Сибирский математический журнал
Июль—август, 2009. Том 50, № 4

УДК 514.764.214

ГЛОБАЛЬНО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ЛОРЕНЦЕВЫ ПРОСТРАНСТВА СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ ГРУППАМИ ГОЛОНОМИИ

Я. В. Базайкин

Аннотация. Доказывается, что каждая из специальных лоренцевых групп голономии (за исключением тех, которые содержат группы изотропии кэлеровых симметрических пространств) может быть реализована как группа голономии глобально гиперболического лоренцева многообразия.

Ключевые слова: группа голономии, лоренцево многообразие.

§ 1. Введение

Классификация групп голономии односвязных римановых многообразий хорошо известна. Классическая теорема де Рама [1] немедленно сводит проблему классификации к задаче изучения неприводимых групп голономии, а любая неприводимая связная риманова группа голономии либо является группой голономии симметрического пространства, либо принадлежит списку Берже. Более того, каждая группа из списка Берже реализуется как группа голономии полного риманова пространства. В [2] можно найти все связанные с этим вопросом ссылки.

В псевдоримановом случае ситуация осложняется наличием неразложимых групп голономии, не являющихся неприводимыми. Более подробно, пусть (N, g) — псевдориманово многообразие с группой голономии $G = \mathrm{Hol}_p(N)$, $p \in N$. Представление голономии называется *разложимым*, если существует G-инвариантное разложение

$$T_pN = W_1 \oplus \ldots \oplus W_r$$

такое, что $r \geq 2$ и $W_i \neq 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$. В противном случае представление называется *неразложимым*. Представление голономии называется *неприводимым*, если не существует нетривиального собственного G-инвариантного подпространства $W \subset T_pN$. Теорема де Рама, обобщенная на псевдориманов случай, утверждает следующее [1, 3]: псевдориманово многообразие с разложимым представлением голономии локально изометрично произведению $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, где $k_i = \dim W_i$ и $\mathrm{Hol}_p(N) = H_1 \times \ldots \times H_r$. Если к тому же N односвязно и геодезически полно, то (N, g) изометрично $(N_1, g_1) \times \ldots \times (N_r, g_r)$, где H_i — группа голономии (N_i, g_i), $i = 1, \ldots, r$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00142–а), гранта президента РФ (проект МК–5482.2008.1) и совместного проекта СО РАН и УрО РАН (проект № 46).

В работах [4, 5] получен список кандидатов в неприводимые группы голономии псевдоримановых многообразий, и в [5] все эти группы реализованы как группы голономии псевдоримановых пространств. При анализе списка из [4, 5] видно, что в лоренцевом случае не может быть неприводимых групп голономии, кроме $SO(n+1,1)$. Таким образом, задача классификации специальных групп голономии лоренцевых пространств сводится к исследованию неразложимых представлений голономии, не являющихся неприводимыми.

В [6] изучены алгебры голономии неразложимых лоренцевых многообразий, не являющихся неприводимыми. С каждой такой алгеброй $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ ассоциирована ее *ортогональная часть* $\mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n)$, причем для данной ортогональной части существуют ровно четыре типа алгебры $\mathbf{g}$, которые потенциально могут быть алгебрами голономии лоренцева многообразия. Более подробно все четыре типа алгебр, а также соответствующие им группы описаны в следующем параграфе.

В [7] доказано, что $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ является алгеброй голономии неразложимого лоренцева многообразия, не являющегося неприводимым, тогда и только тогда, когда ее ортогональная часть $\mathbf{h}$ является алгеброй голономии риманова многообразия. В работе [6] некоторые из этих типов алгебр были, также локально, реализованы как алгебры голономии локально определенных лоренцевых метрик, в работе [8] реализованы алгебры всех четырех типов.

Однако вопрос о глобальном строении лоренцевых метрик со специальными голономиями до сих пор до конца не ясен. Более того, даже постановка задачи осложнена неоднозначностью понимания «полноты» в лоренцевой геометрии. В работе [9] была предложена задача построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий для каждого специального типа группы голономии. Кратко говоря, глобально гиперболическое лоренцево пространство — это пространство, обладающее пространственноподобной гиперповерхностью, с которой любая непродолжаемая непространственноподобная кривая пересекается ровно в одной точке [10]. Это одно из самых сильных условий причинности, наиболее полезное для математической физики. В [9] часть специальных групп голономии (а именно тип 2) была реализована глобально гиперболическими лоренцевыми многообразиями.

В данной работе мы продолжаем изучение задачи построения глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии, предложенной в [9]. А именно, основным результатом статьи является

Теорема. *Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержит в качестве прямого множителя представление изотропии кэлерова симметрического пространства ранга, большего единицы. Тогда для любой специальной лоренцевой группы голономии G с ортогональной частью H существует глобально гиперболическое лоренцево многообразие с группой голономии G.*

Таким образом, оставшиеся неисследованными случаи соответствуют $H = U(n) \times H'$ либо $H = S(U(p) \times U(q)) \times H'$, $\max\{p,q\} \geq 2$, отвечающим симметрическим пространствам $SO(2n)/U(n)$, $Sp(n)/U(n)$ и $SU(p+q)/S(U(p) \times U(q))$, $\max\{p,q\} \geq 2$. Отметим, что в этих случаях представление группы H не является стандартным и может быть представлением голономии только указанных симметрических пространств.

Следующий параграф посвящен построению метрик с заданными группами голономии, а в заключительном параграфе исследуются глобальные свойства причинности построенных метрик.

§ 2. Построение лоренцевых метрик со специальными группами голономии

Рассмотрим односвязное ориентированное во времени лоренцево многообразие N размерности $n+2$, т. е. псевдориманово пространство с метрикой g сигнатуры $(n+1,1)$. Пусть $p \in N$, $G = \mathrm{Hol}_p(N) \subset SO(n+1,1) = \mathrm{Iso}(T_pN)$ — его группа голономии. Имея в виду цитированную выше теорему де Рама для псевдоримановых пространств, везде в дальнейшем многообразие N будет предполагаться неразложимым.

Поскольку из классификации неприводимых псевдоримановых многообразий следует, что неприводимой группой голономии лоренцева многообразия может быть только группа $SO(n+1,1)$, будем в дальнейшем считать, что N не является неприводимым. Следовательно, существует собственное подпространство V в T_pN, инвариантное относительно G, на котором метрика g вырождена. Значит, возникают одномерное распределение $L = V \cap V^{\perp}$ и $(n+1)$-мерное распределение $U = L^{\perp} \supset L$, инвариантные относительно G. Нетрудно увидеть, что на n-мерном пространстве $\widetilde{U} = U/L$ метрика g корректно определяет положительно определенное скалярное произведение и группа G индуцирует действие некоторой группы $H \subset SO(n)$ на $\widetilde{U}$. Группа H называется *ортогональной частью* группы голономии G. Из [7] следует, что если G является группой голономии лоренцева многообразия, то H является группой голономии риманова многообразия, т. е. либо принадлежит списку Берже, либо является группой изотропии симметрического пространства, либо является произведением таких групп.

Рассмотрим изотропный базис в пространстве T_pN, т. е. базис, в котором метрика g задается матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & E_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующее представление алгебры $\mathbf{so}(n+1,1)$:

$$\mathbf{so}(n+1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & X & 0 \\ -Y^T & A & -X^T \\ 0 & Y & -a \end{pmatrix} \mid A \in \mathbf{so}(n),\ X, Y \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что L порождено первым координатным вектором. Тогда алгебра Ли группы $SO(n+1,1)_L$, сохраняющей L, задается следующим образом:

$$\mathbf{so}(n+1,1)_L = \left\{ \begin{pmatrix} a & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbf{so}(n) \right\}.$$

В [6] предпринято изучение алгебр Ли $\mathbf{g}$, отвечающих возможным группам голономии $G \subset SO(n+1,1)$. Пусть $\mathbf{h}$ — алгебра Ли ортогональной части H группы $G \subset SO(n+1,1)_L$. В [6] доказано, что алгебра $\mathbf{g}$ может принадлежать лишь одному из следующих четырех типов:

$$\mathbf{g}^{1,\mathbf{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n) \right\};$$

$$\mathbf{g}^{2,\mathbf{h}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n) \right\};$$

$$\mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi} = \left\{ \begin{pmatrix} \phi(A) & X & 0 \\ 0 & A & -X^T \\ 0 & 0 & -\phi(A) \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n,\ A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(n) \right\},$$

где центр $Z(\mathbf{h})$ алгебры $\mathbf{h}$ нетривиален и $\phi : \mathbf{h} \to \mathbb{R}$ — ненулевое линейное отображение такое, что $\phi|_{\mathbf{h}'} = 0$ (через $\mathbf{h}'$ мы обозначаем коммутант алгебры Ли $\mathbf{h}$);

$$\mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X & \psi(A) & 0 \\ 0 & A & 0 & -X^T \\ 0 & 0 & 0 & -\psi(A)^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbf{h} \subset \mathbf{so}(m) \right\},$$

где $0 < m < n$, $\dim Z(\mathbf{h}) \geq n - m$ и $\psi : \mathbf{h} \to \mathbb{R}^{n-m}$ — сюръективное линейное отображение такое, что $\psi|_{\mathbf{h}'} = 0$.

Пусть $T^r \subset H$ — центр группы H. Обозначим через $\mathrm{Det} : H \to T^r$ однозначно определенный гомоморфизм такой, что $\mathrm{Det}^{-1}(1) \subset H$ — полупростая часть H. Указанные выше алгебры являются касательными алгебрами Ли следующих подгрупп $SO(n+1,1)$:

$$G^{1,H} = \left\{ \begin{pmatrix} e^a & X & -\frac{1}{2}e^{-a}XX^T \\ 0 & A & -e^{-a}AX^T \\ 0 & 0 & e^{-a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R},\ X \in \mathbb{R}^n,\ A \in H \subset SO(n) \right\};$$

$$G^{2,H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & X & -\frac{1}{2}XX^T \\ 0 & A & -AX^T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n,\ A \in H \right\};$$

$$G^{3,H,\phi} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{\phi(a_1,\dots,a_r)} & X & -\frac{1}{2}e^{-a}XX^T \\ 0 & A & -e^{-a}AX^T \\ 0 & 0 & e^{-\phi(a_1,\dots,a_r)} \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n,\ A \in H, \right.$$

$$\left. \mathrm{Det}(A) = (e^{ia_1}, \dots, e^{ia_r}) \in T^r \right\};$$

$$G^{4,H,m,\psi} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & X & \psi(a_1,\dots,a_r) & -\frac{1}{2}(XX^T + YY^T) \\ 0 & A & 0 & -AX^T \\ 0 & 0 & E_m & -\psi(a_1,\dots,a_r)^T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \right.$$

$$\left. X \in \mathbb{R}^{n-m},\ A \in H \subset SO(n-m),\ \mathrm{Det}(A) = (e^{ia_1}, \dots, e^{ia_r}) \right\}.$$

Заметим, что подгруппы $G^{3,H,\phi}$, $G^{4,H,m,\psi}$ могут не быть замкнутыми подгруппами в $SO(n+1,1)$ [6].

Пусть M — риманово многообразие размерности n с метрикой g. Рассмотрим следующую лоренцеву метрику на многообразии $N = M \times \mathbb{R}^2$:

$$\tilde{g} = 2d\eta(d\xi + \varepsilon f d\eta + 2\varepsilon A) + g, \tag{1}$$

где ξ, η — координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, f — функция на N, A — 1-форма на M, $\varepsilon > 0$ — вещественный параметр.

Теорема 1. *Пусть H — группа голономии риманова пространства, представление голономии которой не содержит в качестве прямого множителя группу изотропии кэлерова симметрического пространства ранга, большего единицы. Тогда существует лоренцево многообразие с метрикой вида* (1), *группа голономии которого совпадает с любой из групп $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$.*

Оставшаяся часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Пусть $e^1, \dots, e^n$ — ортонормированный корепер метрики g, определенный, вообще говоря, лишь локально. Достроим его до изотропного корепера $\tilde e^0, \tilde e^1, \dots, \tilde e^n$, $\tilde e^{n+1}$ метрики $\tilde g$ следующим образом:

$$\tilde e^0 = d\xi + \varepsilon f d\eta + 2\varepsilon A, \quad \tilde e^i = e^i, \quad \tilde e^{n+1} = d\eta.$$

Условимся, что в дальнейшем греческие индексы будут пробегать значения от 0 до $n+1$, латинские — от 1 до n. Пусть $\tilde e_\alpha$ — двойственный репер к $\tilde e^\alpha$. Напомним, что формы связности $\widetilde\omega$ и кривизны $\widetilde\Omega$ находятся из соотношений $d\tilde e^\alpha = -\widetilde\omega^\alpha_\beta \wedge \tilde e^\beta$ и $\widetilde\Omega^\alpha_\beta = d\widetilde\omega^\alpha_\beta + \widetilde\omega^\alpha_\gamma \wedge \widetilde\omega^\gamma_\beta$, где матрицы $\big(\widetilde\omega^\alpha_\beta\big)_{\alpha,\beta}$ и $\big(\widetilde\Omega^\alpha_\beta\big)_{\alpha,\beta}$ лежат в алгебре $\mathbf{so}(n+1,1)$.

Непосредственные вычисления, которые мы опускаем, позволяют получить следующее утверждение.

Лемма 1. *Формы кручения и кривизны метрики $\tilde g$ в изотропном корепере $\tilde e^0, \tilde e^1, \dots, \tilde e^n, \tilde e^{n+1}$ задаются следующими соотношениями:*

$$\begin{gathered}\widetilde\omega^0_0 = -\widetilde\omega^{n+1}_{n+1} = \varepsilon f_0 \tilde e^{n+1}, \quad \widetilde\omega^0_{n+1} = -\widetilde\omega^{n+1}_0 = 0, \quad \widetilde\omega^{n+1}_i = -\widetilde\omega^i_0 = 0,\\ \widetilde\omega^0_i = -\widetilde\omega^i_{n+1} = \varepsilon f_i \tilde e^{n+1} + \varepsilon F_{ij}\tilde e^j, \quad \widetilde\omega^i_j = -\widetilde\omega^j_i = \omega^i_j - \varepsilon F_{ij}\tilde e^{n+1},\end{gathered} \tag{2}$$

где $f_0 = \langle df, e^{n+1}\rangle = \partial f/\partial\xi$, $f_i = \langle df, e^i\rangle$ и $dA = F = \frac12 F_{ij} e^i \wedge e^j$,

$$\begin{gathered}\widetilde\Omega^0_0 = -\widetilde\Omega^{n+1}_{n+1} = \varepsilon f_{00}\tilde e^0 \wedge \tilde e^{n+1} + \varepsilon f_{0i}\tilde e^i \wedge \tilde e^{n+1},\\ \widetilde\Omega^{n+1}_0 = -\widetilde\Omega^0_{n+1} = 0, \quad \widetilde\Omega^i_0 = -\widetilde\Omega^{n+1}_i = 0,\\ \widetilde\Omega^0_i = -\widetilde\Omega^i_{n+1} = \varepsilon\widetilde\nabla_0 f_i \tilde e^0 \wedge \tilde e^{n+1} + (\varepsilon\widetilde\nabla_k f_i + \varepsilon^2 F_{ij}F_{jk})\tilde e^k \wedge \tilde e^{n+1} + \varepsilon\widetilde\nabla_k F_{ij}\tilde e^k \wedge \tilde e^j,\\ \widetilde\Omega^i_j = -\widetilde\Omega^j_i = \Omega^i_j - \varepsilon\nabla_k F_{ij}\tilde e^k \wedge \tilde e^{n+1},\end{gathered} \tag{3}$$

где $f_{00} = \partial^2 f/\partial\xi^2$, $f_{0i} = \langle f_0, e^i\rangle$.

В соответствии с теоремой Амброза — Зингера [11] алгебра голономии $\mathbf{hol} = \mathbf{hol}_p(N)$ многообразия N порождена элементами вида

$$(P_\gamma\widetilde\Omega)(v,w) \in \mathbf{so}(n+1,1),$$

где $v, w \in T_pN$, γ — путь в N, заканчивающийся в точке p, а P_γ — параллельный перенос вдоль кривой γ. Поскольку свойство изотропности корепера сохраняется при параллельном переносе, можно в каждой точке отождествить группу изометрий касательного пространства с матричной группой $SO(n+1,1)$, сохраняющей скалярное произведение (1).

Пусть $\gamma(t)$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = p$. Сделаем параллельный перенос корепера $\tilde e^\alpha$ вдоль γ:

$$(P_\gamma)_t(\tilde e^\alpha) = (W_t)^\alpha_\beta \tilde e^\beta, \quad W_t \in SO(n+1,1).$$

Из теоремы Амброза — Зингера следует, что алгебра $\mathbf{hol}$ порождена элементами $Ad(W_t)\widetilde\Omega(v,w)$ для всех $p \in N$, $v, w \in T_pN$ и всех достаточно малых t. Переходя к пределу при $t \to 0$, получаем, что алгебра $\mathbf{hol}$ порождена матрицами $\widetilde\Omega(v,w)$, $[\widetilde\omega(u), \widetilde\Omega(v,w)]$ для всех $p \in N$ и $u, v, w \in T_pN$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *Алгебра голономии* $\mathbf{hol} \subset \mathbf{so}(n+1,1)$ *многообразия* N *может быть найдена следующим образом:*

$$\mathbf{hol} = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha \wedge \tilde{v}_\beta), [\widetilde{\omega}(\tilde{v}_\gamma), \widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha \wedge \tilde{v}_\beta)] \mid p \in N, \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \dots, n, n+1\}.$$

Пусть $\mathbf{g} \subset \mathbf{so}(1, n+1)$ — алгебра одного из четырех типов, определенных выше, $\mathbf{h}$ — ее ортогональная часть. Как следует из вышесказанного, $\mathbf{h}$ является алгеброй голономии риманова многообразия. Используя классификацию римановых групп голономии, получаем ортогональное разложение

$$\widetilde{U}_p = \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \oplus \mathbb{R}^{n_0} \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{R}^{n_i}, \quad m = n_0 + \sum_{i=1}^{r} n_i,$$

и соответствующее разложение алгебр

$$\mathbf{h} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{h}_0 \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i \subset \mathbf{so}(n),$$

где $\mathbf{0} \subset \mathbf{so}(n-m)$ — тривиальное слагаемое, алгебра $\mathbf{h}_0$ является (возможно, приводимой) подалгеброй $\mathbf{so}(n_0)$ с тривиальным центром, а каждая алгебра $\mathbf{h}_i$, $i = 1, \dots, r$, изоморфна $\mathbf{u}(m_i)$, $2m_i = n_i$, со стандартным действием на $\mathbb{R}^{n_i} = \mathbb{C}^{m_i}$, $\mathbf{h}_i(\mathbb{R}^{n_j}) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 0, \dots, r$, и $\mathbf{h}$ аннулирует слагаемое $\mathbb{R}^{n-m}$.

В дальнейшем нам будет удобно ввести следующие обозначения:

$$\mathscr{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathscr{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathbf{so}(n) \right\},$$

$$\mathscr{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & -X^T \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Таким образом, $\mathbf{so}(n+1,1)_L = \mathscr{A} \oplus \mathscr{K} \oplus \mathscr{N}$, причем $\mathscr{N}$ — абелев идеал в $\mathbf{so}(n+1,1)_L$, $\mathscr{K}$ — подалгебра, изоморфная $\mathbf{so}(n)$, и $\mathscr{A}$ коммутирует с $\mathscr{K}$. Элементы из $\mathbf{so}(n+1,1)_L$ будем обозначать через (a, A, X) в соответствии с указанным разложением. Наконец, обозначим через $\mathrm{pr}_{\mathscr{A}}$, $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}$ и $\mathrm{pr}_{\mathscr{N}}$ проекции алгебры $\mathbf{so}(n+1,1)_L$ на соответствующие подалгебры относительно нашего разложения. Рассмотрим отдельно случай каждой алгебры.

Тип 1. В этом случае пусть M — компактное n-мерное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathbf{h}$. Положим $N = M \times \mathbb{R}^2$, рассмотрим на N метрику (1) при $A = 0$.

Из формул (3) видно, что если функция f имеет достаточно общий вид, то

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha \wedge \tilde{v}_\beta) \mid \alpha, \beta\} = \mathbf{g}^{1,\mathbf{h}}.$$

Далее, формулы (2) показывают, что $\widetilde{\omega}(\tilde{v}_\gamma) \in \mathbf{g}^{1,\mathbf{h}}$, откуда следует требуемый результат.

Тип 2. Этот случай совершенно аналогичен предыдущему, надо только рассмотреть функцию f достаточно общего вида, не зависящую от переменных ξ, η.

Для продолжения доказательства нам понадобится пример Калаби риманова пространства с группой голономии $SU(n)$. При изложении следующей конструкции мы следуем [12]. Пусть $\mathbb{C}P^{n-1}$ — комплексное проективное пространство с метрикой Фубини — Штуди ds^2. Рассмотрим метрику

$$d\hat{s}^2 = \frac{d\rho^2}{1-\frac{1}{\rho^{2n}}} + \rho^2\left(1-\frac{1}{\rho^{2n}}\right)(d\tau - 2A)^2 + \rho^2 ds^2, \tag{4}$$

где A — 1-форма на $\mathbb{C}P^{n-1}$ такая, что $dA = \Phi$ — кэлерова форма, $\rho \geq 1$, τ — новые переменные, причем τ периодична. Форма A определена лишь локально на $\mathbb{C}P^{n-1}$, однако в силу ходжевости $\mathbb{C}P^{n-1}$ можно выбрать период $\Delta\tau$ переменной τ таким, что $\int 2\Phi$ по каждой замкнутой 2-цепи в целое число раз отличается от $\Delta\tau$. Тогда $d\tau - 2A$ не зависит от выбора координатной окрестности и метрика (4) является корректно определенной гладкой метрикой на пространстве комплексного линейного расслоения над $\mathbb{C}P^{n-1}$, являющегося n-й степенью расслоения Хопфа над $\mathbb{C}P^{n-1}$. Более того, получающееся таким образом полное риманово многообразие C_n (пространство Калаби) обладает группой голономии $SU(n)$. Пространство C_n, построенное Калаби [13], является обобщением пространства Эгучи — Хансона [14], возникающим при $n = 2$. При этом кэлерова форма на C_n выглядит следующим образом:

$$\widehat{\Phi} = -\rho^2\Phi + \rho d\rho \wedge (d\tau - 2A).$$

В дальнейшем нам понадобится 1-форма

$$B = \frac{1}{2}\rho^2(d\tau - 2A).$$

Согласно вышесказанному форма B глобально определена на C_n и $dB = \widehat{\Phi}$.

Тип 3. Пусть M^{n_0} — компактное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathbf{h}_0$, и пусть $M^n = M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}$, $n = n_0 + 2\sum\limits_{i=1}^{r} m_i$, — прямое произведение римановых пространств, где пространства Калаби C_{m_i} определены выше. Обозначим через ρ_i, τ_i соответствующие координаты, а через B_i, $i = 1, \ldots, r$, — 1-формы на C_{m_i}. Нетрудно заметить, что ρ_i^2 и B_i глобально определены и гладки на всем N. Центр алгебры $Z(\mathbf{h}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i$ изоморфен $\bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathbf{u}(1)$, и в качестве базиса $Z(\mathbf{h})$ можно выбрать формы $\widehat{\Phi}_i$, $i = 1, \ldots, r$ (2-формы естественно интерпретируются как элементы алгебры $\mathscr{K}$). Тогда ненулевое линейное отображение $\phi : Z(\mathbf{h}) \to \mathbb{R}$ определяется набором вещественных констант ϕ_i, $i = 1, \ldots, r$, одновременно не равных нулю. Положим

$$A = \sum_{i=1}^{r} g_i B_i,$$

где каждая функция g_i зависит только от переменной ρ_i. Далее, пусть

$$f = h - \xi \sum_{i=1}^{r} \phi_i \left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right),$$

где функция h не зависит от ξ, η. Пусть $N = M \times \mathbb{R}^2$, и рассмотрим на N метрику (1), определяемую функцией f и 1-формой A.

Пусть

$$W_1 = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\omega}(\tilde{e}_k) \mid k = 1, \ldots, n\}, \quad W_2 = \mathbb{R}\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}).$$

Ясно, что $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(W_1) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\omega(e_k) \mid k = 1, \dots, n\}$ и $\mathrm{pr}_{\mathscr{A}}(W_1) = 0$. Далее,

$$F = dA = \sum_{i=1}^{r} (dg_i \wedge B_i + g_i dB_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \bigl(g_i' d\rho_i \wedge B_i + g_i \widehat{\Phi}_i\bigr) = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i \widehat{\Phi}_i\right).$$

Таким образом, $F \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i$. Формулы (2) показывают, что $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon F$. Следовательно,

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n_0)}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = 0, \quad \mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i \widehat{\Phi}_i\right).$$

У нас каждая алгебра $\mathbf{h}_i$ изоморфна $\mathbf{u}(m_i)$, поэтому определена проекция $\mathrm{tr} : \mathbf{h}_i \to Z(\mathbf{h}_i) = \mathbf{u}(1)$, инвариантная относительно группы голономии. Кроме того, форма $\widehat{\Phi}_i$ является образующей центра $Z(\mathbf{h}_i)$, так что

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(W_2) = -\varepsilon\, \mathrm{tr} \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i \widehat{\Phi}_i\right) = -\varepsilon \left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right) \widehat{\Phi}_i.$$

Далее,

$$\mathrm{pr}_{\mathscr{A}}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{r} \phi_i \left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right) = \phi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}))).$$

Таким образом, $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\omega}(\tilde{e}_\alpha) \mid \alpha\} = W_1 \oplus W_2 \subset \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}$.

Положим теперь

$$V_1 = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j) \mid i, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbf{so}(n+1, 1).$$

Анализируя формулы (3) и применяя лемму 2, видим, что

$$\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(V_1) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\Omega(e_i \wedge e_j) \mid i, j = 1, \dots, n\} \subset \mathbf{h}_0 \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i',$$

где $\mathbf{h}_i' = \mathbf{su}(m_i)$. Кроме того, $\mathrm{pr}_{\mathscr{A}}(V_1) = 0$. Далее, положим

$$V_2 = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1}) \mid k = 1, \dots, n\}.$$

Поскольку

$$F = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i \widehat{\Phi}_i\right) \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i,$$

то $\nabla_k F \in \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i$. Формулы (3) показывают, что $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \nabla_k F$. Следовательно,

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n_0)}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0,$$
$$\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon \nabla_k \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\tau_i - A_i) + g_i \widehat{\Phi}_i\right),$$

где $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, n$. Тогда, воспользовавшись параллельностью формы $\widehat{\Phi}_i$, получаем

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\, \mathrm{tr} \left(\nabla_k \left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\psi_i - A_i) + g_i \widehat{\Phi}_i\right)\right)$$

$$= -\varepsilon\nabla_k \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\psi_i - A_i) + g_i\widehat{\Phi}_i\right) = -\varepsilon\nabla_k\left(\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\widehat{\Phi}_i\right)$$
$$= -\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\rho_i^{2m_i}}\right)\left(\frac{2m_i+1}{2m_i}g_i' + \frac{\rho_i}{2m_i}g_i''\right)\widehat{\Phi}_i,$$

если индекс k соответствует переменной ρ_i, и

$$\operatorname{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0$$

в противном случае. Далее, в случае, если индекс k соответствует переменной ρ_i, имеем

$$\operatorname{pr}_{\mathscr{A}}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\phi_i\left(1 - \frac{1}{\rho_i^{m_i}}\right)\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)' = \phi(\operatorname{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\widetilde{\Omega}(\tilde{v}_i \wedge \tilde{v}_{n+1}))).$$

Наконец, $V_3 = \mathbb{R}\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_{n+1}) = 0$. Из последних соотношений вытекает, что

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta) \mid \alpha, \beta\} = V_1 + V_2 + V_3 \subset \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}.$$

Более того, $\operatorname{pr}_{\mathscr{K}}([W_1, V_1] \oplus V_1) = \mathbf{h}_0 \bigoplus\limits_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i'$ по лемме 2, примененной к многообразию M. Осталось заметить, что если выбрать функцию h достаточно общим образом, то $\operatorname{pr}_{\mathscr{N}}(V_2) = \mathscr{N}$, откуда следует, что

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{[\widetilde{\omega}(\tilde{e}_\gamma), \widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta)], \widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta) \mid \alpha, \beta\gamma\} = \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}.$$

По лемме 2 $\mathbf{hol}(N) = \mathbf{g}^{3,\mathbf{h},\phi}$. Так как ортогональный корепер $e^1, \dots, e^n$ выбирался в произвольной окрестности M, отсюда следует, что $\operatorname{Hol}(N) = G^{3,H,\phi}$.

Тип 4. Доказательство в целом аналогично предыдущему случаю. Пусть M^{n_0} — компактное риманово многообразие с алгеброй голономии $\mathbf{h}_0$. Пусть

$$M^n = \mathbb{R}^{n-m} \times M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}, \quad m = n_0 + 2\sum_{i=1}^{r} m_i,$$

— прямое произведение римановых пространств, где $\mathbb{R}^{n-m}$ — плоское $(n-m)$-мерное евклидово пространство с переменными $t_1, \dots, t_{n-m}$, а пространства Калаби C_{m_i} определены выше. Обозначим через ρ_i, τ_i, B_i, $i = 1, \dots, r$, соответствующие координаты и 1-формы на C_{m_i}. Как и ранее, ρ_i^2 и B_i глобально определены и гладки на всем N. Пусть линейное отображение $\psi : Z(\mathbf{h}) = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} Z(\mathbf{h}_i) \to \mathbb{R}^{n-m}$ задается матрицей $\left(\psi_i^j\right)_{i=1;j=1}^{r\;;n-m}$ максимального ранга в базисе $\widehat{\Phi}_i$, $i = 1, \dots, r$.

Положим

$$A = \sum_{i=1}^{r} g_i B_i,$$

где каждая функция g_i зависит только от переменной ρ_i, и

$$f = h - \sum_{k=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{r}\psi_i^k t_k\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)$$

для некоторой функции h, не зависящей от ξ, η. Пусть $N = M \times \mathbb{R}^2$. Рассмотрим на N метрику (1), определяемую функцией f и 1-формой A.

Пусть $W_1 = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\omega}(\tilde{e}_k) \mid k = 1, \dots, n\}$, $W_2 = \mathbb{R}\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})$. Как и прежде, $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(W_1) = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\omega(e_k) \mid k = 1, \dots, n\}$, $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(W_2) \subset \mathbf{h}$ и

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\widehat{\Phi}_i.$$

Будем обозначать через $\mathscr{N}_1$ и $\mathscr{N}_2$ подпространства $\mathscr{N}$, отвечающие $\mathbb{R}^{n-m}$ и $M^{n_0} \times C_{m_1} \times \dots \times C_{m_r}$ соответственно. Ясно, что $\mathscr{N} = \mathscr{N}_1 \oplus \mathscr{N}_2$. Далее, $\mathrm{pr}_{\mathscr{N}_1}(W_1) = 0$ и

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\mathscr{N}_1}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1})) &= -\varepsilon\sum_{k=1}^{n-m}\frac{\partial f}{\partial t_k}\frac{\partial}{\partial t_k}\\ &= -\varepsilon\sum_{k=1}^{n-m}\sum_{i=1}^{r}\psi_i^k\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\frac{\partial}{\partial t_k} = \psi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\widetilde{\omega}(\tilde{e}_{n+1}))),\end{aligned}$$

где $\frac{\partial}{\partial t_k}$, $k = 1, \dots, n-m$, — базис в $\mathbb{R}^{n-m}$. Таким образом, $\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\omega}(\tilde{e}_\alpha) \mid \alpha\} \subset \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}$. Как и выше, положим

$$V_1 = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_j) \mid i, j = 1, \dots, n\}.$$

Из формул (3) видим, что $\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n)}(V_1) \subset \mathbf{h}_0 \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i'$ и $\mathrm{pr}_{\mathscr{N}_1}(V_1) = 0$. Далее, функция f не зависит от ξ, поэтому пространство $V_2 = \mathbb{R}\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_0 \wedge \tilde{e}_{n+1})$ тривиально. Наконец, рассмотрим пространство

$$V_3 = \mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_i \wedge \tilde{e}_{n+1}) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Имеем $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\nabla_k F$, следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathbf{so}(n-m+n_0)}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0$ и $\mathrm{pr}_{\mathbf{h}_i}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\nabla_k\bigl(\frac{1}{2}\rho_i^2 g_i' d\rho_i \wedge (d\psi_i - A_i) + g_i\widehat{\Phi}_i\bigr)$, где $i = 1, \dots, r$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = -\varepsilon\left(1 - \frac{1}{\rho_i^{2m_i}}\right)\left(\frac{2m_i + 1}{2m_i}g_i' + \frac{\rho_i}{2m_i}g_i''\right)\widehat{\Phi}_i,$$

если индекс k соответствует переменной ρ_i, и

$$\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h}_i)}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) = 0$$

в противном случае. Если индекс k отвечает переменной ρ_i, то из (3) следует, что

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_{\mathscr{N}_1}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1})) &= -\varepsilon\sum_{j=1}^{n-m}\widetilde{\nabla}_k f_j\frac{\partial}{\partial t_j} = -\varepsilon\sum_{j=1}^{n-m}\nabla_k\sum_{i=1}^{r}\psi_i^j\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)\frac{\partial}{\partial t_j}\\ &= -\varepsilon\sum_{j=1}^{n-m}\psi_i^j\left(1 - \frac{1}{\rho_i^{2m_i}}\right)\left(\frac{1}{2m_i}\rho_i g_i' + g_i\right)'\frac{\partial}{\partial t_j} = \psi(\mathrm{pr}_{Z(\mathbf{h})}(\widetilde{\Omega}(\tilde{e}_k \wedge \tilde{e}_{n+1}))).\end{aligned}$$

Из последних соотношений вытекает, что

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{\widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta) \mid \alpha, \beta\} = V_1 + V_2 + V_3 \subset \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}.$$

Далее, $\mathrm{pr}_{\mathscr{K}}([W_1, V_1] \oplus V_1) = \mathbf{h}_0 \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbf{h}_i'$ по лемме 2, примененной к многообразию M. Осталось заметить, что если выбрать функцию h достаточно общим образом, то $\mathrm{pr}_{\mathscr{N}_2}(V_3) = \mathscr{N}_2$, откуда следует, что

$$\mathscr{L}_{\mathbb{R}}\{[\widetilde{\omega}(\tilde{e}_\gamma), \widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta)], \widetilde{\Omega}(\tilde{v}_\alpha, \tilde{v}_\beta) \mid \alpha, \beta\, \gamma\} = \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}.$$

По лемме 2 $\mathbf{hol}(N) = \mathbf{g}^{4,\mathbf{h},m,\psi}$. Так как ортогональный корепер $e^1, \dots, e^n$ выбирался в произвольной окрестности M, отсюда следует, что $\mathrm{Hol}(N) = G^{4,H,m,\psi}$.

§ 3. Свойства причинности построенных метрик

Напомним, что ориентированное во времени лоренцево многообразие N называется *глобально гиперболическим*, если оно является сильно причинным и для любых двух точек $p, q, \in N$ пересечение $J^+(p) \cap J^-(q)$ причинного будущего p и причинного прошлого q является компактным подмножеством в N [10]. Из следующего утверждения вместе с теоремой 1 вытекает основной результат статьи.

Теорема 2. *Лоренцевы многообразия с группами голономии $G^{1,H}$, $G^{2,H}$, $G^{3,H,\phi}$ и $G^{4,H,m,\psi}$, построенные в теореме 1, являются глобально гиперболическими при подходящем выборе f, A и ε.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждый тип группы голономии.

Типы 1, 2. Нетрудно заметить, что при построении метрик с группами голономии этих типов можно в качестве f выбрать функцию с компактным носителем в N. Значит, при $\varepsilon \to 0$ метрика (1) сходится к метрике

$$g_0 = 2d\eta d\xi + ds^2$$

в тонкой C^0-топологии. Ясно, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ векторное поле $\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}$ является времениподобным и ориентирует N во времени как относительно метрики g_0, так и относительно $\tilde{g}$. Пространство (N, g_0) изометрично прямому произведению двумерного плоского пространства Минковского и полного риманова пространства M, поэтому является глобально гиперболичным [10, гл. 2]. Поскольку свойство глобальной гиперболичности C^0-устойчиво [10, гл. 6], получаем требуемый результат.

Тип 3. Рассмотрим метрику

$$g_0 = 2d\eta(d\xi - (1 + |\xi|)d\eta) + \frac{1}{2}g.$$

Напомним, что на пространстве лоренцевых метрик на данном многообразии N вводится отношение частичного порядка следующим образом [10]. Считаем, что $g_1 \preceq g_2$ ($g_1 \prec g_2$), если каждый световой конус метрики g_1 (строго) содержится в световом конусе g_2, или, другими словами, для любой точки $p \in N$ и для любого ненулевого вектора $X \in T_pN$ из неравенства $g_1(X, X) \leq 0$ следует, что $g_2(X, X) \leq 0$ ($g_2(X, X) < 0$).

Лемма 3. *При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение $\tilde{g} \preceq g_0$.*

Доказательство. Пусть $p \in N$, $V = V_1 + V_2 \in T_pN$, где V_1, V_2 — компоненты V, касательные соответственно к $\mathbb{R}^2$ и M. Заметим, что $|A(V_2)|^2 \leq Cg(V_2, V_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(V, V) &\geq 2d\eta(d\xi + \varepsilon f d\eta)(V_1, V_1) - 4\varepsilon d\eta(V_1)|A(V_2)| + g(V_2, V_2) \\
&\geq 2d\eta(d\xi + \varepsilon f d\eta)(V_1, V_1) - 2\varepsilon(d\eta(V_1))^2 - 2\varepsilon|A(V_2)|^2 + g(V_2, V_2) \\
&\geq 2d\eta(d\xi + \varepsilon(f - 1)d\eta)(V_1, V_1) + (1 - 2C\varepsilon)g(V_2, V_2) \\
&\geq 2d\eta(d\xi - (|\xi| + 1)d\eta)(V_1, V_1) + \frac{1}{2}g(V_2, V_2) \geq g_0(V, V),
\end{aligned}$$

если выбрать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $1 - 2C\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ и

$$|\varepsilon(f-1)| = \varepsilon \left| h - \xi \sum_{i=1}^{r} \phi_i \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right) - 1 \right| \\ \leq |\xi| \left| \varepsilon \sum_{i=1}^{r} \phi_i \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right) \right| + \varepsilon |h-1| \leq |\xi| + 1.$$

Следовательно, любой непространственноподобный (времениподобный) вектор для метрики $\tilde{g}$ будет непространственноподобным (времениподобным) и для g_0. Лемма доказана.

Очевидно, что векторное поле $\frac{\partial}{\partial \eta}$ является времениподобным для (N, g_0), а по лемме 3 и для $(N, \tilde{g})$. Значит, поле $\frac{\partial}{\partial \eta}$ задает направление времени на N относительно лоренцевых метрик g_0 и $\tilde{g}$. Везде в дальнейшем будем иметь в виду именно это направление времени.

Лемма 4. *Многообразие (N, g_0) является устойчиво причинным и глобально гиперболичным.*

Доказательство. Для начала рассмотрим метрику $g_1 = 2d\eta(d\xi - (1 + |\xi|)d\eta)$ на $\mathbb{R}^2$. Определим следующую функцию на $\mathbb{R}^2$:

$$T = \eta - \ln(|\xi| + 2).$$

Если рассмотреть направленную в будущее непространственноподобную регулярную кривую $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, то

$$\dot{\eta}(\dot{\xi} - (|\xi| + 1)\dot{\eta}) \leq 0.$$

Следовательно,

$$\dot{T} = \dot{\eta} - \frac{\dot{\xi}}{|\xi| + 2} \geq \frac{1}{|\xi| + 2}((|\xi| + 1)\dot{\eta} - \dot{\xi}) + \frac{\dot{\eta}}{|\xi| + 2} > 0.$$

Значит, T является глобальной функцией времени на $\mathbb{R}^2$, и $(\mathbb{R}^2, g_1)$ устойчиво причинно. Очевидно, что функция T также является глобальной функцией времени и для (N, g_0), откуда следует его устойчивая причинность.

Рассмотрим теперь пару точек $p_1 = (\xi_1, \eta_1)$ и $p_2 = (\xi_2, \eta_2)$ в $\mathbb{R}^2$. Непосредственными вычислениями устанавливается, что множество $J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$ на $\mathbb{R}^2$ задается неравенствами

$$\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, \quad c(\xi_1, \eta_1) + \operatorname{sgn}(\xi) \ln(1 + |\xi|) \leq \eta \leq c(\xi_2, \eta_2) + \operatorname{sgn}(\xi) \ln(1 + |\xi|),$$

где $c(\xi_i, \eta_i) = \eta_i - \operatorname{sgn}(\xi_i) \ln(1 + |\xi_i|)$. Ясно, что последние неравенства определяют компакт в $\mathbb{R}^2$ независимо от выбора точек p_1, p_2. Следовательно, $(\mathbb{R}^2, g_1)$ глобально гиперболично. Значит, (N, g_0), изометричное прямому произведению $(\mathbb{R}^2, g_0)$ и (M, g), также глобально гиперболично. Лемма доказана.

Теперь уже несложно получить требуемое свойство. Из леммы 3 следует, что функция времени для метрики g_0 является функцией времени и для g. Следовательно, $(N, \tilde{g})$ является устойчиво причинным, поэтому и сильно причинным. Далее, по лемме 4 если $p, q \in N$, то $J^+(p) \cap J^-(q)$ относительно метрики g_0 компактно. Тем самым множество $J^+(p) \cap J^-(q)$ относительно метрики $\tilde{g}$ имеет компактное замыкание. Из [10, гл. 3] вытекает, что $(N, \tilde{g})$ глобально гиперболично.

Тип 4. Пусть g' — риманова метрика на $M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}$, рассмотренная при доказательстве теоремы 1. Тогда риманово пространство (M, g) изометрично произведению плоского пространства $\mathbb{R}^{n-m}$ и некоторого риманова многообразия $(M^{n_0} \times C_{m_1} \times \ldots \times C_{m_r}, g')$. Рассмотрим следующую «фоновую» метрику на N:

$$g_0 = 2d\eta \left(d\xi - \left(1 + \left| \sum_{k=1}^{n-m} t_k \right| \right) d\eta \right) + \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2 + \frac{1}{2} g'.$$

Лемма 5. *Имеет место соотношение* $\tilde{g} \preceq g_0$.

Доказательство. Возьмем обозначения из доказательства леммы 3. Нетрудно заметить, что $|A(V_2)|^2 \leq C g'(V_2, V_2)$, откуда

$$\tilde{g}(V, V) \geq 2d\eta(d\xi + \varepsilon(f-1)d\eta)(V_1, V_1) + \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2 + (1 - 2C\varepsilon) g'(V_2, V_2) \geq g_0(V, V),$$

если выбрать $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $1 - 2C\varepsilon \geq \frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} |\varepsilon(f-1)| &= \varepsilon \left| h - \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{i=1}^{r} \psi_i^k t_k \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right) - 1 \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{n-m} t_k \right| \left| \varepsilon \sum_{i=1}^{r} \psi_i^k \left(\frac{1}{2m_i} \rho_i g_i' + g_i \right) \right| + \varepsilon |h - 1| \leq \left| \sum_{k=1}^{n-m} t_k \right| + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, любой непространственноподобный (времениподобный) вектор для метрики $\tilde{g}$ будет непространственноподобным (времениподобным) и для g_0. Лемма доказана.

Как и в предыдущем случае, лемма 5 позволяет в качестве ориентирующего во времени для $(N, \tilde{g})$, (N, g_0) (а также и для остальных используемых далее вспомогательных лоренцевых метрик) взять времениподобное поле $\frac{\partial}{\partial \eta}$, являющееся времениподобным для (N, g_0).

Для простоты положим

$$F = F(\xi, \eta, t_1, \ldots, t_k) = \left| \sum_{k=1}^{n-m} t_k \right|$$

и рассмотрим две вспомогательные лоренцевы метрики на $\mathbb{R}^{2+n-m}$:

$$g_1 = 2d\eta(d\xi - (1 + F)d\eta) + \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2,$$

$$g_2 = 2\left(d\eta - \delta d\xi\right)\left(d\xi - (1 + F + (1+F)^2 \delta) d\eta\right) + (1 - \delta) \sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2,$$

где $\delta = \delta(\xi, \eta, t_1, \ldots, t_k)$ — вещественная функция такая, что $0 < \delta < 1$ на $\mathbb{R}^{2+n-m}$.

Лемма 6. *Имеет место соотношение* $g_1 \prec g_2$ *при подходящем выборе функции* δ. *Кроме того,* $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_2)$ *причинно, следовательно,* $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_1)$ *устойчиво причинно.*

Доказательство. Для любого вектора V имеем

$$g_1(V,V) - g_2(V,V)$$
$$= 2\delta\left(d\xi^2 + (1+F)^2 d\eta^2 - (1+F+(1+F)^2\delta)d\xi d\eta + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-m} dt_k^2\right)(V,V) > 0,$$

если функцию δ выбрать таким образом, что $2(1+F(p))\delta(p) < 1$ для всех $p \in \mathbb{R}^{2+n-m}$. Значит, $g_1(V,V) \le 0$ влечет $g_2(V,V) < 0$ для любого ненулевого вектора V и тем самым $g_1 \prec g_2$.

Пусть $\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s), t_1(s), \dots, t_{n-m}(s))$, $0 \le s \le 1$, $\gamma(0) = \gamma(1)$, — замкнутая регулярная непространственноподобная кривая в $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_2)$, направленная в будущее. Тогда

$$\dot\eta - \delta\,(F)\,\dot\xi \ge 0, \tag{5}$$

поскольку времениподобный вектор $(0,1,0,\dots,0)$ определяет часть светового конуса, направленную в будущее. Пусть $\gamma_1(s) = (\xi(s), \eta(s))$ — замкнутая регулярная проекция кривой $\gamma(s)$ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Кривая $\gamma_1(s)$ может иметь самопересечения, но всегда можно рассмотреть замкнутый участок $\gamma_1(s)$ без самопересечения. Далее, на таком замкнутом участке может нарушиться непрерывность функции $\delta(s) = \delta(\gamma(s))$, однако ее можно продеформировать в непрерывную функцию, не изменив экстремальных значений δ на кривой $\gamma(s)$, следующим образом: в окрестности точки разрыва нужно сделать функцию δ меняющейся между левым и правым пределами в точке разрыва. При этом в силу линейности неравенство (5) останется выполненным. Таким образом, считаем, что плоская замкнутая кривая $\gamma_1(s)$ самопересечений не имеет.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ одномерное распределение, заданное вдоль кривой $\gamma_1(s)$:

$$\eta - \delta(s)\xi = 0. \tag{6}$$

Поскольку у нас $\delta < 1$, распределение (6) не может совершить «полный оборот» при обходе по кривой γ_1. Следовательно, распределение (6) может быть продолжено до непрерывного распределения на всей плоскости, которое интегрируемо. Из неравенства (5) следует, что если кривая $\gamma_1(s)$ пересекает трансверсально одну из интегральных линий распределения (6), то она больше его не пересечет — это противоречит замкнутости γ_1. Итак, $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_2)$ не содержит замкнутых непространственноподобных кривых, следовательно, является причинным. Так как $g_1 \prec g_2$, то $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_1)$ устойчиво причинно. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пространство $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_1)$ глобально гиперболично.*

Доказательство. По лемме 6 пространство $(\mathbb{R}^{2+n-2}, g_1)$ устойчиво причинно, а тогда и сильно причинно. Пусть $p_i = (\xi_i, \eta_i, t_{1i}, \dots, t_{(n-m)i}) \in \mathbb{R}^{2+n-m}$, $i = 1, 2$. Предположим, что $p \in J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$. Тогда существует непространственноподобная регулярная кривая

$$\gamma(s) = (\xi(s), \eta(s), t_1(s), \dots, t_{n-m}(s)),$$

идущая из p_1 в p_2 через точку p. Следовательно, касательный вектор γ удовлетворяет неравенствам

$$\dot\eta \ge 0, \quad \dot\xi - (1+F(s))\dot\eta \le 0, \quad |\dot F(s)| \le (n-m)\sqrt{2\dot\eta((1+F(s))\eta - \dot\xi)}, \tag{7}$$

где $F(s) = F(\gamma(s))$. Видим, что координата η не убывает вдоль кривой γ. Пусть γ_1 — проекция кривой γ на плоскость $\mathbb{R}^2$. Перепараметризуем кривую γ_1 таким образом, чтобы параметр s был натуральным относительно стандартной евклидовой метрики на $\mathbb{R}^2$.

Далее, так как кривая γ гладкая вплоть до концевых точек, существует конечное число замкнутых промежутков, разбивающих область определения кривой γ, таких, что в каждом промежутке либо $(1+F)\dot\eta+\dot\xi \le 0$, либо $(1+F)\dot\eta+\dot\xi \ge 0$. Рассмотрим сначала произвольный участок, на котором $(1+F)\dot\eta+\dot\xi \le 0$. Тогда $\dot\xi < 0$ и на рассмотренном участке кривой можно в качестве параметра рассмотреть переменную ξ, $\xi_1' \le \xi \le \xi_2'$. Нетрудно подсчитать максимальный наклон по отношению к плоскости $\mathbb{R}^2$ среди тех образующих светового конуса метрики g_1, проекции которых на $\mathbb{R}^2$ удовлетворяют неравенству $(1+F)\dot\eta+\dot\xi \le 0$. Учитывая, что параметр s натуральный для γ_1, получаем

$$|\dot F(s)| \le \sqrt{2}(n-m)\frac{\sqrt{2F+2}}{\sqrt{(1+F)^2+1}}.$$

Значит, на рассматриваемом участке кривой γ имеет место неравенство

$$\left|\frac{dF}{d\xi}\right| \le \sqrt{2}\left|\frac{dF}{ds}\right| \le 2(n-m)\frac{\sqrt{2F+2}}{\sqrt{(1+F)^2+1}}.$$

Интегрируя, получаем

$$F(\xi) \le g(\xi)$$

для некоторой функции $g(\xi) \sim |\xi|^{\frac{2}{3}}$ (с точностью до умножения на константу и добавления членов меньшего порядка роста при $|\xi| \to \infty$). Теперь рассмотрим метрику на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$g_3 = 2d\eta(d\xi - g(\xi)d\eta).$$

Из последнего неравенства следует, что кривая γ_1 на рассматриваемом участке является непространственноподобной относительно метрики g_3. Однако непосредственным интегрированием уравнения световых линий метрики g_3 можно убедиться, что имеются два вида таких линий: $\eta = \mathrm{const}$ и линии, имеющие асимптотику $\xi \sim \eta^3$. Но это означает, что кривая γ_1 не может покинуть некоторой ограниченной области $K \subset \mathbb{R}^2$, зависящей только от начальной пары точек p_1 и p_2.

Теперь рассмотрим один из участков кривой γ, на котором $(1+F)\dot\eta+\dot\xi \ge 0$. Здесь рассмотрим в качестве параметра переменную η. Преобразуем последнее из неравенств (6):

$$\left|\frac{dF}{d\eta}\right| \le (n-m)\sqrt{2\left((1+F(\xi)) - \frac{d\xi}{d\eta}\right)} \le 2(n-m)\sqrt{1+F}.$$

Интегрируя, получим

$$|F(\eta)| \le g(\eta)$$

для некоторой функции $g(\eta) \sim \eta^2$ при $\eta \to \infty$. Как и в предыдущем случае, проекция γ_1 будет непространственноподобной относительно метрики

$$g_3 = 2d\eta\,(d\xi - g(\eta)d\eta)$$

на $\mathbb{R}^2$. Интегрируя, получим световые линии с асимптотикой $\eta = \mathrm{const}$ и $\xi \sim \eta^3$, что опять означает невозможность для кривой γ_1 покинуть некоторую ограниченную область.

Итак, вся кривая γ_1 не может покинуть некоторую ограниченную область K, кроме того, из последних неравенств следует, что F ограничено вдоль γ некоторой константой, зависящей только от p_1, p_2. Значит, p принадлежит некоторой ограниченной области в R^{2+n-m}, зависящей только от p_1, p_2. Мы получили, что замыкание множества $J^+(p_1) \cap J^-(p_2)$ компактно в сильно причинном пространстве, следовательно, пространство глобально гиперболично. Лемма доказана.

Теперь уже несложно закончить доказательство теоремы 2. Пространство (N, g_0) изометрично прямому произведению глобально гиперболического пространства $(\mathbb{R}^{2+n-m}, g_1)$ и полного риманова пространства $\big(M^{n_0} \times C_{m_1} \times \dots C_{m_r}, \frac{1}{2}g'\big)$, поэтому тоже глобально гиперболично [10, гл. 2]. Из лемм 5, 6 следует, что $(N, \tilde{g})$ устойчиво причинно, а значит, сильно причинно. Кроме того, замыкание пересечения причинных будущего и прошлого пространства $(N, \tilde{g})$ содержится в соответствующем пересечении (N, g_0), тем самым компактно. Из [10, гл. 3] вытекает, что $(N, \tilde{g})$ глобально гиперболично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *De Rham G.* Sur la reductibilité d'un espace de Riemann // Comment. Math. Helv. 1952. V. 26, N 1. P. 328–344.
2. *Joyce D.* Compact manifolds with special holonomy. Oxford: Oxford Sci. Publ., 2000.
3. *Wu H.* On the de Rham decomposition theorem // Illinois J. Math. 1964. V. 8, N 2. P. 291–311.
4. *Berger M.* Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variètès Riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. 1955. V. 83, N 4. P. 279–330.
5. *Bryant R.* Classical, exceptional and exotic holonomies: A status report // Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger. Collection SMF Séminaires and congrès 1 (Soc. Math. France). Paris, 1996. P. 93–166.
6. *Berard-Bergery L., Ikemakhen A.* On the holonomy of Lorentzian manifolds // Differential geometry: Geometry in mathematical physics and related topics. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. V. 54. P. 27–40.
7. *Leistner T.* On the classification of Lorentzian holonomy groups. J. Differential Geometry. 2007. V. 76, N 3. P. 423–484.
8. *Galaev A.* Metrics that realize all types of Lorentzian holonomy algebras. arXiv:mathDG/0502575. 2005.
9. *Baum H., Muller O.* Codazzi spinors and globally hyperbolic Lorentzian manifolds with special holonomy. I. Preprint ESI 1757. 2005.
10. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.
11. *Ambrose W., Singer I. M.* A theorem on holonomy // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 75, N 3. P. 428–443.
12. *Page D. N., Pope C. N.* Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. 213–225.
13. *Calabi E.* Metriques kahleriennes et fibres holomorphes // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. IV Ser. 1979. V. 12, N 2. P. 269–294.
14. *Eguchi T., Hanson A. J.* Asymptotically flat self-dual solutions to Euclidean gravity // Phys. Lett. 1978. V. 748, N 4. P. 249–251.

Статья поступила 16 марта 2009 г.

Базайкин Ярослав Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
bazaikin@math.nsc.ru