Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.944+519.46

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СИММЕТРИЧНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, НЕЛИНЕЙНЫХ ПО ФУНКЦИИ

Ю. А. Чиркунов

Аннотация. Установлено, что если система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами допускает оператор, координаты которого, отвечающие за преобразование независимых переменных, зависят от функций, то она допускает оператор, координаты которого, отвечающие за преобразование функций, нелинейно зависят от функций.

Ключевые слова: система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, преобразование эквивалентности, $\mathbf{x}$-автономный оператор, $\mathbf{u}$-нелинейный оператор, $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-пара, исключительная система, каноническая система.

Введение. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{u}_t = A^i \mathbf{u}_{x^i}, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)^T \in C^n$, $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)^T \in C^m$, $t \in C$, $n \geq 1$, $m \geq 2$, $A^i = \left\| a_k^{ji} \right\|$ $(i = 1, \dots, n)$ — любые постоянные комплексные матрицы такие, что матрицы E, $A^1, \dots, A^n$ линейно независимы (E — единичная матрица). Здесь и далее происходит суммирование по повторяющемуся индексу.

Оператор, допускаемый системой (1), ищется в виде

$$\xi^0(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_t + \xi^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_{x^i} + \eta^k(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\partial_{u^k}. \tag{2}$$

Оператор (2) называется $\mathbf{x}$-*автономным* [1], если его координаты ξ^0, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)^T$ удовлетворяют условиям $\xi^0_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, $\xi_u = 0$, в противном случае оператор (2) будет называться не $\mathbf{x}$-*автономным.* Если $\eta_{\mathbf{uu}} \neq 0$, то оператор (2) будет называться $\mathbf{u}$-*нелинейным.*

В работе [1] получены необходимые условия не $\mathbf{x}$-автономности основной алгебры Ли для квазилинейной системы первого порядка и, в частности, поставлена задача описания свойств систем дифференциальных уравнений, допускающих не $\mathbf{x}$-автономный оператор. В настоящей работе получены другие необходимые условия не $\mathbf{x}$-автономности основной алгебры Ли такой системы, более точные, чем в работе [1], что позволило исследовать для линейной системы (1) характер зависимости от функций координат допускаемого оператора,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00489).

отвечающих за преобразование функций, а именно показано, что если система (1) допускает не **x**-автономный оператор, то она допускает **u**-нелинейный оператор.

Преобразования эквивалентности, сохраняющие дифференциальную структуру системы (1), состоят из невырожденной линейной замены независимых переменных: $t' = \alpha t$, $\mathbf{x}' = \Phi\mathbf{x} + \beta t$, и невырожденной линейной замены функций: $\mathbf{u} = \Psi\mathbf{u}'$, где $\Phi = \left\|\Phi^i_j\right\|$, $\Psi = \left\|\Psi^k_\tau\right\|$ — произвольные постоянные невырожденные матрицы; $\Phi^i_j, \Psi^k_\tau \in C$; $\alpha \in C$ — произвольная ненулевая постоянная; $\boldsymbol{\beta} = (\beta^1, \ldots, \beta^n)^T \in C^n$ — произвольный постоянный вектор. При этом матрицы системы (1) преобразуются соответственно по формулам

$$A'^i = \frac{1}{\alpha}\bigl(\Phi^i_j A^j - \beta^i E\bigr) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

$$A'^i = \Psi^{-1} A^i \Psi \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Условия инвариантности многообразия (1) относительно оператора (2) приводят к системе определяющих уравнений, которая распадается на три группы уравнений:

$$\begin{gathered}\bigl(a^{\sigma j}_k a^{\tau i}_l + a^{\sigma i}_l a^{\tau j}_k\bigr)\xi^0_{u^\tau} + \delta^\sigma_k a^{\tau i}_l \xi^j_{u^\tau} + \delta^\sigma_l a^{\tau j}_k \xi^i_{u^\tau} \\ = a^{\sigma i}_\tau a^{\tau j}_k \xi^0_{u^l} + a^{\sigma j}_\tau a^{\tau i}_k \xi^0_{u^k} + a^{\sigma i}_k \xi^j_{u^l} + a^{\sigma j}_l \xi^i_{u^k} \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ \sigma, k, l = 1, \ldots, m);\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}a^{\tau i}_k \eta^\sigma_{u^\tau} - a^{\sigma i}_k \xi^0_{x^0} - \delta^\sigma_k \xi^i_{x^0} = a^{\sigma i}_\tau \eta^\tau_{u^k} - a^{\sigma p}_\tau a^{\tau i}_k \xi^0_{x^p} - a^{\sigma p}_k \xi^i_{x^p} \\ (i = 1, \ldots, n;\ \sigma, k = 1, \ldots, m;\ x^0 = t);\end{gathered} \tag{6}$$

$$\eta^\sigma_{x^0} = A^i \eta^\sigma_{x^i} \quad (\sigma = 1, \ldots, m). \tag{7}$$

1. Основная теорема. Справедлива следующая основная

Теорема 1. *Система* (1), *допускающая не* **x***-автономный оператор, допускает* **u***-нелинейный оператор.*

Доказательство. Для выделения нетривиальных систем (1), допускающих не **x**-автономный оператор, вводится понятие исключительной (тривиальной) системы, а именно системы (1), эквивалентной системе

$$u^k_t = u^1_{x^k} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Из определяющих уравнений (5)–(7) следует, что система (8) допускает бесконечную группу Ли преобразований, порождаемую операторами (2), координаты которых определяются по формулам

$$\xi^0 = -\varphi_{u^1} - \alpha(\mathbf{x}), \quad \xi^1 = \alpha(\mathbf{x}), \quad \xi^k = \psi^k(x^2, \ldots, x^n),$$

$$\eta^1 = \varphi_y + cu^1, \quad \eta^k = \varphi_{x^k} + cu^k - \sum_{i=2}^{n} u^i \psi^i_{x^k} + \theta^k(\mathbf{x}),$$

где $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(x^1, \ldots, x^n)$, $\varphi = \varphi(y, x^2, \ldots, x^n, u^1)$, $\psi^k = \psi^k(x^2, \ldots, x^n)$, $\theta^k(\mathbf{x}) = \theta^k(x^1, \ldots, x^n)$ — произвольные функции своих аргументов; c — произвольная постоянная; $y = t + x^1$, $k = 2, \ldots, n$. Тем самым для исключительной системы утверждение теоремы установлено.

Для описания неисключительных систем (1), допускающих не **x**-автономный оператор, понадобится понятие $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-пары, а именно вектор-столбец $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$

и вектор-строка $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ будут называться $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-*парой множества квадратных матриц* m-го порядка $\{A^1, \ldots, A^n\}$, если для каждой матрицы A^k $(k = 1, \ldots, n)$ справедливы соотношения $A^k\mathbf{r} = \lambda(A^k)\mathbf{r}$, $\mathbf{l}A^k = \lambda(A^k)\mathbf{l}$, где $\lambda(A^k) \in C$ — собственное значение матрицы A^k. При этом матрицы $\{A^1, \ldots, A^n\}$ будут называться *обладающими* $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-*парой*.

Множество матриц $\{A^1, \ldots, A^n\}$ обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой тогда и только тогда, когда существует матрица ранга 1, коммутирующая с каждой матрицей A^k $(k = 1, \ldots, n)$. В самом деле, если множество матриц $\{A^1, \ldots, A^k\}$ обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой, то $B = \mathbf{r} \otimes \mathbf{l}$ — искомая матрица ранга 1, коммутирующая с каждой матрицей этого множества. Обратно, если $B = \mathbf{r} \otimes \mathbf{l}$ — матрица ранга 1, коммутирующая с каждой матрицей A^k $(k = 1, \ldots, n)$, то вектор-столбец $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ и вектор-строка $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$ являются $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой множества матриц $\{A^1, \ldots, A^n\}$.

Если множество матриц $\{A^1, \ldots, A^n\}$ обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой, то множество матриц $\{A'^1, \ldots, A'^n\}$, полученных в результате преобразований эквивалентности (3) или (4), обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой или $(\Psi^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{l}\Psi)$-парой соответственно.

Дальнейшее доказательство основано на следующем утверждении.

Теорема 2. *Множество матриц неисключительной системы* (1), *допускающей не* $\mathbf{x}$-*автономный оператор, обладает* $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-*парой. Множество матриц исключительной системы не обладает ни одной* $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-*парой.*

Доказательство этой теоремы будет приведено ниже.

Теорема 2 справедлива и для квазилинейной системы $\mathbf{u}_t = A^i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\mathbf{u}_{x^i} + \mathbf{b}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ и дает более точные, чем в работе [1], необходимые условия не $\mathbf{x}$-автономности основной алгебры Ли этой системы.

Если множество матриц $\{A^1, \ldots, A^n\}$ системы (1) обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой, то, как следует из определяющих уравнений (5)–(7), система (1) допускает $\mathbf{u}$-нелинейный оператор частного вида $\boldsymbol{\eta} \cdot \partial_{\mathbf{u}}$, где $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{u})$ — решение совместной системы уравнений $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{u}} = H(\mathbf{l} \cdot \mathbf{u})\mathbf{r} \otimes \mathbf{l}$ с произвольной скалярной функцией H, удовлетворяющей условию $H' \neq 0$. Справедливость основной теоремы установлена. Для завершения доказательства осталось доказать теорему 2.

2. Вспомогательные утверждения. Уравнения (5) составляют алгебраическую систему линейных уравнений относительно $\xi^0_k = \xi^0_{u^k}$, $\xi^i_k = \xi^i_{u^k}$ $(k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$, которая допускает преобразования эквивалентности, задаваемые формулами (3), (4).

Лемма 1. *Система* (1) *допускает не* $\mathbf{x}$-*автономный оператор* (2) *тогда и только тогда, когда соответствующая ей алгебраическая система* (5) *имеет ненулевое решение.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из того, что если алгебраическая система (5) имеет ненулевое решение $\left\{\xi^0_k, \xi^i_k\right\}$, то система (1) допускает оператор $\xi^0_k u^k \partial_t + \xi^i_k u^k \partial_{x^i}$.

Алгебраическая система (5) имеет следующую структуру: 1) при $i = j$ в уравнения (5) входят элементы только одной матрицы A^i системы (1); 2) при $i \neq j$ в уравнения (5) входят элементы только двух матриц A^i и A^j системы (1). Таким образом, алгебраическая система (5) является при $n \geq 2$ объединением алгебраических систем (5) для всевозможных одномерных $\mathbf{u}_t = A^i\mathbf{u}_{x^i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и двумерных $\mathbf{u}_t = A^i\mathbf{u}_{x^i} + A^j\mathbf{u}_{x^j}$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$ систем дифференциальных уравнений вида (1).

Лемма 2. *Алгебраическая система* (5) *при* $n = 1$ *имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда матрица* A^1 *удовлетворяет квадратному уравнению.*

Если $(A^1)^2 + \alpha_1 A^1 + \alpha_0 E = 0$, *то общее решение алгебраической системы* (5) *определяется по формуле*

$$\xi^1_{\mathbf{u}} = \xi^0_{\mathbf{u}}(A^1 + \alpha_1 E). \tag{9}$$

Доказательство. Необходимость установлена в работе [1]. Если матрица A^1 удовлетворяет квадратному уравнению, то в силу преобразований эквивалентности (3), (4) можно считать, что либо $(A^1)^2 = 0$, либо $(A^1)^2 = \alpha A^1$ $(\alpha \neq 0)$. В обоих случаях непосредственные вычисления показывают, что общее решение алгебраической системы (5) задается формулой (9). Общий случай сводится к этим двум сдвигом на скалярную матрицу.

Следствием лемм 1, 2 является

Предложение 1. *Если система* (1) *допускает не* $\mathbf{x}$-*автономный оператор* (2), *то для каждого* $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ *характеристическая матрица* $A(\mathbf{z}) = A^i z_i$ *системы* (1) *удовлетворяет квадратному уравнению.*

Пусть для любого $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ характеристическая матрица системы (1) удовлетворяет квадратному уравнению $A^2 + 2b(\mathbf{z})A + c(\mathbf{z})E = 0$ с дискриминантом $\Delta(\mathbf{z}) = b^2(\mathbf{z}) - c(\mathbf{z})$. Система (1), для которой $\Delta(\mathbf{z}) = 0$ при всех $\mathbf{z} \in C^n$, будет называться *системой типа* 1. Система (1), для которой найдутся $\mathbf{z} \in C^n$ такие, что $\Delta(\mathbf{z}) \neq 0$, будет называться *системой типа* 2.

Тип системы (1) инвариантен относительно преобразований эквивалентности (3), (4).

Система типа 1 в результате преобразований эквивалентности (3) приводится к системе (1), матрицы которой удовлетворяют соотношениям

$$A^i A^j + A^j A^i = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Такая система будет называться *канонической системой типа* 1.

Система типа 2, допускающая не $\mathbf{x}$-автономный оператор, в результате преобразований эквивалентности (3) приводится к системе (1), матрицы которой удовлетворяют соотношениям

$$A^1 = P, \quad P^2 = P, \quad A^i P + P A^i = A^i, \quad A^i A^j + A^j A^i = 0 \quad (i, j = 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Такая система будет называться *канонической системой типа* 2. Исключительная система (8) является канонической системой типа 2.

Лемма 3. *Если система* (1) *допускает не* $\mathbf{x}$-*автономный оператор, то матрицы* $A^1, \ldots, A^n$ *этой системы имеют общий левый и общий правый собственные векторы.*

Доказательство. Система (1) преобразованием эквивалентности (3) приводится к канонической системе типа 1 или типа 2. Ввиду линейности преобразований (3) это означает, что каждая матрица A^i $(i = 1, \ldots, n)$ является линейной комбинацией единичной матрицы и канонических матриц, удовлетворяющих условиям (10) или (11) в зависимости от типа системы. Поэтому достаточно доказать утверждение для канонических систем.

Для канонических систем обоих типов матрицы $A^1, A^2, \ldots, A^n$ попарно антикоммутативны, а матрицы $A^2, \ldots, A^n$ нильпотентны. Методом математической индукции аналогично тому, как это делается для попарно перестановочных матриц [2], устанавливается, что матрицы $A^1, A^2, \ldots, A^n$ имеют общий левый и общий правый собственные векторы.

В дальнейшем понадобится следующая алгебраическая

Лемма 4. *Система линейных уравнений*

$$a^i_k y_j = a^i_j y_k \quad (i = 1, \dots, p;\ k = 1, \dots, q)$$

с матрицей $A = \left\| a^i_k \right\|$ *имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang}(A) \le 1$. *Если* $\operatorname{rang}(A) = 1$, *то решение одномерно и порождается ненулевой строкой матрицы* A.

3. Доказательство теоремы 2. Для системы (1) типа 1 справедливость утверждения теоремы 2 сразу следует из леммы 3.

Система (1) типа 2 преобразованием эквивалентности (3) приводится к каноническому виду. Ввиду линейности этого преобразования достаточно доказать существование $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-пары для канонической системы типа 2, не совпадающей с исключительной канонической системой (8).

Для канонической системы типа 2 рассматриваются следующие матрицы: 1) $Q = E - P$; 2) матрица S — строка из матриц $A^2, \dots, A^n$; 3) матрица T — столбец из матриц $A^2, \dots, A^n$; 4) матрица M — столбец из матриц $TA^2, \dots, TA^n$. С помощью этих матриц система (5) для канонической системы типа 2 в силу лемм 1, 2 и формулы (9) записывается в виде

$$\begin{gathered} \xi^0_{\mathbf{u}} = \alpha + \beta, \quad \boldsymbol{\alpha} = \xi^0_{\mathbf{u}} P \in \operatorname{Im} P, \quad \boldsymbol{\beta} = \xi^0_{\mathbf{u}} Q \in \operatorname{Im} Q, \quad \xi^i_{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \\ \xi^0_{\mathbf{u}} S = \mathbf{0}, \quad (M)^\sigma_k \xi^0_l = (M)^\sigma_l \xi^0_k, \quad \boldsymbol{\alpha} S = \mathbf{0}, \quad (TP)^\sigma_k \alpha_l = (TP)^\sigma_l \alpha_k, \\ \boldsymbol{\beta} S = \mathbf{0}, \quad (TQ)^\sigma_k \beta_l = (TQ)^\sigma_l \beta_k \quad (i, j = 2, \dots, n;\ \sigma, k, l = 1, \dots, m). \end{gathered} \tag{12}$$

Если система (1) допускает не $\mathbf{x}$-автономный оператор (2), то применение леммы 4 к уравнениям (12) дает следующие соотношения:

$$\{\operatorname{rang}(M) \le 1\} \quad \text{и} \quad \{\operatorname{rang}(TP) \le 1 \text{ или } \operatorname{rang}(TQ) \le 1\}. \tag{13}$$

Утверждение теоремы 2 для канонической системы типа 2 равносильно ненулевой разрешимости каждого уравнения хотя бы одной пары уравнений:

$$\mathbf{l} S = \mathbf{0}, \quad \mathbf{l} \in \operatorname{Im} P_l; \quad T\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \operatorname{Im} P_l \tag{14}$$

либо

$$\mathbf{l} S = \mathbf{0}, \quad \mathbf{l} \in \operatorname{Im} Q_l; \quad T\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \operatorname{Im} Q_r. \tag{15}$$

Действие линейных операторов P_l, P_r, Q_l, Q_r определяется для любой строки $\mathbf{l}$ и любого столбца $\mathbf{r}$ по формулам $P_l\langle\mathbf{l}\rangle = \mathbf{l}P$, $Q_l = I - P_l$, $P_r\langle\mathbf{r}\rangle = P\mathbf{r}$, $Q_r = I - P$ (I — тождественный оператор).

1. Пусть $M = 0$. В этом случае справедливы равенства

$$TPS = TQS = 0. \tag{16}$$

Множество матриц P; Q; $A^2, \dots, A^n$, удовлетворяющих условиям (13), состоит из объединения следующих множеств: 1) $\operatorname{rang}(TP) = 1$; 2) $TP = 0$ и $\operatorname{rang}(S) < \operatorname{rang}(P)$; 3) $\operatorname{rang}(TQ) = 1$; 4) $TQ = 0$ и $\operatorname{rang}(S) < \operatorname{rang}(Q)$. Ввиду симметричности достаточно ограничиться только первым и вторым случаями.

1.1. Пусть $\operatorname{rang}(TP) = 1$. Тогда $\operatorname{rang}(P) \ge 1$.

Если $\operatorname{rang}(P) > 1$, то в качестве $\mathbf{l}$ можно взять ненулевую строку матрицы TP. Тогда $\mathbf{l} \in \operatorname{Im} P_l$ и первое уравнение в (14) выполнено тождественно. Второе уравнение в (14) тоже имеет ненулевое решение, так как $\operatorname{rang}(T|_{\operatorname{Im} P_l}) = \operatorname{rang}(TP) = 1 < \operatorname{rang}(P)$. Если $\operatorname{rang}(P) = 1$, то второе уравнение в (14) имеет только нулевое решение. Поэтому надо решать уравнения (15). Пусть $\mathbf{r}$ —

ненулевой столбец матрицы QS. Тогда $\mathbf{r} \in \operatorname{Im} Q_r$ и в силу (16) $\mathbf{r}$ удовлетворяет второму уравнению в (15). Если $TQ \neq 0$, то в качестве $\mathbf{l}$ можно взять ненулевую строку матрицы TQ. Тогда $\mathbf{l} \in \operatorname{Im} Q_l$ и в силу (16) первое уравнение в (15) обращается в тождество. Если $TQ = 0$, то $QS = S$. Поэтому $\operatorname{rang}(S|_{\operatorname{Im} Q_l}) = \operatorname{rang}(QS) = \operatorname{rang}(S)$. Следовательно, первое уравнение в (15) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\operatorname{rang}(S) < \operatorname{rang}(Q) = m - 1. \tag{17}$$

Преобразованием эквивалентности (4) идемпотентная матрица приводится к каноническому виду:

$$P = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O. \tag{18}$$

Система (1) при этом остается канонической системой типа 2. Так как $PS = 0$, первая строка матрицы S нулевая. Поэтому $\operatorname{rang}(S) \leq m - 1$. Из равенства $TP = T$ следует, что все столбцы матрицы T, кроме первого, нулевые. Ввиду линейной независимости матриц $A^2, \ldots, A^n$ их первые столбцы тоже линейно независимы. Поэтому $\operatorname{rang}(S) = n - 1$. Следовательно, $\operatorname{rang}(S) = n - 1 \leq m - 1$.

Таким образом, условие (17) не выполняется только при $n = m$. Из (18) следует, что рассматриваемая каноническая система (1) при $n = m$ есть не что иное, как исключительная каноническая система. Для нее ни одна из пар уравнений (14) или (15) не имеет ненулевого решения: $\mathbf{l} \neq 0$ и $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$. Поэтому семейство матриц исключительной системы не обладает $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$-парой. Для всех остальных канонических систем типа 2, удовлетворяющих указанным выше условиям, первое уравнение в (15) тоже имеет ненулевое решение.

1.2. Пусть $TP = 0$ и $\operatorname{rang}(S) < \operatorname{rang}(P)$. Достаточно взять в качестве $\mathbf{r}$ ненулевой столбец из $\operatorname{Im} P_r$. Тогда второе уравнение в (14) выполнено тождественно. Так как $\operatorname{rang}(S|_{\operatorname{Im} P_l}) \leq \operatorname{rang}(S) < \operatorname{rang}(P)$, первое уравнение в (14) тоже имеет ненулевое решение.

2. Пусть $\operatorname{rang}(M) = 1$. Ввиду уравнений (12) и леммы 4 можно считать, что $\xi^0_{\mathbf{u}}$ — ненулевая строка матрицы M. Так как $M = MP + MQ$ и $(MP)Q = (MQ)P = 0$, то α и $\boldsymbol{\beta}$ — компоненты разложения $\xi^0_{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{\alpha} \in \operatorname{Im} P$, $\boldsymbol{\beta} \in \operatorname{Im} Q$) — являются строками матриц MP и MQ соответственно.

Если $MP \neq 0$, то $\boldsymbol{\alpha} = \xi^0_{\mathbf{u}} P \neq \mathbf{0}$. В силу леммы 4 $\operatorname{rang}(TP) \leq 1$. Поскольку соотношение $MP \neq 0$ влечет за собой соотношение $TP \neq 0$, то $\operatorname{rang}(TP) = 1$.

Если $MQ \neq 0$, то аналогично (заменой P на Q, $\boldsymbol{\alpha}$ на $\boldsymbol{\beta}$) устанавливается, что $\operatorname{rang}(TQ) = 1$.

Имеют место равенства

$$MPS = MQS = 0. \tag{19}$$

Поскольку $M \neq 0$, то хотя бы одна из матриц MP или MQ отлична от нулевой. Не ограничивая общности, можно считать, что $MP \neq 0$. Тогда $\operatorname{rang}(TP) = 1$ и $\operatorname{rang}(P) \geq 1$.

2.1. Если $\operatorname{rang}(P) > 1$, то в качестве $\mathbf{l}$ можно взять ненулевую строку матрицы MP. Тогда $\mathbf{l} \in \operatorname{Im} P_l$ и $\mathbf{l}$ удовлетворяет первому уравнению в (14). Второе уравнение в (14) тоже имеет ненулевое решение, так как

$$\operatorname{rang}(T|_{\operatorname{Im} P_l}) = \operatorname{rang}(TP) = 1 < \operatorname{rang}(P).$$

2.2. Если $\operatorname{rang}(P) = 1$, то второе уравнение в (14) имеет только нулевое решение. Поэтому нужно рассматривать уравнения (15).

Сначала доказывается вспомогательное утверждение.

Лемма 5. *Если выполнены следующие условия:*

$$\mathrm{rang}(M) = \mathrm{rang}(TP) = \mathrm{rang}(P) = 1,$$

то $\mathrm{rang}(Q) = m - 1 > 1$.

Доказательство. Из условий $\mathrm{rang}(TP) = \mathrm{rang}(P) = 1$ следует, что $\mathrm{rang}(Q) = m - 1 \geq 1$.

Осталось доказать, что $m - 1 \neq 1$. Докажем от противного: пусть $m = 2$. Матрица P преобразованием эквивалентности (4) приводится к каноническому виду:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы E, P, $A^2, \dots, A^n$ канонической системы (1) типа 2 линейно не зависимы, поэтому $n = 3$. Матрицы A^2, A^3 удовлетворяют соотношениям

$$PA^i = A^iQ, \quad A^iA^j + A^jA^i = 0 \quad (i, j = 2, 3). \tag{20}$$

Система матричных уравнений

$$XPX = 0, \quad X^2 = 0$$

имеет два линейно независимых решения:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Поскольку $X_1X_2 + X_2X_1 = E$, последнее уравнение в системе (20) не выполняется. Таким образом, при $m = 2$ не существует канонической системы (1) типа 2, удовлетворяющей условиям леммы. Следовательно, $m > 2$. Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что оба уравнения в (15) имеют ненулевое решение.

Если $MQ \neq 0$, то $\mathrm{rang}(TQ) = 1$. Пусть $\mathbf{l}$ — ненулевая строка матрицы MQ. Тогда $\mathbf{l} \in \mathrm{Im}\, Q_l$ и в силу (19) $\mathbf{l}$ является решением первого уравнения в (15). Поскольку в силу леммы 5 $\mathrm{rang}(Q) > 1$, то $\mathrm{rang}(T|_{\mathrm{Im}\, Q_r}) = \mathrm{rang}(TQ) = 1 < \mathrm{rang}(Q)$. Следовательно, второе уравнение в (15) имеет ненулевое решение.

Осталось доказать, что $MQ \neq 0$. Докажем от противного: пусть $MQ = 0$, т. е.

$$T(A^iQ) = 0 \quad (i = 2, \dots, n). \tag{21}$$

Так как $A^iQ = PA^i$, столбцы матрицы A^iQ принадлежат пространству $\mathrm{Im}\, P_r$ для всех $i = 2, \dots, n$. Поскольку $\mathrm{rang}(T|_{\mathrm{Im}\, P_r}) = \mathrm{rang}(TP) = 1 = \mathrm{rang}(P)$, уравнения (21) имеют только нулевое решение: $A^iQ = 0$ $(i = 2, \dots, n)$. Отсюда следует, что $A^i = QA^i$ $(i = 2, \dots, n)$. Поэтому $TA^i = (TQ)A^i = 0$ $(i = 2, \dots, n)$, т. е. $M = 0$, что противоречит условию: $\mathrm{rang}(M) = 1$. Значит, $MQ \neq 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* О свойстве x-автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 5. С. 559–561.

2. *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 15 ноября 2008 г.

Чиркунов Юрий Александрович
Новосибирский гос. университет экономики и управления,
ул. Каменская, 56, Новосибирск 630099
chr01@rambler.ru