Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.542

НОВАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ГРУППЫ $S_4(q)$ С ПОМОЩЬЮ ГРАФА НЕКОММУТАТИВНОСТИ

Л. Чжан, У. Ши

Аннотация. Пусть G — неабелева группа. Сопоставим группе G граф некоммутативности $\nabla(G)$ следующим образом: множеством вершин графа $\nabla(G)$ является $G\backslash Z(G)$ и две вершины x и y соединены ребром, только если коммутатор элементов x и y не равен единице. Пусть $S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где q — степень простого числа. Доказано, что если G — группа со свойством $\nabla(G) \cong \nabla(S_4(q))$, то $G \cong S_4(q)$.

Ключевые слова: граф некоммутативности, конечная группа, цетрализатор.

1. Введение

Известно, что существует тесная взаимосвязь между теорией групп и теорией графов и во многих случаях свойства графов отображают некоторые свойства групп и наоборот. Например, Грюнберг и Кегель ввели *граф простых чисел* $\Gamma(G)$, ассоциированный с конечной группой G (см. [1]), а Абе и Ийори в [2] определили понятие *разрешимого графа* $\Gamma_S(G)$ конечной группы G.

Одним из графов, привлекших внимание многих исследователей, является *граф некоммутативности* $\nabla(G)$, ассоциированный с конечной группой G. Он определяется следующим образом: множество вершин графа $\nabla(G)$ — это $G\backslash Z(G)$ и две вершины x и y соединены ребром, только если коммутатор элементов x и y не равен единице (см. [3, 4]).

Для удобства также определим его дополнительный граф $\Delta(G)$: множество вершин графа $\Delta(G)$ — это $G\backslash Z(G)$ и две вершины x и y соединены ребром, только если коммутатор элементов x и y равен единице. Перед формулировкой основных результатов мы введем необходимые обозначения и определения.

Если X — граф, обозначим множества его вершин и ребер через $V(X)$ и $E(X)$ соответственно. *Степень* $d(g)$ вершины g в графе X — это число ребер, инцидентных g. *Окрестность вершины* g, обозначаемая через $N(g)$, — это множество вершин, смежных с g. Два графа X и Y называются *изоморфными*, если существует биективное отображение ϕ: $V(X) \mapsto V(Y)$ такое, что x и y смежны в X тогда и только тогда, когда $\phi(x)$ и $\phi(y)$ смежны в Y. Тот факт, что два графа X и Y изоморфны, обозначается через $X \cong Y$.

Если G — группа, то через $\pi_e(G)$ обозначается множество порядков ее элементов и через $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка $|G|$. Множество

This project is supported by the NNSF of China (No. 10871032), the SRFDP of China (No. 20060285002) and a subproject of the NNSF of China (Chongqing University, No. 0208002605029).

$\pi_e(G)$ замкнуто и частично упорядочено по отношению делимости. Следовательно, оно однозначно определятся по $\mu(G)$, подмножеству элементов, максимальных относительно делимости. Свяжем с $\pi_e(G)$ обычный граф, который называется *графом простых чисел* группы G и обозначается через $\Gamma(G)$. Множеством вершин графа $\Gamma(G)$ является $\pi(G)$, и две различные вершины p, q соединены ребром, если $pq \in \pi_e(G)$. В этом случае пишем $p \sim q$. Обозначим через $t(G)$ число связных компонент графа $\Gamma(G)$ и через $\pi_i = \pi_i(G)$ $(i = 1, 2, \dots, t(G))$ — сами связные компоненты графа $\Gamma(G)$. Если $|G|$ четен, то считается, что $2 \in \pi_1(G)$. Для натурального числа n обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых делителей числа n. Тогда $|G|$ можно представить в виде произведения чисел $m_1, m_2, \dots, m_{t(G)}$, где m_i — положительные целые со свойством $\pi(m_i) = \pi_i$. Эти числа m_i называются *порядковыми компонентами* группы G. Определим $OC(G) = \{m_1, m_2, \dots, m_{t(G)}\}$ как множество порядковых компонент группы G и $T(G) = \{\pi_i(G) \mid i = 1, 2, \dots, t(G)\}$ как множество компонент графа простых чисел группы G.

Пусть $S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где q — степень простого числа. В настоящей статье доказано, что если G — группа со свойством $\nabla(G) \cong \nabla(S_4(q))$, то $G \cong S_4(q)$.

Все неоговоренные обозначения, встречающиеся в дальнейшем, стандартны (см. [4, 5]).

2. Предварительные сведения и леммы

В этом пункте перечислены некоторые основные и хорошо известные результаты, использующиеся далее.

Лемма 2.1 [6, теорема 1]. *Пусть G — группа Фробениуса четного порядка, H и K — ее фробениусово ядро и фробениусово дополнение соответственно. Тогда $t(G) = 2$ и $T(G)= \{\pi(K), \pi(H)\}$.*

Лемма 2.2 [5, лемма 8]. *Пусть G — конечная группа со свойством $t(G) \geq 2$ и $N \trianglelefteq G$. Если N — π_i-группа для некоторой компоненты π_i графа простых чисел группы G, а $m_1, m_2, \dots, m_r$ — некоторые порядковые компоненты группы G, не являющиеся π_i-числами, то $m_1 m_2 \dots m_r \mid (|N| - 1)$.*

Лемма 2.3 [6, теорема 2]. *Пусть G — двойная группа Фробениуса четного порядка, которая содержит нормальный ряд $1 \triangleleft H \triangleleft K \triangleleft G$ такой, что K и G/H — группы Фробениуса с ядрами H и K/H соответственно. Тогда*

(a) *$t(G) = 2$ и $T(G) = \{\pi_1(G) = \pi(H) \cup \pi(G/K), \pi_2(G) = \pi(K/H)\}$;*

(b) *G/K и K/H циклические, $|G/K| \mid |\operatorname{Aut}(K/H)|$ и $(|G/K|, |K/H|) = 1$;*

(c) *H нильпотентна и G разрешима.*

Лемма 2.4 [1, теорема A]. *Пусть G — конечная группа со свойством $t(G) \geq 2$. Тогда G является группой одного из следующих типов:*

(a) *группа Фробениуса или двойная группа Фробениуса;*

(b) *простая группа;*

(c) *расширение π_1-группы с помощью простой группы;*

(d) *расширение простой группы с помощью π_1-разрешимой группы;*

(e) *расширение π_1-группы с помощью простой группы, расширенное π_1-группой.*

Пусть p — простое число. Группа G называется *C_{pp}-группой*, если $p \in \pi(G)$ и централизаторы элементов порядка p в G являются p-группами. Далее приведена лемма о простых C_{pp}-группах.

Лемма 2.5 [7, теорема]. *Пусть G — конечная простая $C_{p,p}$-группа, где p — простое число.*

(a) *Если $p = 13$, то G изоморфна одной из следующих простых групп: $A_{13}, A_{14}, A_{15}, Suz,\ L_3(3), L_4(3), O_7(3), S_4(5), S_6(3), U_3(4),\ {}^3D_4(2),\ U_3(23),\ G_2(4),\ G_2(3),\ F_4(2),\ {}^2E_6(2),\ Sz(8),\ Fi_{22},\ {}^2F_4(2)',\ O_8^+(3),\ L_2(25),\ L_2(27),\ L_2(13^m),\ L_2(2\cdot 13^m-1)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $2\cdot 13^m - 1$ — простое число.*

(b) *Если $p = 17$, то G изоморфна одной из следующих простых групп: $A_{17}, A_{18}, A_{19}, J_3, He, Fi_{23}, Fi_{24}', S_4(4), S_8(2), F_4(2), O_8^-(2), O_{10}^-(2),\ {}^2E_6(2),\ L_2(16),\ L_2(17^m),\ L_2(2\cdot 17^m \pm 1)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $2\cdot 17^m \pm 1$ — простое число.*

(c) *Если $p = 5$, то G изоморфна одной из следующих простых групп: $A_5, A_6, A_7, M_{11}, M_{22}, L_3(4), U_4(3), S_4(3), S_4(7), Sz(8), Sz(32), L_2(49), L_2(5^m), L_2(2\cdot 5^m \pm 1)$, где $m \in \mathbb{N}$ и $2\cdot 5^m \pm 1$ — простое число.*

Лемма 2.6. *Пусть G — конечная группа и $S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где $q > 3$ — степень простого числа. Если $OC(G) = OC(S_4(q))$, то $G \cong S_4(q)$.*

Доказательство. В силу основного результата [8] достаточно рассмотреть случаи $q = 4$ и $q = 5$.

Случай 1. $q = 4$. Очевидно, что $t(G) = 2$, поскольку $t(S_4(4)) = 2$. На самом деле выполнены $\pi_1(G) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi_2(G) = \{17\}$. Покажем, что G не является ни группой Фробениуса, ни двойной группой Фробениуса. Предположим, что $G = NH$ — группа Фробениуса с ядром N и дополнением H. По лемме 2.1 имеем $T(G) = \{\pi(N), \pi(H)\}$. Поскольку $|H| \mid (|N| - 1)$, заключаем, что $|N| = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ и $|H| = 17$. Пусть $N_5 \in \mathrm{Syl}_5(N)$ и $G_{17} \in \mathrm{Syl}_{17}(G)$. Тогда $N_5 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы N и, значит, $N_5 \trianglelefteq G$. Из леммы 2.2 видно, что $|G_{17}| \mid (|N_5| - 1)$, откуда следует, что $17 \mid (5^2 - 1)$; противоречие. Теперь допустим, что G является двойной группой Фробениуса. Тогда G обладает нормальным рядом $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ таким, что K и G/H — группы Фробениуса с ядрами H и K/H соответственно. Так как $T(G) = \{\pi_1(G) = \pi(H) \cup \pi(G/K), \pi_2(G) = \pi(K/H)\}$ по лемме 2.3, то $|K/H| = 17$. С другой стороны, $G/K \lesssim \mathrm{Aut}(K/H) \cong Z_{16}$, и, значит, $|G/K| \mid 16$, откуда $\{5, 17\} \subseteq \pi(K)$. Тогда $5 \in \pi(H)$. Пусть $H_5 \in \mathrm{Syl}_5(H)$ и $G_{17} \in \mathrm{Syl}_{17}(G)$. Тогда $H_5 \operatorname{char} H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы H, поэтому $H_5 \trianglelefteq G$. Отсюда $|G_{17}| \mid (|H_5| - 1)$ по лемме 2.2 и, значит, $17 \mid (5^2 - 1)$; противоречие.

По лемме 2.4 группа G обладает нормальным рядом $1 \trianglelefteq N \lhd G_1 \trianglelefteq G$, где N — нильпотентная π_1-группа, G_1/N проста и G_1/G — разрешимая π_1-группа. Отметим, что одной из компонент графа простых чисел группы G_1/N должно быть множество $\{17\}$. На самом деле G_1/N является простой $C_{17,17}$-группой, поэтому G_1/N должна быть изоморфна одной из групп, перечисленных в лемме 2.5(b). Рассматривая порядки этих простых групп, получаем, что G_1/N может быть изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$ или $S_4(4)$.

Если $G_1/N \cong L_2(16)$, то $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(L_2(16))$, поскольку $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(G_1/N)$. Следовательно, $5 \in \pi(N)$. Пусть $N_5 \in \mathrm{Syl}_5(N)$ и $G_{17} \in \mathrm{Syl}_{17}(G)$. Тогда $N_5 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности N и, значит, $N_5 \trianglelefteq G$. Таким образом, $|G_{17}| \mid (|N_5| - 1)$, откуда следует, что $17 \mid (5^s - 1)$, где $s = 1, 2$; противоречие.

Если $G_1/N \cong L_2(17)$, то $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(L_2(17))$, так как $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(G_1/N)$. Следовательно, $5 \in \pi(N)$. Пусть $N_5 \in \mathrm{Syl}_5(N)$ и $G_{17} \in \mathrm{Syl}_{17}(G)$. Тогда $N_5 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы N, значит, $N_5 \trianglelefteq G$. Таким образом, $|G_{17}| \mid (|N_5| - 1)$, откуда следует, что $17 \mid (5^2 - 1)$; противоречие.

Значит, $G_1/N \cong S_4(4)$. В силу равенства $|G| = |S_4(4)|$ заключаем, что $G \cong S_4(4)$.

Случай 2. $q = 5$. Очевидно, что $t(G) = 2$, так как $t(S_4(5)) = 2$. На самом деле $\pi_1(G) = \{2, 3, 5\}$ и $\pi_2(G) = \{13\}$. Покажем, что G не является ни группой Фробениуса, ни двойной группой Фробениуса. Предположим, что $G = NH$ — группа Фробениуса с ядром N и дополнением H. По лемме 2.1 имеем $T(G) = \{\pi(N), \pi(H)\}$. Поскольку $|H| \mid (|N| - 1)$, получаем, что $|N| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4$ и $|H| = 13$. Пусть $N_3 \in \mathrm{Syl}_3(N)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда $N_3 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы N и, значит, $N_3 \trianglelefteq G$. Лемма 2.2 показывает, что $|G_{13}| \mid (|N_3| - 1)$, откуда следует, что $13 \mid (3^2 - 1)$; противоречие. Предположим теперь, что G — двойная группа Фробениуса. Тогда G обладает нормальным рядом $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ таким, что K и G/H — группы Фробениуса с ядрами H и K/H соответственно. Так как $T(G) = \{\pi_1(G) = \pi(H) \cup \pi(G/K), \pi_2(G) = \pi(K/H)\}$ по лемме 2.3, то $|K/H| = 13$. С другой стороны, $G/K \lesssim \mathrm{Aut}(K/H) \cong Z_{12}$, и, значит, $|G/K| \mid 12$, откуда $\{3, 13\} \subseteq \pi(K)$. Тогда $3 \in \pi(H)$. Пусть $H_3 \in \mathrm{Syl}_3(H)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда $H_3 \operatorname{char} H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы H и $H_3 \trianglelefteq G$. Это приводит к тому, что $|G_{13}| \mid (|H_3| - 1)$ по лемме 2.2 и, значит, $13 \mid (3^s - 1)$, где $s = 1, 2$; противоречие.

По лемме 2.4 группа G обладает нормальным рядом $1 \trianglelefteq N \lhd G_1 \trianglelefteq G$, где N — нильпотентная π_1-группа, G_1/N проста и G_1/G — разрешимая π_1-группа. Отметим, что одной из компонент графа простых чисел группы G_1/N должно быть множество $\{13\}$. На самом деле G_1/N является простой $C_{13,13}$-группой. Следовательно, G_1/N может быть изоморфна только группам, перечисленным в лемма 2.5(a). Рассматривая порядки этих простых групп, получаем, что G_1/N может быть изоморфна $L_2(25)$, $U_3(4)$ или $S_4(5)$.

Если $G_1/N \cong L_2(25)$, то $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(L_2(25))$, поскольку $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(G_1/N)$. Следовательно, $3 \in \pi(N)$. Пусть $N_3 \in \mathrm{Syl}_3(N)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда $N_3 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы N и, значит, $N_3 \trianglelefteq G$. Таким образом, $|G_{13}| \mid (|N_3| - 1)$, откуда $13 \mid (3^s - 1)$ при $s = 1$ или 2; противоречие.

Если $G_1/N \cong U_3(4)$, то $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(U_3(4))$, поскольку $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(G_1/N)$. Следовательно, $3 \in \pi(N)$. Пусть $N_3 \in \mathrm{Syl}_3(N)$ и $G_{13} \in \mathrm{Syl}_{13}(G)$. Тогда $N_3 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ ввиду нильпотентности группы N и тем самым $N_3 \trianglelefteq G$. Таким образом, $|G_{13}| \mid (|N_3| - 1)$, откуда $13 \mid (3^s - 1)$ при $s = 1$ или 2; противоречие.

Значит, $G_1/N \cong S_4(5)$. В силу равенства $|G| = |S_4(5)|$ заключаем, что $G \cong S_4(5)$. $\square$

Следующая лемма содержится в [4].

Лемма 2.7 [4, теорема 3]. *Пусть S — конечная простая группа лиева типа и $t(S) \geq 2$. Если H — группа со свойством $\nabla(H) \cong \nabla(S)$, то $|H| = |S|$.*

Теперь рассмотрим взаимосвязь между графами $\nabla(G)$ и $\Delta(G)$ конечной группы G.

Лемма 2.8. *Пусть G и H — конечные группы. Граф $\Delta(G)$ является дополнительным к $\nabla(G)$. Более того, $\nabla(G) \cong \nabla(H)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(G) \cong \Delta(H)$.*

Доказательство. То, что $\Delta(G)$ является дополнительным графом к $\nabla(G)$, легко видно из их определений. Используя определения графа и изоморфизма графов, также легко показать, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(G) \cong \Delta(H)$. $\square$

Лемма 2.9. *Пусть G и H — конечные группы. Если $\nabla(H) \cong \nabla(G)$, то*

$$|C_H(x) \setminus Z(H)| = |C_G(\phi(x)) \setminus Z(G)|$$

для всех $1 \neq x \in H$, где ϕ — автоморфизм графов из $\nabla(H)$ в $\nabla(G)$.

Доказательство. По лемме 2.8 ϕ индуцирует автоморфизм графов из $\Delta(H)$ в $\Delta(G)$. Таким образом, $\phi|_{N(x)}$ — биекция из $N(x)$ в $N(\phi(x))$ для всех $1 \neq x \in H$. В $\Delta(H)$ и $\Delta(G)$ имеем $N(x) = C_H(x) \setminus (Z(H) \cup \{x\})$ и $N(\phi(x)) = C_G(\phi(x)) \setminus (Z(G) \cup \{\phi(x)\})$ соответственно. Следовательно,

$$|C_H(x) \setminus Z(H)| = |C_G(\phi(x)) \setminus Z(G)|$$

для всех $1 \neq x \in H$. $\square$

Лемма 2.10 [9, 10]. *Пусть $S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где q — степень простого числа.*

(a) *Если $q = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(S_4(2^n)) = \{4, 2(2^n+1), 2(2^n-1), 2^{2n}-1, 2^{2n}+1\}$.*

(b) *Если $q = 3^n$, где $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(S_4(3^n)) = \{9, 3(3^n+1), 3(3^n-1), (3^{2n}-1)/2, (3^{2n}+1)/2\}$.*

(c) *Если $q = p^n$, где p — нечетное простое число, большее 3, и $n \in \mathbb{N}$, то $\mu(S_4(q)) = \{p(q+1), p(q-1), (q^2-1)/2, (q^2+1)/2\}$.*

Лемма 2.11. *Пусть $S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где q — степень простого числа.*

(a) *Если $q = 2^n$, где $n \in \mathbb{N}$, то в $S_4(2^n)$ не существует элементов порядка $2u$ и ru для всех $r \in \pi(2^{2n}-1)$ и $u \in \pi(2^{2n}+1)$.*

(b) *Если $q = p^n$, где p — нечетное простое число и $n \in \mathbb{N}$, то в $S_4(p^n)$ не существует элементов порядка pu и ru для всех $r \in \pi(q^2-1)$ и $u \in \pi((q^2+1)/2)$.*

Доказательство. (a) Утверждение очевидно, так как $\mu(M) = \{4, 2(2^n+1), 2(2^n-1), 2^{2n}-1, 2^{2n}+1\}$, $(2^{2n}-1, 2^{2n}+1) = 1$ и $(2^{2n}+1, 2) = 1$.

(b) Если q нечетно, то $((q^2+1)/2, q^2-1) = 1$, поскольку $(q^2+1, q^2-1) = 2$. Более того, $(p, (q^2+1)/2) = 1$, поскольку $(p, q^2+1) = 1$. Значит, в M нет элементов порядка pu, ru для всех $r \in \pi(q^2-1)$ и $u \in \pi(q^2+1)$ в силу того, что $\mu(M) = \{p(q+1), p(q-1), (q^2-1)/2, (q^2+1)/2\}$ или $\{9, 3(3^n+1), 3(3^n-1), (3^{2n}-1)/2, (3^{2n}+1)/2\}$. $\square$

3. Новая характеризация группы $S_4(q)$ с помощью ее графа некоммутативности

В этом пункте будут отдельно рассмотрены различные возможности для значений простого числа p : (1) $p = 2$, (2) $p = 3$ и (3) $p \geq 5$.

Теорема 3.1. *Пусть $M = S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где $n \in \mathbb{N}$, $q = p^n$ и p — простое число. Если G — группа со свойством $\nabla(G) \cong \nabla(M)$, то $OC(G) = OC(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Если $p = 2$, то $M = S_4(2^n)$. Тогда $|G| = |M| = 2^{4n}(2^{2n}-1)^2(2^{2n}+1)$ и $Z(G) = 1$ по лемме 2.7. Таким образом, $\pi(G) = \pi(M) = \pi(2^{2n}+1) \cup \pi(2(2^{2n}-1))$, где $\pi(2(2^{2n}-1)) \cap \pi(2^{2n}+1) = \varnothing$. Пусть ϕ — изоморфизм графов из $\nabla(M)$ в $\nabla(G)$. Тогда $|C_M(x)| = |C_G(\phi(x))|$ для всех $1 \neq x \in M$ по лемме 2.9. Ясно, что $\mu(M) = \{4, 2(2^n+1), 2(2^n-1), 2^{2n}-1, 2^{2n}+1\}$ по лемме 2.10.

Докажем, что $\pi_1(G) = \pi(2(2^{2n}-1))$ и $\pi_2(G) = \pi(2^{2n}+1)$ в $\Gamma(G)$. Разделим доказательство на три шага.

Шаг 1. В $\Gamma(G)$ всегда существует простое число $s \in \pi(2(2^{2n}-1))$ такое, что $s \sim t$ для всех $t \in \pi(2(2^{2n}-1)) \setminus \{s\}$. Другими словами, $\pi(2(2^{2n}-1))$ связно в $\Gamma(G)$.

Поскольку $2^{2n}-1 \in \mu(M)$, в M существует элемент y порядка $2^{2n}-1$. Для каждого $r \in \pi(o(y))$ существует элемент $x \in \langle y \rangle$ такой, что $o(x) = r$, поэтому $2^{2n}-1 \mid |C_M(x)|$. По лемме 2.11 выполнено $\pi(C_M(x)) = \pi(2^{2n}-1)$ или $\pi(2(2^{2n}-1))$. Следовательно, $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(2^{2n}-1)$ или $\pi(2(2^{2n}-1))$, так как $|C_M(x)| = |C_G(\phi(x))|$.

Если $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(2(2^{2n}-1))$, то существует элемент $w \in \langle \phi(x) \rangle$ такой, что $o(w) = s_1$, где $s_1 \in \pi(o(\phi(x))) \subseteq \pi(2(2^{2n}-1))$. Следовательно, $\pi(2(2^{2n}-1)) \subseteq \pi(C_G(w))$, так как $C_G(\phi(x)) \leq C_G(w)$. Если $s_1 \in \pi(2^{2n}-1)$, то $s_1t_1 \in \pi_e(G)$ для всех $t_1 \in \pi(2(2^{2n}-1))\setminus\{s_1\}$. Таким образом, $s_1 \sim t_1$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_1 \in \pi(2(2^{2n}-1)) \setminus \{s_1\}$. Если $s_1 = 2$, то $2t_1' \in \pi_e(G)$ для всех $t_1' \in \pi(2^{2n}-1)$. Значит, $2 \sim t_1'$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_1' \in \pi(2^{2n}-1)$. В частности, в этом случае $\pi(2(2^{2n}-1))$ связно в $\Gamma(G)$.

Если $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(2^{2n}-1)$, то существует элемент $z \in \langle \phi(x) \rangle$ такой, что $o(z) = s_2$, где $s_2 \in \pi(o(\phi(x))) \subseteq \pi(2^{2n}-1)$. Следовательно, $\pi(2^{2n}-1) \subseteq \pi(C_G(z))$, так как $C_G(\phi(x)) \leq C_G(z)$. Таким образом, $s_2t_2 \in \pi_e(G)$ для всех $t_2 \in \pi(2^{2n}-1) \setminus \{s_2\}$. Отсюда следует, что всегда существует простое число $s_2 \in \pi(2^{2n}-1)$ такое, что $s_2 \sim t_2$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_2 \in \pi(2^{2n}-1) \setminus \{s_2\}$. Это означает, что $\pi(2^{2n}-1)$ связно в $\Gamma(G)$.

Далее будет доказано, что $2 \sim t_3$ в $\Gamma(G)$ для некоторого $t_3 \in \pi(2^{2n}-1)$ и, значит, $\pi(2(2^{2n}-1))$ тоже связно в $\Gamma(G)$ в этом случае.

Поскольку $2(2^n-1) \in \mu(M)$, существует элемент y_1 группы M такой, что $o(y_1) = 2(2^n-1)$. Тогда существует элемент $x_1 \in \langle y_1 \rangle$ такой, что $o(x_1) = 2$. Следовательно, $2r_1 \mid |C_M(x_1)| = |C_G(\phi(x_1))|$ для всех $r_1 \in \pi(2^n-1) \subseteq \pi(2^{2n}-1)$. Если $\pi(C_G(\phi(x_1))) \cap \pi(2^{2n}+1) \neq \varnothing$, то существует простое число s_3 такое, что $s_3 \in \pi(2^{2n}+1)$ и $s_3 \in \pi(C_G(\phi(x_1))) = \pi(C_M(x_1))$. Следовательно, в M существует некоторый элемент порядка $2s_3$, что невозможно по лемме 2.11. Значит, $\pi(C_G(\phi(x_1))) \cap \pi(2^{2n}+1) = \varnothing$. Ясно, что $\{2\} \subset \pi(C_G(\phi(x_1))) \subseteq \pi(2(2^{2n}-1))$. Это означает, что $2 \sim t_3$ для некоторого $t_3 \in \pi(2^{2n}-1)$ в $\Gamma(G)$.

Шаг 2. Существует простое число $u \in \pi(2^{2n}+1)$ такое, что $u \sim v$ в $\Gamma(G)$ для всех $v \in \pi(2^{2n}+1)\setminus\{u\}$. Другими словами, $\pi(2^{2n}+1)$ связно в $\Gamma(G)$.

Поскольку $2^{2n}+1 \in \mu(M)$, в M существует элемент y_2 порядка $2^{2n}+1$. Для каждого $u \in \pi(o(y_2))$ существует элемент $x_2 \in \langle y_2 \rangle$ такой, что $o(x_2) = u$. Значит, $2^{2n}+1 \mid |C_M(x_2)|$, откуда следует, что $\pi(2^{2n}+1) \subseteq \pi(C_M(x_2))$. Если $\pi(C_M(x_2)) \subsetneq \pi(2^{2n}+1)$, то существует простое число $k \in \pi(2(2^{2n}-1))$ такое, что $k \in \pi(C_M(x_2))$. Следовательно, $\pi(k(2^{2n}+1)) \subseteq \pi(C_M(x_2))$. Значит, $ku \in \pi_e(M)$, что невозможно по лемме 2.11. Таким образом, $\pi(C_M(x_2)) = \pi(2^{2n}+1)$. Это означает, что $\pi(C_G(\phi(x_2))) = \pi(2^{2n}+1)$, поскольку $|C_G(\phi(x_2))| = |C_M(x_2)|$. В частности, $\pi(2^{2n}+1)$ связно в $\Gamma(G)$.

Шаг 3. В $\Gamma(G)$ выполнено $a \nsim b$ для всех $a \in \pi(2(2^{2n}-1))$ и $b \in \pi(2^{2n}+1)$.

Пусть $a \sim b$ в $\Gamma(G)$ для некоторых $a \in \pi(2(2^{2n}-1))$ и $b \in \pi(2^{2n}+1)$. Выберем $y_2 \in G$ так, чтобы $o(y_2) = ab$, тогда $ab \mid |C_G(y_2)| = |C_M(\phi^{-1}(y_2))|$. По лемме 2.11 имеет место $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(2(2^{2n}-1)) \neq \varnothing$ или $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(2^{2n}+1) \neq \varnothing$, так как $\varnothing \neq \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \subseteq \pi(M)$. Если $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(2(2^{2n}-1)) \neq \varnothing$, то найдется простое число $c \in \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(2(2^{2n}-1))$. Тогда $bc \in$

$\pi_e(M)$, поскольку $|C_M(\phi^{-1}(y_2))| \mid |C_M(m)|$, где $m \in \langle \phi^{-1}(y_2) \rangle$ и $o(m) = c$. Это противоречит лемме 2.11. Если $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(2^{2n}+1) \neq \varnothing$, то найдется простое число $d \in \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(2^{2n}+1)$. Тогда $ad \in \pi_e(M)$, и мы приходим к противоречию с той же леммой.

Выполнив шаги 1–3, получаем, что $\pi_1(G) = \pi(2(2^{2n}-1))$ и $\pi_2(G) = \pi(2^{2n}+1)$ в $\Gamma(G)$. Тогда $OC(G) = OC(M)$, поскольку $|G| = |M|$.

Случай 2. Если $p = 3$, то

$$|M| = |S_4(3^n)| = 3^{4n}(3^{2n}-1)^2(3^{2n}+1)/2,$$

где $q = 3^n$ и $n \in \mathbb{N}$. По лемме 2.7 имеем $|G| = |M| = 3^{4n}(3^{2n}-1)^2(3^{2n}+1)/2$ и $Z(G) = 1$. Таким образом,

$$\pi(G) = \pi(M) = \{3\} \cup \pi(3^{2n}-1) \cup \pi((3^{2n}+1)/2)$$
$$= \{3\} \cup \pi((3^{2n}-1)/2) \cup \pi((3^{2n}+1)/2),$$

так как $\pi(3^{2n}-1) = \pi((3^{2n}-1)/2)$. Пусть ϕ — автоморфизм графов из $\nabla(M)$ в $\nabla(G)$. Тогда $|C_M(x)| = |C_G(\phi(x))|$ для всех $1 \neq x \in M$ по лемме 2.9. Ясно, что $\mu(M) = \{9, 3(3^n+1), 3(3^n-1), (3^{2n}-1)/2, (3^{2n}+1)/2\}$ в силу леммы 2.10.

Покажем, что $\pi_1(G) = \pi(3(3^{2n}-1))$ и $\pi_2(G) = \pi((3^{2n}+1)/2)$ в $\Gamma(G)$. Доказательство проведем в три шага.

Шаг 1. В $\Gamma(G)$ всегда существует простое число $s \in \pi(3(3^{2n}-1))$ такое, что $s \sim t$ для всех $t \in \pi(3(3^{2n}-1)) \setminus \{s\}$. Другими словами, $\pi(3(3^{2n}-1))$ связно в $\Gamma(G)$.

Поскольку $(3^{2n}-1)/2 \in \mu(M)$, в M существует элемент y порядка $(3^{2n}-1)/2$. Для каждого $r \in \pi(o(y))$ существует элемент $x \in \langle y \rangle$ такой, что $o(x) = r$. Следовательно, $(3^{2n}-1)/2 \mid |C_M(x)|$. Тогда $\pi((3^{2n}-1)/2) = \pi(3^{2n}-1) \subseteq \pi(C_M(x)) \subseteq \pi(3(3^{2n}-1))$ по лемме 2.11. Таким образом, $\pi(C_M((x))) = \pi(3^{2n}-1)$ или $\pi(3(3^{2n}-1))$. Значит, либо $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(3^{2n}-1)$, либо $\pi(3(3^{2n}-1))$, поскольку $|C_M(x)| = |C_G(\phi(x))|$.

Если $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(3(3^{2n}-1))$, то существует элемент $w \in \langle \phi(x) \rangle$ такой, что $o(w) = s_1$, где $s_1 \in \pi(o(\phi(x))) \subseteq \pi(3(3^{2n}-1))$. Следовательно, $\pi(3(3^{2n}-1)) \subseteq \pi(C_G(w))$, поскольку $C_G(\phi(x)) \leq C_G(w)$. Если $s_1 \in \pi(3^{2n}-1)$, то $s_1 t_1 \in \pi_e(G)$ для всех $t_1 \in \pi(3(3^{2n}-1)) \setminus \{s_1\}$. Значит, $s_1 \sim t_1$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_1 \in \pi(3(3^{2n}-1)) \setminus \{s_1\}$. Если $s_1 = 3$, то $3t_1' \in \pi_e(G)$ для всех $t_1' \in \pi(3^{2n}-1)$. Значит, $3 \sim t_1'$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_1' \in \pi(3^{2n}-1)$. В частности, в этом случае $\pi(3(3^{2n}-1))$ связно в $\Gamma(G)$.

Если $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(3^{2n}-1)$, то существует элемент $z \in \langle \phi(x) \rangle$ такой, что $o(z) = s_2$, где $s_2 \in \pi(o(\phi(x))) \subseteq \pi(3^{2n}-1)$. Имеем включение $\pi(3^{2n}-1) \subseteq \pi(C_G(z))$, поскольку $C_G(\phi(x)) \leq C_G(z)$. Таким образом, $s_2 t_2 \in \pi_e(G)$ для всех $t_2 \in \pi(3^{2n}-1) \setminus \{s_2\}$. Отсюда следует, что всегда существует простое число $s_2 \in \pi(3^{2n}-1)$ такое, что $s_2 \sim t_2$ для всех $t_2 \in \pi(3^{2n}-1) \setminus \{s_2\}$ в $\Gamma(G)$. Другими словами, $\pi(3^{2n}-1)$ связно в $\Gamma(G)$.

Далее будет доказано, что $3 \sim t_3$ в $\Gamma(G)$ для некоторого $t_3 \in \pi(3^{2n}-1)$ и, значит, $\pi(3(3^{2n}-1))$ тоже связно в $\Gamma(G)$ в данном подслучае.

Поскольку $3(3^n-1) \in \mu(M)$, существует элемент y_1 из M такой, что $o(y_1) = 3(3^n-1)$. Тогда существует элемент $x_1 \in \langle y_1 \rangle$ такой, что $o(x_1) = 3$. Таким образом, $3(3^n-1) \mid |C_M(x_1)| = |C_G(\phi(x_1))|$. Если $\pi(C_G(\phi(x_1))) \cap \pi((3^{2n}+1)/2) \neq \varnothing$, то существует простое число l со свойством $l \in \pi((3^{2n}+1)/2)$ и $l \in \pi(C_G(\phi(x_1))) = \pi(C_M(x_1))$. Следовательно, существует некоторый элемент порядка $3l$ в M; противоречие. Таким образом, $\pi(C_G(\phi(x_1))) \cap \pi((3^{2n}+1)/2) = \varnothing$, откуда вытекает, что $\pi\{3(3^n-1)\} \subseteq \pi(C_G(\phi(x_1))) \subseteq \pi(3(3^{2n}-1))$. Значит, $3 \sim t_3$ для некоторого $t_3 \in \pi(3^{2n}-1)$ в $\Gamma(G)$.

Шаг 2. Существует простое число $u \in \pi((3^{2n}+1)/2)$ такое, что $u \sim v$ в $\Gamma(G)$ для всех $v \in \pi((3^{2n}+1)/2) \setminus \{u\}$. Другими словами, $\pi((3^{2n}+1)/2)$ связно в $\Gamma(G)$.

Поскольку $(3^{2n}+1)/2 \in \mu(M)$, существует элемент y_2 порядка $(3^{2n}+1)/2$ в M. Для всех $u \in \pi(o(y_2))$ существует элемент $x_2 \in \langle y_2 \rangle$ такой, что $o(x_2) = u$. Значит, $(3^{2n}+1)/2 \mid |C_M(x_2)|$, откуда следует, что $\pi((3^{2n}+1)/2) \subseteq \pi(C_M(x_2))$. Если $\pi(C_M(x_2)) \nsubseteq \pi((3^{2n}+1)/2)$, то существует простое число $k \in \pi(3(3^{2n}-1))$ такое, что $k \in \pi(C_M(x_2))$. Отсюда вытекает, что $\pi(k((3^{2n}+1)/2)) \subseteq \pi(C_M(x_2))$. Тогда $ku \in \pi_e(M)$; противоречие. Следовательно, $\pi(C_M(x_2)) = \pi((3^{2n}+1)/2)$. Имеем $\pi(C_G(\phi(x_2))) = \pi((3^{2n}+1)/2)$, поскольку $|C_G(\phi(x_2))| = |C_M(x_2)|$. В частности, $\pi((3^{2n}+1)/2)$ связно в в $\Gamma(G)$.

Шаг 3. В $\Gamma(G)$ выполнено $a \nsim b$ для всех $a \in \pi(3(3^{2n}-1))$ и $b \in \pi((3^{2n}+1)/2)$.

Предположим, что $a \sim b$ в $\Gamma(G)$ для некоторых $a \in \pi(3(3^{2n}-1))$ и $b \in \pi((3^{2n}+1)/2)$. Возьмем $y_2 \in G$ такое, что $o(y_2) = ab$, тогда $ab \mid |C_G(y_2)| = |C_M(\phi^{-1}(y_2))|$. Значит, $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(3(3^{2n}-1)) \neq \varnothing$ или $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi((3^{2n}+1)/2) \neq \varnothing$, так как $\varnothing \neq \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \subseteq \pi(M)$. Если $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(3(3^{2n}-1)) \neq \varnothing$, то существует простое число $c \in \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(3(3^{2n}-1))$. Тогда $bc \in \pi_e(M)$, поскольку $|C_M(\phi^{-1}(y_2))| \mid |C_M(m)|$, где $m \in \langle \phi^{-1}(y_2) \rangle$ и $o(m) = c$. Это противоречит лемме 2.11. Если $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi((3^{2n}+1)/2) \neq \varnothing$, то существует простое число $d \in \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi((3^{2n}+1)/2)$. Тогда $ad \in \pi_e(M)$; еще одно противоречие с той же леммой.

После выполнения шагов 1–3 получаем, что $\pi_1(G) = \pi(3(3^{2n}-1))$ и $\pi_2(G) = \pi((3^{2n}+1)/2)$ в $\Gamma(G)$. Значит, в этом случае $OC(G) = OC(M)$, так как $|G| = |M|$.

Случай 3. Если $p \geq 5$, то $|M| = q^4(q^2-1)^2(q^2+1)/2$, где $q = p^n$ и $n \in \mathbb{N}$. Имеем $|G| = |M| = q^4(q^2-1)^2(q^2+1)/2$ и $Z(G) = 1$ по лемме 2.7. Таким образом, $\pi(G) = \pi(M) = \{p\} \cup \pi(q^2-1) \cup \pi((q^2+1)/2) = \{p\} \cup \pi((q^2-1)/2) \cup \pi((q^2+1)/2)$, поскольку $\pi(q^2-1) = \pi((q^2-1)/2)$. Пусть ϕ — изоморфизм графов из $\nabla(M)$ в $\nabla(G)$, тогда $|C_M(x)| = |C_G(\phi(x))|$ для всех $1 \neq x \in M$ по лемме 2.9. Ясно, что $\mu(M) = \{p(q+1), p(q-1), (q^2-1)/2, (q^2+1)/2\}$ по лемме 2.10.

Теперь покажем, что $\pi_1(G) = \pi(p(q^2-1))$ и $\pi_2(G) = \pi((q^2+1)/2)$ в $\Gamma(G)$. Разделим доказательство на три шага.

Шаг 1. В $\Gamma(G)$ всегда существует простое число $s \in \pi(p(q^2-1))$ такое, что $s \sim t$ для всех $t \in \pi(p(q^2-1)) \setminus \{s\}$. Другими словами, $\pi(p(q^2-1))$ связно в $\Gamma(G)$.

Поскольку $(q^2-1)/2 \in \mu(M)$, существует элемент y порядка $(q^2-1)/2$ в M. Для всех $r \in \pi(o(y))$ существует элемент $x \in \langle y \rangle$ такой, что $o(x) = r$. Значит, $(q^2-1)/2 \mid |C_M(x)|$, откуда вытекает, что $\pi(q^2-1) \subseteq \pi(C_M(x))$. Таким образом, $\pi(C_M(x)) = \pi(q^2-1)$ или $\pi(p(q^2-1))$ по лемме 2.11. Следовательно, $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(q^2-1)$ или $\pi(p(q^2-1))$, так как $|C_M(x)| = |C_G(\phi(x))|$.

Если $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(p(q^2-1))$, то существует элемент $w \in \langle \phi(x) \rangle$ такой, что $o(w) = s_1$, где $s_1 \in \pi(o(\phi(x))) \subseteq \pi(p(q^2-1))$. Имеем $\pi(p(q^2-1)) \subseteq \pi(C_G(w))$, поскольку $C_G(\phi(x)) \leq C_G(w)$. Если $s_1 \in \pi(q^2-1)$, то $s_1 t_1 \in \pi_e(G)$ для всех $t_1 \in \pi(p(q^2-1)) \setminus \{s_1\}$. Значит, $s_1 \sim t_1$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_1 \in \pi(p(q^2-1)) \setminus \{s_1\}$. Если $s_1 = p$, то $pt_1' \in \pi_e(G)$ для всех $t_1' \in \pi(q^2-1)$. Значит, $p \sim t_1'$ в $\Gamma(G)$ для всех $t_1' \in \pi(q^2-1)$. В частности, $\pi(p(q^2-1))$ связно в $\Gamma(G)$ в этом подслучае.

Если $\pi(C_G(\phi(x))) = \pi(q^2-1)$, то существует элемент $z \in \langle\phi(x)\rangle$ такой, что $o(z) = s_2$, где $s_2 \in \pi(o(\phi(x))) \subseteq \pi(q^2-1)$. Выполнено $\pi(q^2-1) \subseteq \pi(C_G(z))$, так как $C_G(\phi(x)) \leq C_G(z)$. Таким образом, $s_2t_2 \in \pi_e(G)$ для всех $t_2 \in \pi(q^2-1)\setminus\{s_2\}$. Значит, всегда существует простое число $s_2 \in \pi(q^2-1)$ такое, что $s_2 \sim t_2$ для всех $t_2 \in \pi(q^2-1) \setminus \{s_2\}$ в $\Gamma(G)$. Иначе говоря, $\pi(q^2-1)$ связно в $\Gamma(G)$.

Далее будет доказано, что $p \sim t_3$ в $\Gamma(G)$ для некоторого $t_3 \in \pi(q^2-1)$ и тем самым $\pi(p(q^2-1))$ тоже связно в $\Gamma(G)$ в этом подслучае.

Поскольку $p(q-1) \in \mu(M)$, существует элемент y_1 из M такой, что $o(y_1) = p(q-1)$. Тогда существует элемент $x_1 \in \langle y_1\rangle$ такой, что $o(x_1) = p$. Таким образом, $pf \mid |C_M(x_1)| = |C_G(\phi(x_1))|$ для всех $f \in \pi(q-1) \subseteq \pi(q^2-1)$. Если $\pi(C_G(\phi(x_1))) \cap \pi((q^2+1)/2) \neq \varnothing$, то существует простое число h такое, что $h \in \pi((q^2+1)/2)$ и $h \in \pi(C_G(\phi(x_1))) = \pi(C_M(x_1))$. Тогда $ph \in \pi_e(M)$, что невозможно в силу леммы 2.11. Следовательно, $\pi(C_G(\phi(x_1)))\cap\pi((q^2+1)/2) = \varnothing$, откуда вытекает, что $\{p\} \subset \pi(C_G(\phi(x_1))) \subseteq \pi(p(q^2-1))$. Получаем, что $p \sim t_3$ в $\Gamma(G)$ для некоторого $t_3 \in \pi(p(q^2-1))$.

Шаг 2. Существует простое число $u \in \pi((q^2+1)/2)$ такое, что $u \sim v$ в $\Gamma(G)$ для всех $v \in \pi((q^2+1)/2) \setminus \{u\}$. Другими словами, $\pi((q^2+1)/2)$ связно в $\Gamma(G)$.

Поскольку $(q^2+1)/2 \in \mu(M)$, существует элемент y_2 порядка $(q^2+1)/2$ в M. Для всех $u \in \pi(o(y_2))$ существует элемент $x_1 \in \langle y_2\rangle$ такой, что $o(x_1) = u$. Значит, $(q^2+1)/2 \mid |C_M(x_1)|$, откуда следует, что $\pi((q^2+1)/2) \subseteq \pi(C_M(x_1))$. Если $\pi(C_M(x_1)) \nsubseteq \pi((q^2+1)/2)$, то существует простое число e такое, что $e \in \pi(p(q^2-1))$ и $e \in \pi(C_M(x_1))$. Следовательно, $\pi(e((q^2+1)/2)) \subseteq \pi(C_M(x_1))$, откуда $eu \in \pi_e(M)$; противоречие. Таким образом, $\pi(C_M(x_1)) = \pi((q^2+1)/2)$, что влечет равенство $\pi(C_G(\phi(x_1))) = \pi((q^2+1)/2)$, так как $|C_G(\phi(x_1))| = |C_M(x_1)|$. В частности, $\pi((q^2+1)/2)$ связно в $\Gamma(G)$.

Шаг 3. В $\Gamma(G)$ выполнено $a \nsim b$ для всех $a \in \pi(p(q^2-1))$ и $b \in \pi((q^2+1)/2)$.

Предположим, что $a \sim b$ в $\Gamma(G)$ для некоторых $a \in \pi(p(q^2-1))$ и $b \in \pi((q^2+1)/2)$. Возьмем $y_2 \in G$ такое, что $o(y_2) = ab$, тогда $ab \mid |C_G(y_2)| = |C_M(\phi^{-1}(y_2))|$. Следовательно, $\pi(o(\phi^{-1}(y_2)))\cap\pi(p(q^2-1)) \neq \varnothing$ или $\pi(o(\phi^{-1}(y_2)))\cap\pi((q^2+1)/2) \neq \varnothing$, поскольку $\varnothing \neq \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \subseteq \pi(M)$. Если $\pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(p(q^2-1)) \neq \varnothing$, то существует простое число $c \in \pi(o(\phi^{-1}(y_2))) \cap \pi(p(q^2-1))$. Тогда $bc \in \pi_e(M)$, так как $|C_M(\phi^{-1}(y_2))| \mid |C_M(m)|$, где $m \in \langle\phi^{-1}(y_2)\rangle$ и $o(m) = c$. Это противоречит лемме 2.11. Если $\pi(o(\phi^{-1}(y_2)))\cap\pi((q^2+1)/2) \neq \varnothing$, то существует простое число $d \in \pi(o(\phi^{-1}(y_2)))\cap\pi((q^2+1)/2)$. Следовательно, $ad \in \pi_e(M)$; еще одно противоречие с той же леммой.

После выполнения шагов 1–3, получаем, что $\pi_1(G) = \pi(p(q^2-1))$ и $\pi_2(G) = \pi((q^2+1)/2)$ в $\Gamma(G)$. Значит, в этом случае $OC(G) = OC(M)$, так как $|G| = |M|$.

Разобрав случаи 1–3, заключаем, что $OC(G) = OC(M)$. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть $M = S_4(q)$ — простая проективная симплектическая группа, где $n \in \mathbb{N}$, $q = p^n$ и p — простое число. Если G — группа со свойством $\nabla(G) \cong \nabla(M)$, то $G \cong M$.*

Доказательство. Пусть ϕ — изоморфизм графов из $\nabla(M)$ в $\nabla(G)$. Далее рассматриваются два случая: $q \neq 3$ и $q = 3$.

Случай 1. Если $q \neq 3$, то $G \cong M$ по лемме 2.6 и теореме 3.1.

Случай 2. Если $q = 3$, то $OC(G) = OC(S_4(3))$ по теореме 3.1. На самом деле $\pi_1(G) = \{2,3\}$ и $\pi_2(G) = \{5\}$.

Сначала покажем, что G не является ни группой Фробениуса, ни двойной группой Фробениуса. Предположим, что $G = NH$ — группа Фробениуса с ядром

N и дополнением H. По лемме 2.1 имеет место $T(G) = \{\pi(N), \pi(H)\}$. Значит, либо $|N| = 2^6 \cdot 3^4$ и $|H| = 5$, либо $|N| = 5$ и $|H| = 2^6 \cdot 3^4$. Это невозможно, так как $|H| \nmid (|N|-1)$. Предположим, теперь, что G — двойная группа Фробениуса. Тогда G обладает нормальным рядом $1 \lhd H \lhd K \lhd G$ таким, что K и G/H — группы Фробениуса с ядрами H и K/H соответственно. Поскольку $T(G) = \{\pi_1(G) = \pi(H) \cup \pi(G/K), \pi_2(G) = \pi(K/H)\}$ по лемме 2.3, то $|K/H| = 5$. С другой стороны, $G/K \lesssim \mathrm{Aut}(K/H) \cong Z_4$, и, значит, $|G/K| \mid 4$, откуда следует, что $\{2,3,5\} \subseteq \pi(K)$. Тогда $\{2,3\} \subseteq \pi(H)$. Теперь можно считать, что $|H| = 2^{i_1} \cdot 3^4$, где $i_1 = 1, 2, \dots, 6$. Пусть $H_2 \in \mathrm{Syl}_2(H)$ и $G_5 \in \mathrm{Syl}_5(G)$, если $i_1 \neq 4$. Тогда $H_2 \operatorname{char} H \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы H и тем самым $H_2 \trianglelefteq G$. По лемме 2.2 выполнено $|G_5| \mid (|H_2| - 1)$, откуда $5 \mid (2^{i_1} - 1)$, где $i_1 \neq 4$; очевидное противоречие. Таким образом, $i_1 = 4$ и $|H| = 2^4 \cdot 3^4$. Выберем $a \in Z(H)$ так, что $o(a) = 2$. Тогда $|C_H(a)| = 2^4 \cdot 3^4$. Значит, $|C_G(a)| = 2^4 \cdot 3^4 \cdot t_1$, где $t_1 \in \mathbb{N}$. По лемме 2.9 соответствующую величину имеет и $|C_M(\phi^{-1}(a))|$. Это противоречит тому, что в группе M нет нетривиальных элементов, чей централизатор имел бы такой порядок (см. [11]).

По лемме 2.4 в G есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq N \lhd G_1 \trianglelefteq G$, где N — нильпотентная π_1-группа, G_1/N проста и G_1/G — разрешимая π_1-группа. Отметим, что одна из компонент графа простых чисел группы G_1/N должна быть равна $\{5\}$. На самом деле G_1/N — простая $C_{5,5}$-группа. Следовательно, G_1/N должна быть изоморфна одной из групп, перечисленных в лемме 2.5(c). Рассматривая порядки этих простых групп, получаем, что G_1/N может быть изоморфна A_5, A_6 или $S_4(3)$.

Если $G_1/N \cong A_5$, то $A_5 \lesssim G/N \lesssim \mathrm{Aut}(A_5)$, так как $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(G_1/N)$. Следовательно, $\{2,3\} \subseteq \pi(N)$ и $|N| = 2^{i_2} \cdot 3^3$, где i_2 равно 3 или 4. Пусть $G_5 \in \mathrm{Syl}_5(G)$ и $N_3 \in \mathrm{Syl}_3(N)$. Тогда $N_3 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы N и $N_3 \trianglelefteq G$. Тем самым $|G_5| \mid (|N_3| - 1)$, откуда $5 \mid (3^3 - 1)$; противоречие.

Если $G_1/N \cong A_6$, то $A_6 \lesssim G/N \lesssim \mathrm{Aut}(A_6)$, поскольку $G/N \lesssim \mathrm{Aut}(G_1/N)$. Тогда $\{2,3\} \subseteq \pi(N)$ и $|N| = 2^{i_3} \cdot 3^2$, где $i_3 = 1, 2, 3$. Пусть $G_5 \in \mathrm{Syl}_5(G)$ и $N_3 \in \mathrm{Syl}_3(N)$. Тогда $N_3 \operatorname{char} N \trianglelefteq G$ в силу нильпотентности группы N и, значит, $N_3 \trianglelefteq G$. Следовательно, $|G_5| \mid (|N_3| - 1)$, откуда вытекает, что $5 \mid (3^2 - 1)$; противоречие.

Таким образом, $G_1/N \cong S_4(3)$. Поскольку $|G| = |S_4(3)|$, заключаем, что $G \cong S_4(3)$.

Доказательство завершено.

Авторы благодарны рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69. P. 487–513.
2. *Abe S., Iiyori N.* A generalization of prime graphs of finite groups // Hokkaido Math. J. 2000. V. 29, N 2. P. 391–407.
3. *Abdollahi A., Akbari S., Maimani H. R.* Non-commuting graph of a group // J. Algebra. 2006. V. 298. P. 468–492.
4. *Могхаддамфар А. Р., Ши У., Чжоу У., Зокаи А. Р.* О некоммутативных графах, ассоциированных с конечной группой // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 416–425.
5. *Chen G. Y.* Further reflections on Thompson′s conjecture // J. Algebra. 1999. V. 218. P. 276–285.
6. *Chen G. Y.* On Frobenius and 2-Frobenius group // J. Southwest China Normal Univ. 1995. V. 20, N 5. P. 485–487.
7. *Chen Z. M., Shi W. J.* On simple C_{pp}-groups (in Chinese) // J. Southwest China Normal Univ. 1993. V. 18, N 3. P. 249–256.

8. *Iranmanesh A., Khosravi B.* A characterization of $C_2(q)$ where $q > 5$ // Comment Math. Univ. Carolinae. 2002. V. 43, N 1. P. 9–21.

9. *Мазуров В. Д., Су М. Ч., Чао Х. П.* Распознавание конечных простых групп $L_3(2^m)$ и $U_3(2^m)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 567–585.

10. *Srinivasan B.* The characters of the finite symplectic $Sp(4, q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131, N 2. P. 488–525.

11. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Статья поступила 3 сентября 2007 г.

Liangcai Zhang (Чжан Лянцай)
Wujie Shi (Ши Уцзе) (corresponding author)
School of Mathematical Sciences, Suzhou University,
Suzhou, Jiangsu 215006, P.R. China
zlc213@163.com, wjshi@suda.edu.cn