Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 517.54

ВОГНУТЫЕ ФУНКЦИИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ БЛЯШКЕ И ПОЛИГОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Б. Бхоумик, С. Поннусами, К. Вирс

Аннотация. Рассматривается класс $\mathrm{Co}(p)$ конформных отображений единичного круга на внешность ограниченного выпуклого множества. Доказано, что треугольные отображения, т. е. функции, отображающие единичный круг на внешность некоторого треугольника, являются крайними точками выпуклой замкнутой оболочки $\mathrm{Co}(p)$. Доказано утверждение о замкнутой выпуклой оболочке $\mathrm{Co}(p)$ для всех $p \in (0,1)$, ранее доказанное авторами для некоторых значений $p \in (0,1)$.

Ключевые слова: вогнутая функция, выпуклая оболочка, крайняя точка.

Пусть $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и пусть $\mathrm{Co}(p)$ — семейство функций $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) f мероморфна в $\mathbb{D}$ и имеет простой полюс в точке $p \in (0,1)$,

(ii) f стандартно нормирована: $f(0) = f'(0) - 1 = 0$,

(iii) f отображает $\mathbb{D}$ конформно на множество, дополнение которого относительно $\overline{\mathbb{C}}$ выпукло.

Это семейство функций называют *семейством вогнутых однолистных функций с полюсом* p. Класс $\mathrm{Co}(p)$ широко изучался в последние годы. В [1] доказана следующая характеризация функций из $\mathrm{Co}(p)$, которая привела к многочисленным исследованиям вогнутых функций.

Теорема A [1, теорема 1]. *Функция f принадлежит $\mathrm{Co}(p)$ тогда и только тогда, когда $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и существует голоморфная в $\mathbb{D}$ функция ω такая, что $\omega(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$ и*

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2p}{1-zp} + \frac{2}{p(1-\frac{z}{p})} + \frac{2z\omega(z) - \alpha(1+\omega(z))}{1-\alpha z(1+\omega(z)) + z^2\omega(z)}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

где $\alpha = \frac{2p}{1+p^2} \in (0,1)$.

В [2] доказана следующая формула представления функций класса $\mathrm{Co}(p)$:

Теорема B. *Пусть $p \in (0,1)$. Для любой $f \in \mathrm{Co}(p)$ существует функция $v : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$, голоморфная в $\mathbb{D}$ и такая, что*

$$f(z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+v(z))z^2}{\left(1-\frac{z}{p}\right)(1-zp)}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2}$$

Для каждой $f \in \mathrm{Co}(p)$ есть разложение в ряд Тейлора вида

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(f) z^n, \quad |z| < p. \tag{3}$$

Относительно коэффициентов Тейлора функций из $\mathrm{Co}(p)$ имеем следующий результат [1, теорема 2].

Теорема C. *Пусть $f \in \mathrm{Co}(p)$, $p \in (0,1)$ и $n \in \{2,3,4,5\}$. Тогда область изменения $b_n(f)$ описывается следующим образом:*

$$|b_n(f) - C_n(p)| \leq R_n(p), \tag{4}$$

где

$$C_n(p) = \frac{1-p^{2n+2}}{p^{n-1}(1-p^4)}, \quad R_n(p) = \frac{p^2(1-p^{2n-2})}{p^{n-1}(1-p^4)}.$$

Точка границы этой области достигается тогда и только тогда, когда найдется $\theta \in [0,2\pi)$ такое, что $f = f_\theta$, где θ определено в (2) с $v(z) = e^{i\theta}$.

Позже в [3] было доказано, что в предельном случае $p \to 1$ неравенство (4) имеет место для любого $n \geq 2$. Наконец, в [4] доказано (4) в полной общности как итог двух предположений из [5] и [6] соответственно. В [1] также отмечено, что произвольная точка области, описываемой неравенством (4), обладает свойством

$$b_n(f) = b_n(f(c_0, .))$$

для некоторого $c_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ с

$$f(c_0, z) = \frac{z - \frac{p}{1+p^2}(1+c_0)z^2}{\left(1 - \frac{z}{p}\right)(1-zp)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Если в формуле представления (1) в качестве ω взять произведение Бляшке порядка n, то оказывается, что такое отображение полигонально. Точнее об этом сказано в нашем первом утверждении (в дальнейшем «многоугольник» всегда понимается как «выпуклый многоугольник»).

Теорема 1. *Пусть в (1) $\omega(z)$ — произведение Бляшке порядка $n \geq 1$, т. е.*

$$\omega(z) = e^{i\varphi} \prod_{j=1}^{n} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}, \tag{5}$$

где $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $a_j \in \mathbb{D}$. Тогда f отображает единичный круг конформно на внешность многоугольника с $n+2$ вершинами.

Важно отметить, что если $\omega(z) = c$, где c — константа и $|c| = 1$, то, подставляя это значение ω в (1) и сравнивая с [7], легко увидеть, что f отображает единичный круг на дополнение отрезка числовой прямой, который является вырожденным многоугольником. Ввиду этого простого замечания такой специальный случай не включен в теорему 1.

Имеет место и обратная к теореме 1

Теорема 2. *Произвольное конформное отображение единичного круга на внешность $(n+2)$-угольника $(n \geq 0)$ в $\mathrm{Co}(p)$ является решением дифференциального уравнения (1) с произведением Бляшке ω, как в (5).*

Крайние точки многих классов голоморфных однолистных функций описаны в литературе, однако соответствующий результат для крайних точек $\mathrm{Co}(p)$ не был изучен. Далее мы рассматриваем задачу нахождения крайних точек замкнутой выпуклой оболочки множества $\mathrm{Co}(p)$. Мы используем топологию равномерной сходимости на компактных подмножествах в $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ (см., например, [8]). Точнее, будет доказано, что среди крайних точек замкнутой выпуклой оболочки множества $\mathrm{Co}(p)$ есть треугольные отображения, т. е. функции f, отображающие круг на внешность треугольника, когда соответствующая $\omega(z)$ в (1) является произведением Бляшке первого порядка.

Теорема 3. *Пусть*
$$\omega(z) = e^{i\varphi}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}. \tag{6}$$
Тогда любая $f \in \mathrm{Co}(p)$, являющаяся решением (1) с $\omega(z)$, задаваемой равенством (6), будет крайней точкой замкнутой выпуклой оболочки множества $\mathrm{Co}(p)$.

Замечание 1. Из теорем 2 и 3 видно, что любое треугольное отображение в $\mathrm{Co}(p)$ есть крайняя точка замкнутой выпуклой оболочки множества $\mathrm{Co}(p)$. Тот факт, что выбор $\omega \equiv e^{i\varphi}$ в (1) приводит также к крайним точкам, вытекает из [4]. Детально свойства получающихся функций описаны в [7].

Исходя из этого замечания, сформулируем

Предположение 1. *Любое конформное отображение $\mathbb{D}$ на внешность многоугольника в $\mathrm{Co}(p)$ является крайней точкой.*

Следствие 1. *Множество коэффициентов*
$$\{(b_2(f), b_3(f), \dots, b_n(f)) : f \in \mathrm{Co}(p)\}$$
может быть описано неравенствами, где равенства появляются тогда и только тогда, когда f отображает единичный круг на внешность многоугольника с не более чем n вершинами.

Это следствие вытекает непосредственно из аналогичной теоремы Шура (см. [9]) для коэффициентов Тейлора функций, голоморфных в $\mathbb{D}$ и ограниченных единицей внутри, представления (1) и теорем 1 и 2. В [10] мы обсуждали вопрос, совпадает ли замкнутая выпуклая оболочка множества $\mathrm{Co}(p)$, $p \in (0,1)$, в топологии равномерной сходимости на компактных подмножествах в $\mathbb{D} \setminus \{p\}$ с множеством $C(p)$ функций $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{C}}$, мероморфных в единичном круге $\mathbb{D}$ и определенных равенством (2). Из отсутствия замкнутости $C(p)$ и теоремы B вытекает, что замкнутая выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(p)$ является подмножеством в $C(p)$. Используя теоремы Ливингстона из [5] о коэффициентах ряда Лорана функции $f \in \mathrm{Co}(p)$, авторы в [10] смогли доказать, что замкнутая выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(p)$ будет собственным подмножеством в $C(p)$ для $p \in (1-\sqrt{2}/2, 1)$. Наше последнее утверждение в данной работе показывает, что собственное включение имеет место на всем интервале $p \in (0,1)$ и подтверждает это предположение.

Теорема 4. *Пусть $p \in (0,1)$. Тогда замкнутая выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(p)$ является собственным подмножеством в $C(p)$.*

Для доказательства теоремы 4 используем методы, аналогичные примененным при доказательстве подобной теоремы в [11] для семейства вогнутых функций, голоморфных и однолистных в $\mathbb{D}$.

Доказательство теоремы 1. Для удобства третий член в сумме в правой части равенства (1) запишем в виде
$$t(z) = \frac{N(z)}{D(z)},$$
так что
$$N(z) = 2z\omega(z) - \alpha(1+\omega(z)) \quad \text{и} \quad D(z) = 1 - \alpha z(1+\omega(z)) + z^2\omega(z).$$
Согласно формуле Шварца — Кристоффеля (см. [12, A, 13.3]) надо доказать, что у функции $t(z)$ есть в точности $n+2$ простых нулей знаменателя $D(z)$,

лежащих на единичной окружности, таких, что вычеты положительны, меньше единицы и в сумме равны 2. Проделаем это в несколько шагов. Сначала заметим, что $D(z) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\omega(z) = -\frac{1 - \alpha z}{z(z - \alpha)}.$$

Используя этот факт, видим также, что

$$\frac{z\omega'(z)}{\omega(z)} + 1 = \frac{(1 - \alpha^2)z}{(\alpha - z)(1 - \alpha z)} \tag{7}$$

в нулях z производной $D'(z)$. Доказательство будет вытекать из нескольких доказанных ниже утверждений.

(i) *Нули $D(z)$ принадлежат единичной окружности.* Действительно, пусть z_0 — нуль $D(z)$. Это равносильно тому, что

$$\omega(z_0) := -\frac{1 - \alpha z_0}{z_0(z_0 - \alpha)} = -\frac{\zeta_0(\zeta_0 - \alpha)}{1 - \alpha \zeta_0} =: \frac{1}{\omega(\zeta_0)}, \quad \zeta_0 = \frac{1}{z_0}. \tag{8}$$

Из основного свойства преобразований Мёбиуса имеем $|1/\omega(z_0)| < 1$ при $z_0 \in D$, так что $|1/\omega(\zeta_0)| < 1$ для $|\zeta_0| < 1$. Тем самым $|\omega(z_0)| > 1$ для $|z_0| \neq 1$. Отсюда следует, что нули $D(z)$ возникают только на единичной окружности $|z| = 1$.

(ii) *Нули $D(z)$ простые.* Предположим, что это не так, и пусть $z_0 = e^{i\theta}$ — кратный нуль. Тогда согласно (7)

$$\frac{e^{i\theta}\omega'(e^{i\theta})}{\omega(e^{i\theta})} = -1 - \frac{1 - \alpha^2}{|e^{i\theta} - \alpha|^2} < 0.$$

С другой стороны, несложными вычислениями из (5) вытекает, что

$$P := \frac{e^{i\theta}\omega'(e^{i\theta})}{\omega(e^{i\theta})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1 - |a_k|^2}{|e^{i\theta} - a_k|^2} > 0;$$

противоречие с предположением.

(iii) *Вычеты положительны и не больше единицы.* Вычет в нуле $e^{i\theta}$ функции $D(z)$ задается формулой

$$\lim_{z \to e^{i\theta}} (z - e^{i\theta}) \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N(e^{i\theta})}{D'(e^{i\theta})}.$$

Записывая правую часть этого выражения в терминах $\omega(e^{i\theta})$, $\omega'(e^{i\theta})$ и затем используя (8) и тот факт, что $P > 0$, получаем, что рассматриваемые вычеты равны

$$0 < \frac{2\alpha\cos\theta - 2}{2\alpha\cos\theta - 2 - P|e^{i\theta} - \alpha|^2} < 1.$$

Утверждение (iii) доказано.

(iv) *Знаменатель $D(z)$ имеет $n+2$ нулей.* Предположение о том, что есть общий нуль z_0 у $N(z)$ и $D(z)$ приводит к уравнению

$$\omega(z_0) = -\frac{1 - \alpha z_0}{z_0(z_0 - \alpha)} = \frac{\alpha}{2z_0 - \alpha}.$$

Оно имеет решениями лишь $z_0 = p$ и $z_0 = 1/p$, что противоречит (i). Тем самым из (5) ясно, что $D(z)$ имеет $n + 2$ нулей.

(v) *Сумма вычетов равна* 2. Это очевидно, если рассматривать главный член $2z^{n+1}$ в $N(z)$ после умножения $N(z)$ и $D(z)$ на знаменатель в (5).

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Из формулы Шварца — Кристоффеля известно, что для конформного отображения такого, которое участвует в формулировке теоремы, третий член в сумме в правой части (1), скажем $t(z)$, обладает следующими свойствами:

(a) t — рациональная функция вида

$$t(z) = \frac{2z^{n+1} + \cdots}{z^{n+2} + \cdots},$$

(b) $\operatorname{Re}\left(e^{i\theta}t(e^{i\theta})\right) = 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

(c) $t(p) = \frac{-2p}{1-p^2}$ и $t(1/p) = \frac{2p}{1-p^2}$.

Приравняем третий член в сумме в (1) к $t(z)$ и решим полученное уравнение относительно ω. Тогда обнаружим, что ω — рациональная функция, числитель которой имеет степень $n+2$, а знаменатель степени не выше чем $n+2$. Подставляя (c) в уравнение

$$\omega(z) = \frac{(1-\alpha z)t(z) + \alpha}{2z - \alpha - (z^2 - \alpha z)t(z)},$$

находим, что знаменатель и числитель имеют общие нули в p и $1/p$.

Для фиксированного $\theta \in [0, 2\pi]$ рассмотрим преобразование Мёбиуса

$$T(\zeta) = e^{i\theta}\frac{-\alpha + (2e^{i\theta} - \alpha)\zeta}{1 - \alpha e^{i\theta} + (e^{2i\theta} - \alpha e^{i\theta})\zeta}.$$

Как простое упражнение можно показать, что T отображает единичный круг на полуплоскость $\operatorname{Re}(T) < 1$. Допустим, что $\omega(e^{i\theta}) = \zeta \in \mathbb{D}$. Очевидно, отсюда вытекает противоречие с (b). Значит, $|\omega(e^{i\theta})| = 1$. По лемме Шварца заключаем, что все нули ω находятся в $\mathbb{D}$ и что полюсы ω суть образы нулей при отражении на единичную окружность. Тем самым ω — произведение Бляшке. По предыдущему ω имеет не более чем n нулей, и так как у t есть $n+2$ полюсов, ω не может иметь менее чем n нулей. Значит, ω представляется в виде (5) и доказательство закончено. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $f \in \operatorname{Co}(p)$. Рассмотрим функционал

$$\Phi_\mu(f) = \mu b_2(f) - b_3(f),$$

где

$$\mu \in \mathbb{D}\left(\frac{1+p^2}{p}, \frac{2}{3}\right) := \left\{z : \left|z - \frac{1+p^2}{p}\right| < \frac{2}{3}\right\}.$$

Для рассмотренных ранее значений μ можно утверждать следующее:

(1) $\Phi_\mu(\operatorname{Co}(p))$ — замкнутый круг,

(2) любая из функций f в нашей теореме соответствует единственной граничной точке такого круга при специальном выборе μ.

Для доказательства этого утверждения запишем μ в виде

$$\mu = \frac{1+p^2}{p} + re^{i\tau},$$

где $r \in [0, 2/3)$ и $\tau \in [0, 2\pi)$. Далее, используя (1) вместе с разложением

$$\omega(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{D},$$

легко увидеть, что

$$b_2(f) = \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} - \frac{p}{(1+p^2)} c_0, \quad b_3(f) = \frac{1+p^4}{p^2} - c_0 - \frac{pc_1}{3(1+p^2)}$$

(для доказательства сошлемся на теорему 2 в [1], где получено общее представление для $b_n(f)$). Последние два равенства дают

$$\Phi_\mu(f) = 1 + re^{i\tau} \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} - c_0 \frac{p}{1+p^2} re^{i\tau} + c_1 \frac{p}{3(1+p^2)}.$$

Из неравенства $|c_1| \le 1 - |c_0|^2$ вытекает, что

$$\begin{aligned} \left| \Phi_\mu(f) - \left(1 + re^{i\tau} \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} \right) \right| &\le \frac{rp}{1+p^2} |c_0| + \frac{p}{3(1+p^2)} |c_1| \\ &\le \frac{p}{1+p^2} \left[r|c_0| + \frac{1-|c_0|^2}{3} \right]. \end{aligned}$$

Положим теперь $|c_0| = x$ и рассмотрим функцию

$$h(x) = rx + (1-x^2)/3, \quad x \in [0, 1].$$

Легко проверить, что $h(x)$ имеет локальный минимум при $x = 3r/2$. Поэтому

$$\max\{h(x) : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{3} + \frac{3r^2}{4}.$$

Тем самым для $r \in [0, 2/3)$ область изменения Φ_μ на $\mathrm{Co}(p)$ представляет собой замкнутый круг с центром в $1 + re^{i\tau} \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)}$ и радиусом $\frac{p}{1+p^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} r^2 \right)$. Используя тот факт, что неравенство $|c_1| \le 1 - |c_0|^2$ точное только для функций вида (6), имеем

$$c_0 = \omega(0) = -ae^{i\varphi} = -|a|e^{i(\varphi+\theta)}, \quad c_1 = \omega'(0) = e^{i\varphi}(1 - |a|^2).$$

Тогда для

$$\mu = \frac{1+p^2}{p} + \frac{2}{3} |a| e^{-i\theta}$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(f) &= 1 + \frac{2}{3} |a| e^{-i\theta} \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} + \frac{2}{3} \frac{p}{1+p^2} |a|^2 e^{i\varphi} + \frac{1}{3} \frac{p}{1+p^2} (1-|a|^2) e^{i\varphi} \\ &= 1 + \frac{2}{3} |a| e^{-i\theta} \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} + e^{i\varphi} \frac{p}{3(1+p^2)} (1+|a|^2). \end{aligned}$$

Следовательно, функция (6) является единственной, для которой граничная точка

$$1 + \frac{2}{3} |a| e^{-i\theta} \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} + e^{i\varphi} \frac{p}{3(1+p^2)} (1+|a|^2)$$

достигается. Поскольку круг $\Phi_\mu(\mathrm{Co}(p))$ замкнутый и выпуклый, замкнутая выпуклая оболочка множества $\Phi_\mu(\mathrm{Co}(p))$ с ним совпадает. Значит, крайние точки замкнутой выпуклой оболочки $\Phi_\mu(\mathrm{Co}(p))$ являются граничными точками замкнутого круга $\Phi_\mu(\mathrm{Co}(p))$. Так как функция (6) единственная, у которой граничные точки этого круга достигаются, заключаем, что соответствующая $f \in \mathrm{Co}(p)$, получаемая подстановкой функции (6) в (1), является крайней точкой замкнутой выпуклой оболочки множества $\mathrm{Co}(p)$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим разложения в ряд Тейлора вида (3) функций f в семействах $\mathrm{Co}(p)$ и $C(p)$ и найдем область изменения линейного функционала

$$\Phi(f) = \frac{1+p^2}{p} b_2(f) - b_3(f)$$

на этих двух семействах. Согласно доказательству теоремы 3 последнее уравнение на $f \in \mathrm{Co}(p)$ принимает вид

$$\Phi(f) = 1 + \frac{p}{3(1+p^2)} \omega'(0)$$

и тем самым

$$\Phi(\mathrm{Co}(p)) = \left\{ \tau : \tau = 1 + \frac{p}{3(1+p^2)} \omega'(0) \right\}, \tag{9}$$

где $\omega : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ пробегает семейство функций, голоморфных и ограниченных единицей в единичном круге. Так как для такого семейства $\omega'(0)$ принимает любое значение в замкнутом единичном круге, множество значений Φ на $\mathrm{Co}(p)$ является замкнутым кругом радиусом $p/(3(1+p^2))$ с центром 1. Выпуклость этого круга немедленно вытекает из того, что функционал Φ имеет то же самое множество значений на замкнутой выпуклой оболочке множества $\mathrm{Co}(p)$.

С другой стороны, для любой $f \in C(p)$, задаваемой формулой (2), легко показать, что

$$b_2(f) = \frac{1+p^2+p^4}{p(1+p^2)} - \frac{p}{(1+p^2)} v(0), \quad b_3(f) = \frac{1+p^4}{p^2} - v(0) - \frac{p}{(1+p^2)} v'(0)$$

(см. также [4] для коэффициентов $b_n(f)$ функции f, определенной формулой (2)), так что

$$\Phi(f) = 1 + \frac{p}{(1+p^2)} v'(0),$$

где $v : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ из семейства функций, голоморфных и ограниченных единицей в единичном круге. Как и выше, ясно, что

$$\Phi(C(p)) = \left\{ \tau : \tau = 1 + \frac{p}{(1+p^2)} v'(0) \right\}. \tag{10}$$

Следовательно, область изменения Φ на $C(p)$ является замкнутым кругом с центром 1 и радиусом $p/(1+p^2)$.

Сравнение (9) и (10) немедленно приводит к тому, что для любого $p \in (0,1)$ замкнутая выпуклая оболочка $\mathrm{Co}(p)$ — собственное подмножество в $C(p)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wirths K.-J.* A proof of the Livingston conjecture for the fourth and the fifth coefficient of concave univalent functions // Ann. Pol. Math. 2004. V. 83, N 1. P. 87–93.
2. *Wirths K.-J.* On the residuum of concave univalent functions // Serdica Math. J. 2006. V. 32, N 2–3. P. 209–214.

3. *Avkhadiev F. G., Pommerenke Ch., Wirths K.-J.* Sharp inequalities for the coefficients of concave schlicht functions // Comment. Math. Helv. 2006. V. 81, N 4. P. 801–807.
4. *Avkhadiev F. G., Wirths K.-J.* A proof of the Livingston conjecture // Forum Math. 2007. V. 19, N 1. P. 149–157.
5. *Livingston A. E.* Convex meromorphic mappings // Ann. Pol. Math. 1994. V. 59, N 3. P. 275–291.
6. *Avkhadiev F. G., Pommerenke Ch., Wirths K.-J.* On the coefficient of concave univalent functions // Math. Nachr. 2004. Bd 271. S. 3–9.
7. *Wirths K.-J.* The Koebe domain of concave univalent functions // Serdica Math. J. 2003. V. 29, N 4. P. 355–360.
8. *Ma J. X., Zhang Y. L.* Extreme points and support points of the families of meromorphic univalent functions // Math. Japonica. 1991. V. 36, N 6. P. 1115–1121.
9. *Schur I.* Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind // J. Reine Angew. Math. 1917. Bd 147. S. 205–232.
10. *Bhowmik B., Ponnusamy S., Wirths K.-J.* Domains of variability of Laurent coefficients and the convex hull for the family of concave univalent functions // Kodai Math. J. 2007. V. 30, N 3. P. 385–393.
11. *Wirths K.-J.* Julia's lemma and concave schlicht functions // Quaest. Math. 2005. V. 28, N 1. P. 95–103.
12. *Koppenfels W. V., Stallmann F.* Praxis der konformen Abbildung. Berlin: Springer-Verl., 1959.

Статья поступила 23 марта 2008 г.

B. Bhowmik, S. Ponnusamy
Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai-600 036, India
ditya@iitm.ac.in, samy@iitm.ac.in

K.-J. Wirths
Institut für Analysis, TU Braunschweig, 38106 Braunschweig, Germany
kjwirths@tu-bs.de