j-1}^j} e_{2+jj}^{(-1)^{j-1} C_j^j}, \ldots, h_{p-jj} = e_{p-jj}^{(-1)^0 C_j^0} \ldots e_{pj}^{(-1)^j C_j^j}.$$

Из этих равенств видно, что для любого $i = 1, \ldots, p$ хотя бы один из элементов $h_{kj}$ содержит в своей записи $e_{ij}$ в ненулевой степени. Следовательно, $H_i$ содержит все порождающие элементы группы $G_i$, что означает совпадение групп $H_i$ и $G_i$. Лемма доказана.

**Лемма 8.** *Если* $j > 1$, *то* $[f_{ij}, b] = h_{i,j-1}$, $[f_{i1}, b] = 1$.

Доказательство. Так как $(-1)^k C_{p-1}^k \equiv 1 (\operatorname{mod} p)$, то $b = a_1 a_2 \ldots a_p$. Очевидно, $[f_{i1}, b] = 1$. Найдем $[f_{i1}, b]$ при $j > 1$. В силу леммы 4

$$[f_{i1}, b] = \prod_{k=0}^{j-1} \left[e_{i+kj}^{(-1)^k C_{j-1}^k}, a_{i+k}\right] = \prod_{k=0}^{j-1} \left[e_{i+kj-1}^{(-1)^k C_{j-1}^k}\right] = h_{i,j-1}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 9.** *Если* $j > 1$, *то* $[h_{ij}, b] = h_{i,j-1} h_{i+1,j-1}^{-1}$, $[h_{i1}, b] = 1$.

Доказательство. В силу леммы 5 $h_{ij} = f_{ij} f_{i+1j}^{-1}$. Используя коммутаторные формулы [8, с. 171], получаем

$$[h_{ij}, b] = \left[f_{ij} f_{i+1j}^{-1}, b\right] = [f_{ij}, b][f_{i+1j}, b]^{-1} = h_{i,j-1} h_{i+1j-1}^{-1}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 10.** *Группа* $H$ *является полупрямым произведением нормальной элементарной абелевой группы* $\prod\limits_{i,j} \langle h_{ij} \rangle$ *порядка* $p^{C^2{}_p}$ *и циклической группы* $\langle b \rangle$ *порядка* $p$.

Вытекает из леммы 9.

**Лемма 11.** *Группа* $H$ *порождается элементами* $b, h_{1j}$ $(j = 1, \ldots, p-1)$.

Вытекает из леммы 9.

**Лемма 12.** *Верна формула*

$$[h_{ij}, b_1] = \prod_{m=1}^{j} h_{m,j-m}^{(-1)^{m-1}C_j^{m-1}} h_{m+1j-m}^{(-1)^m C_{j+1}{}^m}.$$

Доказательство. Так как $(-1)^k C_{p-2}^k \equiv k+1 (\operatorname{mod} p)$, то $b_1 = \prod\limits_{k=0}^{p-2} a_{1+k}^{1+k}$. Используя лемму 4, получаем

$$[h_{1j}, b_1] = \prod_{k=0}^{j} [e_{1+k,j}^{(-1)^k C_j^k}, a_{1+k}^{1+k}] = \prod_{k=0}^{j}\prod_{m=1}^{1+k} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_j^k C_{1+k}^m} = \prod_{m=1}^{j-1}\prod_{k=m-1}^{j} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_j^k C_{1+k}^m}.$$

В силу леммы 3 имеем

$$C_j^k C_{1+k}^m = C_{j-m}^{k-m+1} C_j^{m-1} + C_{j-m}^{k-m} C_{j+1}^m.$$

Следовательно,

$$[h_{1j}, b_1] = \prod_{m=1}^{j-1}\left[\left(\prod_{k=m-1}^{j} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_{j-m}^{k-m+1} C_j^{m-1}}\right)\left(\prod_{k=m-1}^{j} e_{1+k,j-m}^{(-1)^k C_{j-m}^{k-m} C_{j+1}^m}\right)\right].$$

В первом множителе в квадратной скобке заменим $k-m+1$ на $y$, во втором множителе — $k-m$ на $z$. Получим

$$[h_{1j}, b_1] = \prod_{m=1}^{j-1}\left[\left(\prod_{y=0}^{j-m} e_{m+y,j-m}^{(-1)^y C_{j-m}^y}\right)^{(-1)^{m-1}C_j^{m-1}}\left(\prod_{z=0}^{j-m} e_{m+1+z,j-m}^{(-1)^z C_{j-m}^z}\right)^{(-1)^m C_{j+1}^m}\right]$$

$$= \prod_{m=1}^{j-1} h_{m,j-m}^{(-1)^{m-1}C_j^{m-1}} h_{m+1,j-m}^{(-1)^m C_{j+1}^m}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 13.** $H \triangleleft Q$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $H$ содержит элементы $[h_{1j}, b_1]$, $[f_{ij}, b]$. Это доказано в леммах 8, 12.

**Лемма 14.** *Элемент* $f_{11} = e_{11}$ *не принадлежит* $H$.

Доказательство. Допустим, что $e_{11} \in H$. Тогда в силу леммы 10 $e_{11} = \prod\limits_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}} b^{\beta}$. Предположим, что $\beta$ не сравнимо с нулем по модулю $p$. Ясно, что $[e_{11}, h_{12}] = 1$.

Найдем $t = \big[h_{ij}, \prod\limits_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}} b^{\beta}\big]$. Так как [8, с. 171]

$$t = [h_{12}, b^{\beta}]\Big[h_{12}, \prod_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}}\Big]\Big[h_{12}, \prod_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}}, b^{\beta}\Big] = [h_{12}, b^{\beta}],$$

по лемме 9 $t = h_{11}{}^{\beta} h_{21}{}^{-\beta} \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что $\beta \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, т. е. $e_{11} = \prod\limits_{i,j} h_{ij}^{\alpha_{ij}}$. Поскольку $[e_{11}, b] = 1$, то $\alpha_{i,j} \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$ при $j > 1$. Итак,

$$e_{11} = \prod_i h_{i1}^{\alpha_{i1}} = \big(e_{11}e_{21}^{-1}\big)^{\alpha_{11}}\big(e_{21}e_{31}^{-1}\big)^{\alpha_{21}} \dots \big(e_{p-1,1}e_{p1}^{-1}\big)^{\alpha_{p-1,1}}$$

$$= e_{11}^{\alpha_{11}} e_{21}^{-\alpha_{11}+\alpha_{21}} e_{31}^{-\alpha_{21}+\alpha_{31}} \dots e_{p-1,1}^{-\alpha_{p-2,1}+\alpha_{p-1,1}} e_{p1}^{-\alpha_{p-1,1}}.$$

Получаем $\alpha_{11} = 1$, $-\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0, \dots, -\alpha_{p-2,1} + \alpha_{p-1,1} = 0$, $\alpha_{p-1,1} = 0$. Система решений не имеет. Получили, что $e_{11}$ не принадлежит $H$. Лемма доказана.

**Лемма 15.** $[f_{1,p-1},\underbrace{b_1,\dots,b_1}_{p-2}]=f_{11}^m h$, *$h\in H$, где $m$ и $p$ взаимно просты.*

Доказательство. Вычислим $[f_{1j},b_1]$:

$$[f_{1j},b_1]=\prod_{k=0}^{j-1}[e_{1+k,j}^{(-1)^k C_{j-1}^k},a_{1+k}^{1+k}]=\left(\prod_{k=0}^{j-1}e_{1+k,j-1}^{(-1)^k C_{j-1}^k C_{1+k}^1}\right)g_{j-2},$$

где $g_{j-2}$ принадлежит подгруппе, порожденной элементами $e_{is}$ при $s\le j-2$. В силу леммы 3 имеем $C_{j-1}^k C_{1+k}^1=C_{j-2}^k C_{j-1}^0+C_{j-2}^{k-1}C_j^1$.

Продолжаем преобразование:

$$[f_{1j},b_1]=\prod_{k=0}^{j-1}e_{1+k,j-1}^{(-1)^k C_{j-2}^k C_{j-1}^0}\prod_{k=0}^{j-1}e_{1+k,j-1}^{(-1)^k C_{j-1}^{k-1}C_j^1}g_{j-2}=f_{1j-1}^{C_{j-2}^0}f_{2j-1}^{-C_j^1}g_{j-2}.$$

Применяя лемму 5, получаем

$$[f_{1j},b_1]=f_{1j-1}^{1-j}h_{1j-1}^j g_{j-2}. \tag{1}$$

Применим формулу (1) и коммутаторные формулы [4, с. 171] к $[f_{1p-1},b_1]$ несколько раз:

$$[f_{1p-1},b_1]=f_{1p-2}^{3-p}h_{2p-2}^{p-1}g_{p-3},\quad [f_{1p-2}^{3-p}h_{2p-2}^{p-1}g_{p-3},b_1]=f_{1p-3}^{(3-p)(4-p)}hg,$$

где $h\in H, g$ принадлежит подгруппе, порожденной $e_{is}$, $s\le p-4$. В итоге мы прихожим к результату леммы, так как при каждом коммутировании элемент вида $g$ принадлежит подгруппе, порожденной элементами $e_{is}$, номера $s$ которых уменьшаются. Так что $[h_{1,p-1},\underbrace{b_1,\dots,b_1}_{p-2}]=f_{11}^m h$. Лемма доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Remak R.* Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte // J. Reine Angew. Math. 1930. Bd 163, Heft 1. S. 1–44.
2. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.
3. *Remak R.* Über Untergruppen direfter Produkte von drei Faftoren // J. Reine Angew. Math. 1931. Bd 166, Heft 2. S. 65–100.
4. *Remak R.* Über erzeugenden invarianten Untergruppen der subdirekten Darstellungen endlicher Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1931. Bd 164, Heft 4. S. 195–242.
5. *Горчаков Ю. М.* О локально нормальных группах // Мат. сб. 1965. Т. 67, № 2. С. 244–254.
6. *Хухро Е. И.* О нильпотентных подпрямых произведениях // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 178–180.
7. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
8. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.


*Статья поступила 31 января 2008 г.*

Горчаков Юрий Михайлович
Тверской гос. университет, пер. Садовый, 35, Тверь 170002
juragorchakov@mail.ru