*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2009. Том 50, № 3*

*УДК 517.9*

# СВОЙСТВО ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ АЛГЕБРЫ В ЗАДАЧЕ ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

**С. В. Хабиров**

**Аннотация.** Решается задача групповой классификации нелинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений. Допускаемая непрерывная группа преобразований имеет алгебру Ли размерности меньше 5. Это основное утверждение доказывается с помощью основного свойства определяющих уравнений допускаемой алгебры Ли: иметь решением коммутатор двух решений. С помощью преобразований эквивалентности нелинейные системы классифицируются по известным структурам алгебр Ли размерностей 3 и 4.

**Ключевые слова:** симметрии дифференциальных уравнений, групповая классификация, определяющие уравнения допускаемой алгебры Ли.

## Введение

Нелинейные волновые уравнения вида

$$u_{tt} = f(x, u_x)u_{xx} + g(x, u_x)$$

контактным преобразованием приводятся к системе уравнений [1]

$$v_t = a(x, v)w_x, \quad w_t = b(x, v)v_x. \tag{0.1}$$

Мы рассматриваем нелинейные гиперболические системы, у которых $ab > 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a_v^2 + b_v^2 \neq 0$, $a_x^2 + b_x^2 \neq 0$. Систему можно записать в характеристической форме

$$C_+\colon \frac{dx}{dt} = \sqrt{ab},\ D_+v - \sqrt{ab^{-1}}D_+w = 0;\ C_-\colon \frac{dx}{dt} = -\sqrt{ab},\ D_-v + \sqrt{ab^{-1}}D_-w = 0.$$

Преобразования эквивалентности системы (0.1) вычислены в [1]. Они образуют бесконечную группу с произволом в две функции одного аргумента. Для групповой классификации [2] системы (0.1) вычислены инварианты производной алгебры Ли группы эквивалентности. Два инварианта первого порядка играют важную роль при доказательстве конечности размерности допускаемой алгебры. Размерность допускаемой алгебры не превосходит четырех.

В работе [1] приведен пример необходимых условий на коэффициенты $a$, $b$, при выполнении которых система допускает конечнопараметрическую группу

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00047–a) и Федерального агентства по науке и инновациям РФ (грант НШ–2826.2008.1).

преобразований. Эти условия переопределенные и сильно нелинейные. Совместность условий не изучалась ввиду сложности задачи. В настоящей статье эта задача полностью решена с помощью оригинального метода. А именно, используется свойство определяющих уравнений алгебры вместе с двумя решениями иметь решением коммутатор.

После того, как доказано, что размерность допускаемой алгебры меньше 5, для перечисления различных нелинейных систем (0.1) можно воспользоваться известной классификацией Бианки трехмерных алгебр Ли и классификацией Г. И. Кручковича четырехмерных алгебр Ли [3]. В результате получился список из 14 неэквивалентных случаев нелинейных систем уравнений с допускаемыми конечномерными алгебрами Ли.

## § 1. Преобразования эквивалентности гиперболической системы уравнений

Замены переменных $t$, $x$, $v$, $w$ системы (0.1), не изменяющие вида системы, а лишь преобразующие коэффициенты $a$, $b$, называются *преобразованиями эквивалентности*. Ясно, что они образуют группу. Непрерывная часть этой группы, зависящая от параметров, образует группу Ли, алгебра Ли которой находится по известному алгоритму [2, § 6, п. 4].

**Теорема 1** [1]. *Алгебра Ли $L$ преобразований эквивалентности задается операторами*

$$E_1 = \partial_t, \quad E_2 = \partial_w, \quad E_3 = t\partial_t - a\partial_a - b\partial_b, \quad E_4 = w\partial_w - a\partial_a + b\partial_b,$$

$$\langle\eta\rangle_1 = \eta(x)\partial_x + \eta'(x)(a\partial_a + b\partial_b), \quad \langle\zeta\rangle_2 = \zeta(v)\partial_v + \zeta'(v)(a\partial_a - b\partial_b).$$

Ненулевые коммутаторы [2, § 7] операторов из теоремы 1 таковы: $[E_1, E_3] = E_1$, $[E_2, E_4] = E_2$, $[\langle\eta_1\rangle_1, \langle\eta_2\rangle_1] = \langle\eta_1\eta_2' - \eta_2\eta_1'\rangle_1$, $[\langle\zeta_1\rangle_2, \langle\zeta_2\rangle_2] = \langle\zeta_1\zeta_2' - \zeta_2\zeta_1'\rangle_2$. Отсюда видно, что векторное пространство, определяемое операторами $E_i, i = 1, 2, 3, 4$, $\langle\eta\rangle_1$, $\langle\zeta\rangle_2$, является бесконечной алгеброй Ли $L$. Алгебра $L$ представляется в виде полупрямой суммы $L = J\dot{\oplus}L_2$ производной алгебры Ли $L^{(1)} = J = \{\langle\eta\rangle_1\} \oplus \{\langle\zeta\rangle_2\} \oplus \{E_1, E_2\}$ и абелевой подалгебры $L_2 = \{E_3, E_4\}$.

**Теорема 2.** *Инварианты первого порядка идеала $J$ задаются выражениями*

$$i = \sqrt{ab}\left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right), \quad j = \sqrt{ab^{-1}}\left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right).$$

Доказательство. Продолжим операторы идеала $J$ на первые производные [2, § 4], при этом операторы $E_1$, $E_2$ не продолжаются:

$$\langle\tilde\eta\rangle_1 = \eta\partial_x + \eta'(a\partial_a + b\partial_b + a_v\partial_{a_v} + b_v\partial_{b_v}) + \eta''(a\partial_{a_x} + b\partial_{b_x}),$$

$$\langle\tilde\zeta\rangle_2 = \zeta\partial_v + \zeta'(a\partial_a - b\partial_b + a_x\partial_{a_x} - b_x\partial_{b_x} - 2b_v\partial_{b_v}) + \zeta''(a\partial_{a_v} - b\partial_{b_v}).$$

Инвариант есть функция $I$, которая аннулируется продолженными операторами. Так как $\eta(x)$, $\zeta(v)$ — произвольные функции, то, приравнивая к нулю коэффициенты при производных этих функций, получим переопределенную систему линейных однородных уравнений

$$I_x = I_v = 0, \quad aI_a + bI_b + a_vI_{a_v} + b_vI_{b_v} = 0,$$

$$aI_a - bI_b + a_xI_{a_x} - b_xI_{b_x} - 2b_vI_{b_v} = 0, \quad aI_{a_x} + bI_{b_x} = 0, \quad aI_{a_v} - bI_{b_v} = 0.$$

Общим решением является произвольная функция инвариантов $i, j$ из формулировки теоремы.

Конечные преобразования, отвечающие операторам из теоремы 1, получаются решением уравнений Ли [2, § 2, п. 3] и обозначаются так же, как их операторы, при этом преобразования инвариантных величин не записаны для $E_k$:

$E_1$: $\bar{t} = t + a_1$;
$E_2$: $\bar{w} = w + a_2$;
$E_3$: $\bar{t} = ta_3$, $\bar{b} = ba_3^{-1}$, $\bar{a} = aa_3^{-1}$;
$E_4$: $\bar{w} = wa_4$, $\bar{b} = ba_4$, $\bar{a} = aa_4^{-1}$;
$\langle\eta\rangle_1$: $\bar{x} = f(x)$, $\bar{v} = v$, $\bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v)f'(x)$, $\bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = b(x, v)f'(x)$;
$\langle\zeta\rangle_2$: $\bar{x} = x$, $\bar{v} = g(v)$, $\bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v)g'(v)$, $\bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = b(x, v)(g'(v))^{-1}$.

Здесь $a_k$ — параметры однопараметрических подгрупп; $f(x)$, $g(v)$ — функциональные параметры бесконечнопараметрических подгрупп.

Замечены дискретные преобразования эквивалентности системы (0.1) — преобразование годографа:

$$\bar{t} = w, \quad \bar{x} = v, \quad \bar{v} = x, \quad \bar{w} = t, \quad \bar{a}(\bar{x}, \bar{v}) = a(x, v), \quad \bar{b}(\bar{x}, \bar{v}) = (b(x, v))^{-1},$$

и инверсии:

$$(1)\ \bar{t} = -t,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b; \quad (2)\ \bar{v} = -v,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b;$$

$$(3)\ \bar{x} = -x,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b; \quad (4)\ \bar{w} = -w,\ \bar{a} = -a,\ \bar{b} = -b.$$

**Лемма 1.** *Инварианты преобразуются по правилу: для годографа* $\bar{i} = j$, $\bar{j} = i$; *для инверсии* (2) $\bar{i} = i$, $\bar{j} = -j$; *для инверсии* (3) $\bar{i} = -i$, $\bar{j} = j$.

## § 2. Определяющие уравнения алгебры Ли

Оператор, допускаемый системой (0.1), разыскивается в виде

$$X = \xi(t, x, v, w)\partial_t + \eta(t, x, v, w)\partial_x + \zeta(t, x, v, w)\partial_v + \chi(t, x, v, w)\partial_w.$$

Условия инвариантности многообразия (0.1) записывается с помощью продолжения $X$ на производные:

$$\begin{aligned}\widetilde{X} = X &+ (D_t\zeta - v_tD_t\xi - v_xD_t\eta)\partial_{v_t} + (D_x\zeta - v_tD_x\xi - v_xD_x\eta)\partial_{v_x} \\ &+ (D_t\chi - w_tD_t\xi - w_xD_t\eta)\partial_{w_t} + (D_x\chi - w_tD_x\xi - w_xD_x\eta)\partial_{w_x}.\end{aligned}$$

Для этого действуем оператором $\widetilde{X}$ на каждое уравнение системы (0.1) в силу уравнений системы (0.1). Полученные тождества расщепляем по независимым производным $w_x$, $v_x$, которые являются свободными параметрами в тождествах. Получаем определяющую систему уравнений

$$\begin{gathered}\eta_w = a\xi_v, \quad \eta_v = b\xi_w, \quad \zeta_t = a\chi_x, \quad \chi_t = b\zeta_x, \quad b\zeta_w = a\chi_v, \quad \eta_t = ab\xi_x, \\ 2\eta_x - 2\xi_t = \left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta + \left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta, \\ 2\chi_w - 2\zeta_v = \left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta + \left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Если функции $a, b$ произвольны, то $\xi = C_{01}$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\chi = C_{02}$, где $C_{0k}$, $k = 1, 2$, — постоянные. Получаем операторы $X_k = E_k$, $k = 1, 2$, которые образуют ядро допускаемых алгебр.

Из восьми уравнений (2.1) можно найти все производные функций $\chi$ и $\xi$. Перекрестное дифференцирование дает 12 уравнений совместности:

$$2\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\eta_t + b\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_w + b\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_w = 0, \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_t + 2b\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\zeta_w + \left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_t = 0, \tag{2.3}$$

$$\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)\eta_v + \left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)_x\eta + \left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_v + \left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)_v\zeta = 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_x + \left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)_x\eta - \left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)\zeta_x + \left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)_v\zeta = 0, \tag{2.5}$$

$$2\eta_{tt} = 2ab\eta_{xx} - (ab)_x\eta_x - (ab)_v\zeta_x - ab\left(\frac{a_x}{a}+\frac{b_x}{b}\right)_x\eta - ab\left(\frac{b_v}{b}+\frac{a_v}{a}\right)_x\zeta, \tag{2.6}$$

$$\eta_{tv} = b\eta_{xw} + \left(\frac{a_v}{a}+\frac{b_v}{b}\right)\eta_t - b\frac{a_x}{a}\eta_w, \tag{2.7}$$

$$\eta_{tw} = a\eta_{xv} - a\frac{b_x}{b}\eta_v, \tag{2.8}$$

$$\eta_{vv} = \frac{b}{a}\eta_{ww} + \frac{b_v}{b}\eta_v, \tag{2.9}$$

$$\zeta_{tt} = ab\zeta_{xx} + ab_x\zeta_x, \tag{2.10}$$

$$\zeta_{tw} = a\zeta_{xv} + a\frac{b_v}{b}\zeta_x, \tag{2.11}$$

$$\zeta_{tv} = b\zeta_{xw} + b\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\zeta_w + \frac{a_v}{a}\zeta_t, \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} 2\zeta_{ww} = 2\frac{a}{b}\zeta_{vv} &+ \frac{a}{b}\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)\eta_v + \frac{a}{b}\left(\frac{b_v}{b}-\frac{a_v}{a}\right)\zeta_v \\ &+ \frac{a}{b}\left(\frac{b_x}{b}-\frac{a_x}{a}\right)_v\eta + \frac{a}{b}\left(\frac{b_v}{b}-\frac{a_v}{a}\right)_v\zeta. \end{aligned} \tag{2.13}$$

**Теорема 3.** *Система определяющих уравнений* (2.2)–(2.13) *не порождает новых уравнений.*

В ситуации теоремы 3 говорят, что *система находится в инволюции* [4].

Для доказательства проверяется, что все дифференциальные следствия уравнений 1-го порядка (2.2)–(2.5) суть тождества. Далее из (2.6)–(2.13) находим смешанные производные функций $\eta$ и $\zeta$ 3-го порядка. Их сравнение приводит к тождествам.

Уравнения (2.2), (2.3) линейные однородные с постоянными коэффициентами, поэтому имеют общее решение

$$\eta = -2^{-1}tI(h+g)_s + g, \quad b\zeta = 2^{-1}tI^2(h+g)_s + Ih, \tag{2.14}$$

где $h(x,v,s)$, $g(x,v,s)$ — произвольные функции, $s = w + It$, $I = ij^{-1}$, $i$, $j$ — инварианты из теоремы 2.

Подстановка представления (2.14) с новыми независимыми переменными $t$, $s$, $x$, $v$ в оставшиеся уравнения определяющей системы (2.4)–(2.13) дает уравнения, в которых переменная $t$ свободная. Приравнивая к нулю коэффициенты при степенях $t$, получим расщепление определяющих уравнений. Из уравнений (2.4), (2.5) следуют равенства для $a$ и $b$:

$$\left(\frac{a_v}{a}+\frac{b_v}{b}\right)I_x = I(\ln b)_{xv}, \quad \left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)I_v = I(\ln b)_{xv} \tag{2.15}$$

при $(g+h)_s \neq 0$ (при $(g+h)_s = 0$ этих равенств нет), а также в любом случае справедливы уравнения для $h$ и $g$:

$$\left[\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)(g+h)\right]_x = 2b^{-1}I(\ln b)_{xv}h, \quad \left[\left(\frac{a_x}{a}-\frac{b_x}{b}\right)(g+h)\right]_v = -2(\ln b)_{xv}g. \tag{2.16}$$

**Лемма 2.** *Пусть* $I \neq \mathrm{const}$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $(g+h)_s \neq 0$. *Тогда* $\zeta$, $\eta$ — *линейные функции по переменным* $t$, $w$.

Доказательство. Коэффициент при $t^3$ в (2.9), (2.10) дает равенства

$$II_x(g+h)_{sss} = 0, \quad II_v(g+h)_{sss} = 0. \tag{2.17}$$

Если $I \neq \mathrm{const}$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $(g+h)_s \neq 0$, то из (2.17), (2.16) следует, что $g$, $h$ — многочлены 2-й степени по переменной $s$:

$$g+h = \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \quad h = \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$$

где $\alpha_k$, $\beta_k$, $k = 0, 1, 2,$ — функции переменных $x, v$.

Коэффициенты при $t^2$ в (2.9), (2.10) дают равенства

$$2\alpha_{2v} + \left(I_{vv}I_v^{-1} - b_v b^{-1}\right)\alpha_2 + 2I_v I^{-1}\beta_2 = 0,$$

$$2\alpha_{2x} + \left(I_{xx}I_x^{-1} - b_x b^{-1} + 4I_x I^{-1}\right)\alpha_2 + 2I_x I^{-1}\beta_2 = 0,$$

а из (2.8), (2.13) получим

$$\alpha_2\left[I_x I_v^{-1}I_{vv} - 2I_{xv} + I_v I_x^{-1}I_{xx} - 4I^{-1}I_x I_v + b^{-1}(b_x I_v - b_v I_x)\right] = 0.$$

Используя эти равенства, из (2.6), (2.13) имеем $I_x\alpha_2 = 0$, $I_v\alpha_2 = 0$.

Так как $I \neq \mathrm{const}$, то $\alpha_2 = 0$ и $\beta_2 = 0$. Значит, функции $\eta, \zeta$ линейны по $t, w$.

## § 3. Частные случаи

Пусть $i = 0$, тогда $ab^{-1} = \beta(v)$. Преобразование эквивалентности $\langle\zeta\rangle_2$ делает $\beta = 1$. Если $j = 0$, то $ab = \alpha(x)$. Преобразование эквивалентности $\langle\eta\rangle_1$ делает $\alpha = 1$, а годограф приводит к предыдущему случаю. Итак, если $i = 0$ или $j = 0$, то система (0.1) эквивалентна случаю $a = b$.

**3.1.** Случай $a = b$. Можно считать, что $a_x \neq 0$, $a_v \neq 0$, $(\ln a)_{xv} \neq 0$. Иначе система (0.1) эквивалентна линейной системе.

Из уравнений (2.3), (2.5) следует, что $\zeta_t = \zeta_x = 0$, а из (2.2) получим $\eta = -2^{-1}ta\zeta_w + \eta_1(x, v, w)$. Подстановка в уравнение (2.8) дает линейное равенство по переменной $t$, от которой функции $\zeta$, $\eta_1$ не зависят. Приравняв к нулю коэффициент при $t$, имеем $\zeta_w(\ln a)_{xv} = 0$. Отсюда $\zeta_w = 0$. Из (2.13) получим $\zeta = C_1 v + C_0$, где $C_k$ — постоянные. Из уравнения (2.4) определяем

$$\eta = -(\ln a)_{xv}^{-1}[C_1(v(\ln a)_v)_v + C_0(\ln a)_{vv}].$$

Уравнения (2.10)–(2.12) тождественно выполняются. Остальные уравнения (2.6), (2.8), (2.9) дают условия совместности для функции $a$ и возможную линейную связь на постоянные $C_0$ и $C_1$.

По решению системы (2.2)–(2.13) решение системы (2.1) определяется с точностью до двух аддитивных постоянных, которые задают ядро допускаемых алгебр. Общее решение линейно и однородно зависит от четырех или меньшего числа постоянных.

Таким образом, размерность допускаемой алгебры не превосходит 4.

**3.2.** Случай $I_x = I_v = 0$. Преобразование эквивалентности $E_3$ переводит постоянное значение $I$ в единицу $I = 1$. Значит, $i = j$ или $b(ba_x - ab_x) = ba_v + ab_v$. Общее решение этого уравнения имеет вид $a = \varphi_x^{-1}\varphi_v^{-1}, \quad b = \varphi_v\varphi_x^{-1}$, где $\varphi(x,v)$ — произвольная функция. В системе (0.1) с такими выражениями для $a$ и $b$ сделаем замену $\bar v = \varphi(x,v)$, $v = \sigma(x,\bar v)$ — обратная функция, $\bar w = w + t$ и получим систему

$$\bar v_t = -\sigma_{\bar v}\sigma_x^{-1}\bar w_x, \quad \bar w_t = -\sigma_{\bar v}\sigma_x^{-1}\bar v_x$$

вида (0.1) с $a = b$. Мы приходим к случаю 3.1. Замена, использованная здесь, есть преобразование эквивалентности, отличное от рассмотренных в § 1. Изменение группы эквивалентности возможно для специальных соотношений между коэффициентами $a$ и $b$.

**3.3.** Случай $(\ln b)_{xv} = 0$. В рассматриваемом случае $b = \alpha(x)\beta(v)$. Преобразованиями эквивалентности $\langle\eta\rangle_1$, $\langle\zeta\rangle_2$ можно перевести $b$ в единицу: $b = 1$.

Если $(g+h)_s \neq 0$, то из (2.15) следует, что $I = I_0$ — постоянная. Получаем случай 3.2.

Пусть $b = 1$, $(g+h)_s = 0$. Тогда ввиду (2.14) $\eta = g(x,v,s)$, $\zeta = Ih(x,v,s)$, $s = w + It$, $I = a_x a_v^{-1}$. Уравнения (2.4), (2.5) дают $a_x\eta + a_v\zeta = aC_0$, где $C_0$ — постоянная.

Если $I \neq \mathrm{const}$, то из (2.6), (2.7) следует $g_{ss} = 0$, а из (2.10), (2.11) имеем $g_s = 0$. Уравнения (2.6)–(2.9) интегрируются: $\eta = C_1x + C_2v + C_3$, $\zeta = C_0aa_v^{-1} - I(C_1x + C_2v + C_3)$.

Решение определяющих уравнений (2.1) зависит не более чем от шести постоянных с учетом ядра. Подстановка в (2.11) дает тождество, а из (2.9), (2.10), (2.12) получим классификационные соотношения

$$C_1(2I_x + xI_{xx}) + C_2vI_{xx} + C_3I_{xx} + C_0\big[\big(aa_{xv}a_v^{-2}\big)_v - I_x\big] = 0,$$

$$C_1(I_v + xI_{xv}) + C_2(I_x + vI_{xv}) + C_3I_{xv} + C_0\big[\big(aa_{xv}a_v^{-2}\big)_v - I_v\big] = 0,$$

$$C_1xI_{vv} + C_2(2I_v + vI_{vv}) + C_3I_{vv} + C_0\big(aa_{vv}a_v^{-2}\big)_v = 0.$$

Постоянные $C_k$ линейно зависимы, иначе $I = \mathrm{const}$.

Размерность векторного пространства решений определяющих уравнений (2.1) равна 5, если все миноры 2-го порядка матрицы системы классификационных соотношений равны нулю. Вычисляя миноры 2-го порядка, получим $I_x = I_v = 0$ и возвращаемся к случаю 3.2. Алгебра нелинейных уравнений (0.1) имеет размерность не больше 4.

**3.4.** Случай $(g+h)_s = 0$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $I \neq \mathrm{const}$. Из (2.16) следует $g_s = h_s = 0$, т. е. $\eta = \eta(x,v)$, $\zeta = \zeta(x,v)$. Из уравнений (2.1) получим

$$\xi = C_1w + C_3t + C_{01}, \quad \chi = C_2t + C_4w + C_{02}, \tag{3.1}$$

где $C_{01}$, $C_{02}$ — постоянные ядра, $C_k$ — постоянные векторного пространства решений системы (2.1) и

$$\begin{gathered}\eta_v = C_1 b, \quad \zeta_x = C_2 b^{-1},\\ 2\eta_x - 2C_3 = \left(\frac{a_x}{a} + \frac{b_x}{b}\right)\eta + \left(\frac{a_v}{a} + \frac{b_v}{b}\right)\zeta,\\ 2\zeta_v - 2C_4 = \left(\frac{a_x}{a} - \frac{b_x}{b}\right)\eta + \left(\frac{a_v}{a} - \frac{b_v}{b}\right)\zeta.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Из (3.2) выразим все производные функций $\eta, \zeta$. Условия совместности принимают вид

$$\eta j_x + \zeta j_v = -C_1 i - C_4 j, \quad \eta i_x + \zeta i_v = -C_3 i - C_2 j. \tag{3.3}$$

По теореме Фробениуса других условий совместности нет [2, § 12, п. 8].

Если определитель системы (3.3) не равен нулю: $\Delta = j_x i_v - i_x j_v \neq 0$, то решение имеет вид

$$\eta = -\Delta^{-1}\begin{vmatrix} C_1 i + C_4 j & j_v \\ C_3 i + C_2 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta = \Delta^{-1}\begin{vmatrix} C_1 i + C_4 j & j_x \\ C_3 i + C_2 j & i_x \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Размерность векторного пространства решений определяющих уравнений (2.1) не больше шести.

Подстановка (3.4) в (3.2) дает четыре классификационных соотношения:

$$\begin{gathered}C_1[(ii_v\Delta^{-1})_v + b] - C_2(jj_v\Delta^{-1})_v - C_3(ij_v\Delta^{-1})_v + C_4(ji_v\Delta^{-1})_v = 0,\\ C_1(ii_x\Delta^{-1})_x - C_2[(jj_x\Delta^{-1})_x + b^{-1}] - C_3(ij_x\Delta^{-1})_x + C_4(ji_x\Delta^{-1})_x = 0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&C_1[-2(ii_v\Delta^{-1})_x + (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ii_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ii_x\Delta^{-1}]\\ &\quad + C_2[2(jj_v\Delta^{-1})_x - (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})jj_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})jj_x\Delta^{-1}]\\ &\quad + C_3[-2 + 2(ij_v\Delta^{-1})_x - (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ij_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ij_x\Delta^{-1}]\\ &\quad + C_4[-2(ji_v\Delta^{-1})_x + (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})ji_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} + b_v b^{-1})ji_x\Delta^{-1}] = 0,\\ &C_1[2(ii_x\Delta^{-1})_v + (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ii_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ii_x\Delta^{-1}]\\ &\quad + C_2[-2(jj_x\Delta^{-1})_v - (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})jj_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})jj_x\Delta^{-1}]\\ &\quad + C_3[-2(ij_x\Delta^{-1})_v - (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ij_v\Delta^{-1} + (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ij_x\Delta^{-1}]\\ &\quad + C_4[-2 + 2(ji_x\Delta^{-1})_v + (a_x a^{-1} - b_x b^{-1})ji_v\Delta^{-1} - (a_v a^{-1} - b_v b^{-1})ji_x\Delta^{-1}] = 0.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Рассмотрим два оператора общего вида, исключая ядро:

$$X_k = \big(C_1^k w + C_3^k t\big)\partial_t + \eta^k\partial_x + \zeta^k\partial_v + \big(C_2^k t + C_4^k w\big)\partial_w, \quad k = 1, 2.$$

Коммутатор является решением определяющих уравнений, значит, он оператор того же вида:

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] = {}&\big[w\big(C_1^1\big(C_3^2 - C_4^2\big) + C_1^2\big(C_4^1 - C_3^1\big)\big) + t\big(C_2^1 C_1^2 - C_2^2 C_1^1\big)\big]\partial_t\\ &+ \big(\eta^1\eta_x^2 + \zeta^1\eta_v^2 - \eta^2\eta_x^1 - \zeta^2\eta_v^1\big)\partial_x + \big(\eta^1\zeta_x^2 + \zeta^1\zeta_v^2 - \eta^2\zeta_x^1 - \zeta^2\zeta_v^1\big)\partial_v\\ &+ \big[w\big(C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1\big) + t\big(C_2^2\big(C_3^1 - C_4^1\big) + C_2^1\big(C_4^2 - C_3^2\big)\big)\big]\partial_w.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Если классификационные соотношения справедливы для произвольных $C_k$, $k=1,2,3,4$, то из (3.5) следуют равенства

$$jj_v=\alpha_1(x)\Delta,\quad ij_v=\alpha_2(x)\Delta,\quad ji_v=\alpha_3(x)\Delta,\quad b+(ii_v\Delta^{-1})_v=0;$$

$$ii_x=\beta_1(v)\Delta,\quad ij_x=\beta_2(v)\Delta,\quad ji_x=\beta_3(v)\Delta,\quad b^{-1}+(jj_x\Delta^{-1})_x=0.$$

Отсюда получим $\alpha_1 i=\alpha_2 j$, $j\beta_1=i\beta_3$, тем самым $\alpha_1=\alpha_2=\beta_1=\beta_3=0$, иначе $I=\mathrm{const}$ и

$$i_x=0,\quad j_v=0,\quad \Delta=i_vj_x,\quad j=\alpha_3j_x,\quad i=\beta_2i_v,\quad b=-\frac{\alpha_3(x)i(v)}{j(x)\beta_2(v)}.$$

Значит, коэффициент $b$ эквивалентен 1, что рассматривалось в п. 3.3.

Размерность алгебры меньше шести. Пусть $C_4=kC_1+nC_2+mC_3$, где $k$, $n$, $m$ — фиксированные постоянные, $C_1$, $C_2$, $C_3$ — произвольные постоянные. Из (3.5) следует, что $b=\varphi_v$, $b^{-1}=\psi_x$, $\varphi_v\psi_x=1$,

$$\begin{gathered}(i+kj)i_v=-\varphi\Delta,\quad j(ni_v-j_v)=\alpha_1(x)\Delta,\quad mji_v-ij_v=\alpha_2(x)\Delta,\\ (i+kj)i_x=\beta_1(v)\Delta,\quad j(ni_x-j_x)=\psi\Delta,\quad mji_x-ij_x=\beta_2(v)\Delta.\end{gathered}\tag{3.8}$$

Операторы $X_k$, отвечающие постоянным $C_k$, $k=1,2,3$, таковы:

$$X_1=w\partial_t+\varphi\partial_x+\beta_1(v)\partial_v+kw\partial_w,\quad X_2=-\alpha_1(x)\partial_x+\psi\partial_v+(t+nw)\partial_w,$$

$$X_3=t\partial_t-\alpha_2(x)\partial_x+\beta_2(v)\partial_v+mw\partial_w.$$

Вычисляя коммутаторы по формуле (3.7) и сравнивая коэффициенты при $\partial_t$ и $\partial_w$, получим $[X_1,X_2]=-X_3-nX_1$, $[X_1,X_3]=(1-m)X_1$, $[X_2,X_3]=(m-1)X_2$, откуда $k=0$, $m=-1$, $n=0$ и

$$\begin{gathered}\psi\varphi_v-\alpha_1\varphi_x+\varphi\alpha_1'=-\alpha_2,\quad \varphi\psi_x+\beta_1\psi_v-\psi\beta_1'=-\beta_2,\quad \alpha_2\varphi_x-\beta_2\varphi_v-\varphi\alpha_2'=2\varphi,\\ \beta_1\beta_2'-\beta_2\beta_1'=2\beta_1,\quad \alpha_1\alpha_2'-\alpha_2\alpha_1'=2\alpha_1,\quad \alpha_2\psi_x-\beta_2\psi_v+\psi\beta_2'=-2\psi_2.\end{gathered}\tag{3.9}$$

Если $\alpha_2=0$, то $\alpha_1=0$, $\psi\varphi_v=0$; противоречие с равенством $\varphi_v\psi_x=1$. Если $\beta_2=0$, то $\beta_1=0$, $\varphi\psi_x=0$; противоречие.

Значит, $\alpha_2\neq0$, $\beta_2\neq0$, и заменой $\langle\eta\rangle_1$, $\langle\zeta\rangle_2$ сделаем $\alpha_2=\beta_2=1$. Из (3.9) получим $\alpha_1=A_1e^{-2x}$, $\beta_1=B_1e^{-2v}$, $\varphi=e^{2x}\varphi_1(s)$, $\psi=e^{2v}\psi_1(s)$, $s=x+v$,

$$e^{2s}\psi_1\varphi_1'-A_1(4\varphi_1+\varphi_1')+1=0,\quad e^{2s}\varphi_1\psi_1'+B_1(4\psi_1+\psi_1')+1=0,\quad e^{2s}\varphi_1'\psi_1'=1,\tag{3.10}$$

где $A_1$, $B_1$ — постоянные.

Равенства (3.8) принимают вид

$$i=e^xi_1(s),\quad ij=\lambda(s),\quad \Delta=-\lambda'\neq0,\quad i_1i_1'=\varphi_1\lambda',$$

$$i_1(i_1+i_1')=-B_1e^{-2s}\lambda',\quad \lambda i_1^{-1}(\lambda i_1^{-1})'=A_1\lambda',\quad \lambda i_1^{-1}(-\lambda i_1^{-1}+(\lambda i_1^{-1})')=e^{2s}\psi_1\lambda'.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\varphi_1=(A_1+J_0\lambda^{-1})(2A_1+J_0\lambda^{-1})^{-2},\\ \psi_1=(2A_1+J_0\lambda^{-1})[B_1(2A_1+J_0\lambda^{-1})e^{-4s}+e^{-2s}],\\ \lambda i_1^{-2}=2A_1+J_0\lambda^{-1},\quad \lambda'=\frac{-\lambda(2A_1+J_0\lambda^{-1})}{A_1+J_0\lambda^{-1}+B_1e^{-2s}(2A_1+J_0\lambda^{-1})^2}.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Если $A_1 = 0$, то из (3.11) следует

$$J_0 i_1^2 = \lambda^2, \quad J_0 > 0, \quad \varphi_1 = J_0^{-1}\lambda, \quad \psi_1 = J_0\lambda^{-2}e^{-2s}(\lambda + B_1 J_0 e^{-2s}),$$

$$\lambda' = -\lambda^2(\lambda + J_0 B_1 e^{-2s})^{-1} \Rightarrow J_0 B_1 e^{-2s}(T_0 - 2\lambda) = \lambda^2,$$

а из (3.10) получим $\lambda(T_0 - \lambda)(T_0 - 2\lambda) + T_0^2 = 0$. Значит, $\lambda = \mathrm{const}$; противоречие.

Пусть $A_1 \neq 0$, тогда переносом по $x$ сделаем $A_1 = 1$.

Если $A_1 = 1$, $B_1 = 0$, то $i_1 = e^{-s}$, $\psi_1 = \lambda$, $\varphi_1 = \lambda(\lambda + J_0)(2\lambda + J_0)^{-2}$, $\lambda^2 e^{2s} = 2\lambda + J_0$, $\lambda' = -\lambda(2\lambda + J_0)(\lambda + J_0)^{-1}$. Из (3.10) вытекает, что $(2\lambda + J_0)^3 = 4\lambda(\lambda + J_0) + (\lambda + J_0)^2$, откуда $\lambda = \mathrm{const}$; противоречие.

Значит, $B_1 \neq 0$, и переносом по $v$ сделаем $B_1 = 1$. Равенства (3.11) принимают вид

$$\lambda^2 i_1^{-2} = 2\lambda + J_0, \quad \varphi_1 = \lambda(\lambda + J_0)(T_0 - 2\lambda)^{-2},$$

$$\lambda^2 e^{2s} = (2\lambda - J_0)(T_0 - 2\lambda), \quad \psi_1 = \lambda(T_0 - \lambda)(T_0 - 2\lambda)^{-2}.$$

Из (3.10) получим $T_0 = J_0$, так что $\lambda^2 e^{2s} + (2\lambda - J_0)^2 = 0$, и нет действительных решений.

Итак, постоянная $C_4$ линейно не выражается через $C_1$, $C_2$, $C_3$. Значит, она независимая и, возможно, $C_3 = kC_1 + nC_2$. Из классификационных соотношений (3.5) имеем

$$\begin{gathered} i(i - kj)_v + \varphi\Delta = 0, \quad (ni + j)j_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta, \\ i(i - kj)_x = \beta_1\Delta, \quad (j + ni)j_x + \psi\Delta = 0, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{gathered} \tag{3.12}$$

С помощью (3.12), (3.1) и (3.4) операторы, отвечающие постоянным $C_1$, $C_2$, $C_4$, принимают вид

$$X_1 = (w + kt)\partial_t + \varphi\partial_x + \beta_1(v)\partial_v, \quad X_2 = nt\partial_t + \alpha_1(x)\partial_x + \psi\partial_v + t\partial_w,$$

$$X_3 = -\alpha_2(x)\partial_x + \beta_2(v)\partial_v + w\partial_w.$$

Вычисляя коммутатор и сравнивая коэффициенты при $\partial_t$ и $\partial_w$, имеем $[X_1, X_2] = X_3 + kX_2$, откуда $nw - t = knt$; противоречие.

Постоянные $C_4$, $C_3$ независимы, $C_2 = kC_1$. Из (3.5) получим

$$\begin{gathered} ii_v - kjj_v + \varphi\Delta = 0, \quad ij_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta, \\ ii_x - kjj_x = \psi\Delta, \quad ij_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Операторы алгебры без ядра отвечают постоянным $C_1$, $C_3$, $C_4$:

$$X_1 = w\partial_t + \varphi\partial_x + \psi\partial_v + kt\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \alpha_1\partial_x - \beta_1\partial_v, \quad X_3 = -\alpha_2\partial_x + \beta_2\partial_v + w\partial_w.$$

Вычислим коммутаторы:

$$[X_1, X_2] = X_1 \Rightarrow k = 0, \quad [X_1, X_3] = -X_1, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\begin{gathered} -\alpha_1\varphi_x + \beta_1\varphi_v + \varphi\alpha_1' = \varphi, \; -\alpha_1\psi_x + \beta_1\psi_v - \psi\beta_1' = \psi, \; \alpha_2\varphi_x - \beta_2\varphi_v - \varphi\alpha_2' = -\varphi, \\ \alpha_2\psi_x - \beta_2\psi_v + \psi\beta_2' = -\psi, \quad \alpha_1\alpha_2' = \alpha_2\alpha_1', \quad \beta_1\beta_2' = \beta_2\beta_1'. \end{gathered} \tag{3.14}$$

Если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha_2 \neq 0$ (иначе $\Delta = 0$) и эквивалентность по $x$ делает $\alpha_2 = 1$. Тогда $\beta_1 \neq 0$ (иначе $\varphi = 0 \Rightarrow b = 0$) и эквивалентность по $v$ делает $\beta_1 = 1$. Отсюда $\varphi = e^v\varphi_1(x) = b$ (случай 3.3).

Значит, $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = A \neq 0$ — постоянная (иначе $\Delta = 0$), $\beta_1 \neq 0 \Rightarrow \beta_1 = 1$ (иначе следует случай 3.3), $\beta_2 = B \neq 0$ — постоянная. Из (3.14) вытекает, что

$$\varphi = e^{-x}\varphi_1(s), \quad \psi = e^{-x}\psi_1(s), \quad s = x + v,$$

$$(A - B)\varphi_1' = (A - 1)\varphi_1, \quad (A - B)\psi_1' = (A - 1)\psi_1.$$

Если $A \neq B$, то $\varphi_1 = \Phi_1 e^{Ks}$, $\psi_1 = \Psi_1 e^{Ks}$, $K = (A-1)(A-B)^{-1}$ и $\varphi$ есть произведение двух функций: одна зависит от $x$, другая — от $v$. Приходим к случаю 3.3.

Следовательно, $A = B = 1$. Из (3.13) $\Delta = ij_v = ji_v = ij_x = ji_x$, откуда $i = i_1(s)$, $j = j_1(s)$, тем самым $\Delta = 0$; противоречие.

Остается случай $C_1 = 0$, $C_2$–$C_4$ — произвольные постоянные. Из соотношений (3.5) получим

$$\begin{gathered} jj_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ij_v = \alpha_2(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_3(x)\Delta, \\ jj_x + \psi\Delta = 0, \quad ij_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_2(v)\Delta. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Операторы без ядра имеют вид

$$X_1 = \alpha_1\partial_x - \psi\partial_v + t\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \alpha_2\partial_x - \beta_1\partial_v, \quad X_3 = -\alpha_3\partial_x + \beta_2\partial_v + w\partial_w.$$

Коммутационные соотношения

$$[X_1, X_2] = -X_1, \quad [X_1, X_3] = X_1, \quad [X_2, X_3] = 0$$

дают уравнения

$$\begin{gathered} \alpha_1'\alpha_2 - \alpha_2'\alpha_1 = \alpha_1, \quad \alpha_2\psi_x - \beta_1\psi_v + \psi\beta_1' = \psi, \quad \alpha_1'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_1 = \alpha_1, \\ \alpha_3\psi_x - \beta_2\psi_v + \psi\beta_2' = \psi, \quad \alpha_3'\alpha_2 = \alpha_2'\alpha_3, \quad \beta_2'\beta_1 = \beta_1'\beta_2. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Если $j_v \neq 0$, то $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ и замена $x$ делает $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = -x = \alpha_2$, $i = -xj$, $\Delta = jj_v$, $j_x + \psi j_v = 0$, $-xj_x = \beta_1 j_v \Rightarrow \psi = \beta_1(v)x^{-1}$, $b^{-1} = -\beta_1(v)x^{-2}$. Пришли к случаю 3.3.

Если $j_v = 0$, то по (3.15) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_3 \neq 0$ и замена $x$ делает $\alpha_3 = 1$, $\Delta = j_x i_v \neq 0$, $j = j_x \Rightarrow j = e^x$; а по (3.16) $\beta_1 \neq 0$ и замена $v$ делает $\beta_1 = 1$, значит, $\beta_2 = B$ — постоянная, $\psi = e^{-v}\psi_1(x)$, откуда $b^{-1} = e^{-v}\psi_1'(x)$. Опять пришли к случаю 3.3.

При решении системы (3.3) предполагалось $\Delta \neq 0$. Рассмотрим случай $\Delta = 0 \Rightarrow j = f(i)$:

$$\eta i_x + \zeta i_v = -C_2 f - C_3 i, \tag{3.17}$$

$$f'(C_2 f + C_3 i) = C_1 i + C_4 f. \tag{3.18}$$

Если в (3.18) величины $C_k$ линейно независимы или линейно выражаются через два или три линейно независимые величины, то из (3.18) следуют 4, 3 или 2 уравнения, из которых, исключив $f'$, найдем $I = \mathrm{const}$ (случай 3.2).

Пусть $C_l = k_l C$, $l = 1, 2, 3, 4$, где $C$ — произвольный параметр, $k_l$ — фиксированные постоянные. Из (3.2) находим $\eta = k_1 C\varphi + \eta_1(x)$, $\zeta = k_2 C\psi + \zeta_1(v)$, $\varphi_v\psi_x = 1$. Параметру $C$ отвечает оператор $X_0$, другие операторы имеют вид $X = \eta_1\partial_x + \zeta_1\partial_v$. Множество $\{X\}$ образует идеал $J$, который может быть бесконечным. Рассмотрим двумерную подалгебру в $J$. Если она абелева, то заменами $\langle\eta(x)\rangle_1$, $\langle\zeta(v)\rangle_2$ приведем ее к виду $\{\partial_x, \partial_v\}$. В этом случае из (3.17) следует, что $i = \mathrm{const}$, тем самым $j = \mathrm{const}$, $I = \mathrm{const}$ (случай 3.2). Пусть двумерная подалгебра не абелева:

$$X_l = \eta_1^l(x)\partial_x + \zeta_1^l(v), \ l = 1, 2, \quad [X_1, X_2] = X_1.$$

Отсюда следуют уравнения подалгебры

$$\eta_1^1 \eta_1^{2'} - \eta_1^2 \eta_1^{1'} = \eta_1^1, \quad \zeta_1^1 \zeta_1^{2'} - \zeta_1^2 \zeta_1^{1'} = \zeta_1^1.$$

Если $\eta_1^1 \neq 0$, то заменой сделаем $\eta_1^1 = 1$, тем самым $\eta_1^2 = x$. При этом если $\zeta_1^1 \neq 0$, то заменой сделаем $\zeta_1^1 = 1$, $\zeta_1^2 = v$; если $\zeta_1^1 = 0$, $\zeta_1^2 \neq 0$, то заменой сделаем $\zeta_1^2 = 1$.

Из уравнений (3.17) имеем условия совместности $\eta_1^l i_x + \zeta_1^l i_v = 0$, $l = 1, 2$. Отсюда для двух случаев подалгебр $\{\partial_x + \partial_v,\ x\partial_x + v\partial_v\}$ и $\{\partial_x,\ x\partial_x + \partial_v\}$ получим $i = \mathrm{const}$ (случай 3.2).

Остается возможность $\zeta_1 = 0$. Чтобы допускаемая уравнениями (0.1) алгебра имела размерность больше четырех, необходимо, чтобы идеал $J$ был бесконечномерным.

Из (3.2) следует $2\eta_1' = (a_x a^{-1} + b_x b^{-1})\eta_1$, $a_x a^{-1} = b_x b^{-1}$, откуда $i = 0$ (случай 3.1).

В разобранных частных случаях допускаемая системой (0.1) алгебра имеет размерность меньше пяти. Справедливо более сильное утверждение.

**Теорема 4.** *Размерность алгебры, допускаемой нелинейной системой* (0.1), *не превосходит четырех.*

Для доказательства надо разобрать случай леммы 2.

Таким образом, если размерность допускаемой алгебры больше четырех, то преобразованиями эквивалентности система (0.1) сводится к линейной.

## § 4. Системы, допускающие трехмерные алгебры Ли

Для классификации систем (0.1), допускающих трехмерные алгебры Ли преобразований, воспользуемся классификацией Бианки неподобных алгебр Ли, приведенной, например, в [3]. В этой классификации над полем действительных чисел 9 структур. Из них только 7 разрешимых алгебр содержат абелеву двумерную подалгебру (в нашем случае это ядро допускаемых алгебр $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_w$). Рассмотрим по-порядку 7 разрешимых трехмерных алгебр. Структура задается коммутационными соотношениями. Все структуры содержат соотношение $[X_1, X_2] = 0$. Далее записываем лишь остальные два коммутационных соотношения. Третий оператор представим в виде $X_3 = \xi\partial_t + \eta\partial_x + \zeta\partial_v + \chi\partial_w$.

**4.1.** Абелева алгебра $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$. Из коммутационных соотношений следует, что $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\chi$ не зависят от $t$, $w$. Из определяющих уравнений (2.1) получим $\xi_v = \eta_v = \chi_x = \zeta_x = \chi_v = \xi_x = 0$, т. е. $\xi = C_{01}$, $\eta = C_{02}$, $\eta = \eta(x)$, $\zeta = \zeta(v)$. Постоянным соответствует ядро, поэтому можно считать их равными нулю. Преобразования эквивалентности делают $\eta = 1$, $\zeta = -\varepsilon$, где $\varepsilon$ равно 0 или 1. Последние два уравнения в (2.1) определяют $a = a(x + \varepsilon v)$, $b = b(x + \varepsilon v)$. Если $\varepsilon = 0$, то получим линейную систему (0.1). Нелинейная система (0.1) допускает оператор и имеет коэффициенты вида $X_3 = \partial_x - \partial_v$, $\quad a = a(x + v)$, $\quad b = b(x + v)$.

Аналогичные вычисления для других структур дают следующие представления.

**4.2.** $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_3, X_1] = 0$. Допускаемый оператор имеет вид $X_3 = w\partial_t + \varphi(x,v)\partial_x + \partial_v$, коэффициенты системы представляются в виде $b = \varphi_v$, $a = \varphi_v a_1(J)$, где $J$ — интеграл уравнения $dx = \varphi(x,v)dv$, $a_1(J)$ — произвольная функция, а функция $\varphi(x,v)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi\varphi_{xv} - \varphi_x\varphi_v + \varphi_{vv} = 0.$$

**4.3.** $[X_2, X_3] = 0$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad a = e^{-x}a_1(x+v), \quad b = e^{-x}b_1(x+v),$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$ — произвольные функции.

**4.4.** $[X_2, X_3] = X_1 + X_2$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = (t+w)\partial_t + \varphi(x,v)\partial_x + \partial_v + w\partial_w, \quad a = \varphi_v e^{-2v}a_1(J), \quad b = \varphi_v,$$

где $J$, $a_1$, $\varphi$ такие же, как в п. 4.2.

**4.5.** $[X_2, X_3] = X_2$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + w\partial_w, \quad a = e^{-2x}a_1(x+v), \quad b = b_1(x+v),$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$ — произвольные функции.

**4.6.** $[X_2, X_3] = qX_2$ $(q \neq 0, 1)$, $[X_1, X_3] = X_1$. Допускаемый оператор и коэффициенты системы принимают вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + qw\partial_w, \quad a = e^{-(q+1)x}a_1(x+v), \quad b = e^{(q-1)x}b_1(x+v),$$

где $a_1(s)$, $b_1(s)$ — произвольные функции.

**4.7.** $[X_2, X_3] = -X_1 + qX_2$ $(q^2 < 4)$, $[X_1, X_3] = X_2$. Допускаемый оператор и коэффициент $b$ системы принимают вид

$$X_3 = -w\partial_t - \varphi(x,v)\partial_x + \psi(x,v)\partial_v + (t+qw)\partial_w, \quad b = \varphi_v,$$

коэффициент $a$ находится из уравнения

$$\varphi a_x - \psi a_v = a(q + \varphi_x - \psi_v),$$

а функции $\varphi$, $\psi$ удовлетворяют системе уравнений

$$\varphi_v\psi_x = 1, \quad \psi_x(\psi\varphi_v)_v + \varphi_v(\varphi\psi_x)_x = q.$$

Итак, получили 7 различных типов систем (0.1), допускающих трехмерные алгебры Ли.

## § 5. Системы, допускающие четырехмерные алгебры Ли

Для классификации систем (0.1), допускающих четырехмерные алгебры Ли преобразований, воспользуемся классификацией Г. И. Кручковича неподобных алгебр Ли, приведенной, например, в [3]. В этой классификации над полем действительных чисел 11 структур, каждая из которых содержит двумерную абелеву подалгебру. В представлении операторами абелева подалгебра соответствует ядру $X_1 = \partial_t$, $X_2 = \partial_w$ с коммутатором $[X_1, X_2] = 0$. Другие два оператора представим в виде $X_{2+l} = \xi_l\partial_t + \eta_l\partial_x + \zeta_l\partial_v + \chi_l\partial_w$, $l = 1, 2$. Далее записываем остальные 5 коммутационных соотношений четырехмерной алгебры Ли.

**5.1.** $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_4] = cX_1$, $[X_2, X_4] = X_2$, $[X_3, X_4] = (c-1)X_3$. Коммутационные соотношения, кроме последнего, дают $\xi_{1w} = 1$, $\eta_{1w} = \zeta_{1w} = \chi_{1w} = 0$, $\xi_{1t} = \eta_{1t} = \zeta_{1t} = \chi_{1t} = 0$; $\xi_{2t} = c$, $\eta_{2t} = \zeta_{2t} = \chi_{2t} = 0$, $\xi_{2w} = \eta_{2w} = \zeta_{2w} = 0$, $\chi_{2w} = 1$.

Определяющие уравнения (2.1), кроме двух последних, принимают вид $\xi_{lx} = \eta_{lx} = \chi_{lx} = 0$, $\xi_{lv} = \chi_{lv} = 0$, $l = 1, 2$, $\eta_{1v} = b = \varphi_x$, $\eta_{2v} = 0$. Отсюда, используя преобразования эквивалентности, получим $\xi_1 = w$, $\eta_1 = \varphi(x, v)$, $\zeta_1 = \varepsilon$ равно 0 или 1, $\chi_1 = 0$; $\xi_2 = ct$, $\eta_2 = \varepsilon_1 = 0$ или 1, $\zeta_2 = \zeta(v)$, $\chi_2 = w$.

Если $\epsilon = 0$, то эквивалентностью сделаем $\zeta = \epsilon_2$ равными 0 или 1.

Последнее коммутационное соотношение дает

$$(c-1)\varphi + \epsilon_1\varphi_x + \zeta(v)\varphi_v = 0, \quad \epsilon\zeta' = \epsilon(c-1).$$

Оставшиеся определяющие уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{gathered} b\varphi_x = b_x\varphi + b_v\epsilon, \quad 2a\varphi_x = a_x\varphi + a_v\epsilon, \\ -(c-1+\zeta')b = b_x\epsilon_1 + b_v\zeta, \quad (-c-1+\zeta')a = a_x\epsilon_1 + a_v\zeta. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Если $\varepsilon = 1$, то $\zeta_1 = 1$, $\zeta = (c-1)v$ при $c \neq 1$, $\varphi = v^{-1}\varphi_1(s)$, $s = x - \varepsilon_1(c-1)^{-1}\ln|v|$,

$$a = v^{-2(c-1)^{-1}}a_1(s), \quad b = -v^{-2}(\varphi_1 + \epsilon_1(c-1)^{-1}\varphi_1'), \tag{5.2}$$

функция $a_1(s)$ находится из уравнения

$$a_1'(\varphi_1 - \epsilon_1(c-1)^{-1}) = a_1(\varphi_1' + 2(c-1)^{-1}), \tag{5.3}$$

а функция $\varphi_1(s)$ удовлетворяет уравнению

$$(c-1)(\varphi_1' + 2)(\varphi_1(c-1) + \varphi_1') + \epsilon_1(\varphi_1'(c-1) + \varphi_1'')(\varphi_1(c-1) - 1) = 0. \tag{5.4}$$

При этом операторы допускаемой алгебры таковы:

$$X_3 = w\partial_t + v^{-1}\varphi_1(s)\partial_x + \partial_v, \quad X_4 = ct\partial_t + \varepsilon_1\partial_x + (c-1)v\partial_v + w\partial_w. \tag{5.5}$$

Если $\varepsilon = 1$, $c = 1$, то $\zeta = k$ — постоянная, $\varphi = \varphi_1(\varepsilon_1 v - kx)$, $b = \varepsilon_1\varphi_1'$, откуда $\varepsilon_1 = 1$. Из определяющих уравнений (5.1) получим $-kb\varphi_1' = \varphi_1 b_x + b_v$, $b_x + kb_v = 0$, следовательно, $\varphi_1' = 0$, т. е. $b = 0$; противоречие.

Если $\varepsilon = 0$, то $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varphi = e^{(1-c)x}\varphi_1(v)$, $b = e^{(1-c)x}\varphi_1'$. Из определяющих уравнений (5.1) следует, что $\varepsilon_2\varphi_1'' = 0$, $a = e^{(1-c)x}a_1(v)$. Преобразование эквивалентности сводит систему (0.1) к линейной.

Если $\varepsilon = 0$, $c = 1$, то $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_2\varphi_v = 0$, отсюда $\varepsilon_2 = 0$, $c = 0$; противоречие.

Итак, алгебра с базисными операторами (5.5) допускается системой (0.1) с коэффициентами (5.2), которые определяются из уравнений (5.3), (5.4).

Аналогичные вычисления для других структур приводят к следующим представлениям.

**5.2.** $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_2$, $[X_1, X_4] = X_1$, $[X_2, X_4] = 0$, $[X_3, X_4] = 0$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x + \varepsilon\partial_v + w\partial_w, \quad X_4 = t\partial_t + n\partial_x + m\partial_v,$$

$$a = \exp\frac{(n-1)v - (m-\varepsilon)x}{m-\varepsilon n}, \quad b = \exp\frac{(m+\varepsilon)x - (n+1)v}{m-\varepsilon n}, \quad m \neq \varepsilon n,$$

где $\varepsilon$ равно 0 или 1, $m$, $n$ — постоянные.

**5.3.** $[X_1, X_3] = X_1$, $[X_2, X_3] = X_2$, $[X_1, X_4] = X_2$, $[X_2, X_4] = -X_1$, $[X_3, X_4] = 0$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = t\partial_t + \partial_x - \partial_v + w\partial_w, \quad X_4 = -w\partial_t - k^{-1}e^{k(x+v)}\partial_x - k^{-1}e^{-k(v+x)}\partial_v + w\partial_w,$$

$$a = -e^{-kv-(k+2)x}(1 + e^{2k(x+v)})^{1+k^{-1}}, \quad b = e^{k(x+v)}.$$

**5.4.** Разрешимые алгебры с абелевой трехмерной подалгеброй. Для четырех разрешимых алгебр с абелевой трехмерной подалгеброй имеются одинаковые коммутаторы $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$. Далее записываем остальные три коммутатора.

5.4.1. $[X_1, X_4] = \varepsilon X_1$, $[X_2, X_4] = kX_2$, $[X_3, X_4] = lX_3$, $\varepsilon$ равно 0 или 1. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = \varepsilon t\partial_t + l(x\partial_x + v\partial_v) + kw\partial_w,$$

$$a = -|x+v|^{2(k+\varepsilon)l^{-1}}, \quad b = -|x+v|^{(k-\varepsilon)l^{-1}}$$

при $l \neq 0$;

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = \varepsilon t\partial_t - m\partial_v + kw\partial_w,$$

$$a = -e^{(k+\varepsilon)m^{-1}(x+v)}, \quad b = -e^{(\varepsilon-k)m^{-1}(v+x)}$$

при $l = 0$. Здесь $k$, $l$, $m$, $n$ — постоянные.

5.4.2. $[X_1, X_4] = kX_1 + X_2$, $[X_2, X_4] = -X_1 + kX_2$, $[X_3, X_4] = lX_3$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x + \partial_v, \quad X_4 = (kt-w)\partial_t + (lx - \varphi_1(x-v))\partial_x + (lv + \psi_1(x-v))\partial_v + (t+kw)\partial_w,$$

$$b = -\varphi_1', \quad \varphi_1'\psi_1' = -1, \quad ab = m\exp(2(k-l+1)\operatorname{arctg} b), \quad b' = nb\exp(l\operatorname{arctg} b).$$

5.4.3. $[X_1, X_4] = kX_1 + X_2$, $[X_2, X_4] = kX_2$, $[X_3, X_4] = \varepsilon X_3$. Допускаемые операторы и коэффициенты системы имеют вид

$$X_3 = \partial_x - \partial_v, \quad X_4 = kt\partial_t + \varepsilon x\partial_x - (\varepsilon x - b'^{-1})\partial_v + (t+kw)\partial_w,$$

$$a = a(x+v), \quad b = b(x+v), \quad b' = -nbe^{-\varepsilon b}, \quad ab = e^{2(\varepsilon-k)b}.$$

Еще одна подалгебра отнесена в последнюю подсекцию.

**5.5.** Алгебры, не имеющие представления операторами. Для пяти алгебр нет нелинейных систем, допускающих их представления операторами:

1) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_4] = 2X_1$, $[X_2, X_4] = X_2$, $[X_3, X_4] = X_2 + X_3$;

2) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_1$, $[X_1, X_4] = qX_1$, $[X_2, X_4] = X_3$, $[X_3, X_4] = -X_2 + qX_3$, $q^2 < 4$;

3) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = 0$, $[X_1, X_4] = kX_1 + X_2$, $[X_2, X_4] = kX_2 + X_3$, $[X_3, X_4] = \varepsilon X_3$;

4) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_3$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_2, X_4] = -X_4$, $[X_3, X_4] = -2X_2$;

5) $[X_1, X_3] = 0$, $[X_2, X_3] = X_4$, $[X_1, X_4] = 0$, $[X_2, X_4] = -X_3$, $[X_3, X_4] = X_2$.

Для примера докажем утверждение для алгебры с номером 5.

Из коммутационных соотношений, кроме последнего, следует представление

$$\xi_1 = \xi(x,v)\sin w + \bar{\xi}(x,v)\cos w, \quad \xi_2 = \xi(x,v)\cos w - \bar{\xi}(x,v)\sin w,$$

$$\eta_1 = \eta(x,v)\sin w + \bar{\eta}(x,v)\cos w, \quad \eta_2 = \eta(x,v)\cos w - \bar{\eta}(x,v)\sin w,$$

$$\zeta_1 = \zeta(x,v)\sin w + \bar{\zeta}(x,v)\cos w, \quad \zeta_2 = \zeta(x,v)\cos w - \bar{\zeta}(x,v)\sin w,$$

$$\chi_1 = \chi(x,v)\sin w + \bar{\chi}(x,v)\cos w, \quad \xi_2 = \chi(x,v)\cos w - \bar{\chi}(x,v)\sin w.$$

Из определяющих уравнений (2.1), кроме двух последних, следует, что функции $\xi$, $\bar{\xi}$, $\zeta$, $\bar{\zeta}$, $\chi$, $\bar{\chi}$ зависят только от $v$:

$$\eta = a\bar{\xi}', \quad \bar{\eta} = -a\xi', \quad (a\xi')_v + b\xi = 0, \quad (a\bar{\xi}')_v + b\bar{\xi} = 0, \quad \frac{b}{a} = \frac{\bar{\chi}'}{\zeta} = -\frac{\chi'}{\zeta} \equiv n^{-1}(v).$$

Если $\xi' \neq 0$ ($\bar{\xi}' \neq 0$), то $a = \xi_0(x)\xi'^{-1}\exp(-\xi n^{-1}\xi'^{-1})$, $b = an^{-1}$. Замена $x$ преобразованием эквивалентности делает $\xi_0 = 1$. Далее годограф приводит к линейной системе.

Если $\xi' = \bar{\xi}' = 0$, то $\eta = \bar{\eta} = 0$, $a = n(v)b$, $\zeta = n\bar{\chi}'$, $\bar{\zeta} = -n\chi'$.

Замена $v$ преобразованием эквивалентности делает $n = 1$. Из предпоследнего уравнения определяющей системы (2.1) получим $b_v(\bar{\chi}'\sin w - \chi'\cos w) = 0$, откуда $\chi' = \bar{\chi}' = 0$, $\chi = A$, $\bar{\chi} = B$, где $A$, $B$ — постоянные. Из последнего уравнения определяющей системы (2.1) имеем $A\cos w - B\sin w = 0$ значит, $A = B = 0$, откуда $X_3 = X_4 = 0$; противоречие.

Итак, получили 7 типов систем (0.1), допускающих четырехмерные алгебры Ли.

## § 6. Доказательство теоремы 4

Учитывая рассмотренные частные случаи, теорему надо доказать при условии $I \neq \text{const}$, $(\ln b)_{xv} \neq 0$, $(g+h)_s \neq 0$. По лемме 2 функции $\xi$, $\eta$ линейны по переменным $t$, $w$, причем существенно зависят от них:

$$\eta = t\eta_1(x,v) + w\eta_2(x,v) + \eta_3(x,v), \quad \zeta = t\zeta_1(x,v) + w\zeta_2(x,v) + \zeta_3(x,v), \tag{6.1}$$

где $\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0$, $\zeta_1^2 + \zeta_2^2 \neq 0$.

Подстановка представления (6.1) в определяющую систему (2.1), кроме двух последних уравнений, дает

$$\eta_2 = a\xi_v, \quad t\eta_{1v} + w\eta_{2v} + \eta_{3v} = b\xi_w, \quad \eta_1 = ab\xi_x;$$

$$\xi_1 = a\chi_x, \quad \chi_t = b(t\zeta_{1x} + w\zeta_{2xv} + \zeta_{3x}), \quad b\zeta_2 = a\chi_v.$$

Изучение совместности этой системы приводит к представлению

$$\xi = C_1tw + \frac{1}{2}C_2w^2 + C_3w + C_7t + \xi_0(x,v), \quad \chi = \frac{1}{2}C_4t^2 + C_5tw + C_6t + C_8w + \chi_0(x,v) \tag{6.2}$$

и уравнениям

$$\eta_{kv} = C_k b, \quad b\zeta_{kx} = C_{3+k}, \quad k = 1, 2, 3; \tag{6.3}$$

$$\eta_1 = ab\xi_{0x}, \quad \eta_2 = a\xi_{0v}, \quad \zeta_1 = a\chi_{02}, \quad \zeta_2 = ab^{-1}\chi_{0v}, \tag{6.4}$$

где $C_i$ — произвольные постоянные.

Последние два уравнения системы (2.1) после подстановки представления решения (6.1), (6.2) и приравнивания к нулю коэффициентов при свободных переменных $t$, $w$ дают равенства

$$\begin{aligned} \eta_{1x} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_1, \\ C_5 - \zeta_{1v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta_1; \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned} \eta_{2x} - C_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_2, \\ -\zeta_{2v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta_2; \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \eta_{3x} - C_7 &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} + \frac{a_x}{a}\right)\eta_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} + \frac{a_v}{a}\right)\zeta_3, \\ C_8 - \zeta_{3v} &= \frac{1}{2}\left(\frac{b_x}{b} - \frac{a_x}{a}\right)\eta_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{a_v}{a}\right)\zeta_3. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Условия совместности равенств (6.4)

$$\left(\frac{\zeta_1}{a}\right)_v = \left(\frac{b}{a}\zeta_2\right)_x, \quad \left(\frac{\eta_1}{ab}\right)_v = \left(\frac{\eta_2}{a}\right)_x \tag{6.8}$$

определяют функции $\xi_0$, $\chi_0$ через криволинейные интегралы:

$$\xi_0 = \int a^{-1}b^{-1}(\eta_1\,dx + b\eta_2\,dv), \quad \chi_0 = \int a^{-1}(\zeta_1\,dx + b\zeta_2\,dv). \tag{6.9}$$

Условия совместности (6.5) с (6.3) при $k = 1$ имеют вид

$$\eta_1 j_x + \zeta_1 j_v = -C_1 i - C_5 j, \quad \eta_1 i_x + \zeta_1 i_v = -C_4 i. \tag{6.10}$$

Условия совместности (6.6) с (6.3) при $k = 2$ имеют вид

$$\eta_2 j_x + \zeta_2 j_v = -C_2 i, \quad \eta_2 i_x + \zeta_2 i_v = -C_1 i - C_5 j. \tag{6.11}$$

Условия совместности (6.7) с (6.3) при $k = 3$ имеют вид

$$\eta_3 j_x + \zeta_3 j_v = -C_3 i - C_8 j, \quad \eta_3 i_x + \zeta_3 i_v = -C_6 j - C_7 i. \tag{6.12}$$

Если $\Delta = j_x i_v - i_x j_v \neq 0$, то из (6.10)–(6.12) получим

$$\eta_1 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_1 i + C_5 j & j_v \\ C_4 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta_1 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_1 i + C_5 j & j_x \\ C_4 j & i_x \end{vmatrix} \tag{6.13}$$

— линейные однородные функции постоянных $C_1$, $C_4$, $C_5$;

$$\eta_2 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_2 i & j_v \\ C_1 i + C_5 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta_2 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_2 i & j_x \\ C_1 i + C_5 j & i_x \end{vmatrix} \tag{6.14}$$

— линейные однородные функции постоянных $C_1$, $C_2$, $C_5$;

$$\eta_3 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_3 i + C_8 j & j_v \\ C_7 i + C_6 j & i_v \end{vmatrix}, \quad \zeta_3 = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} C_3 i + C_8 j & j_x \\ C_7 i + C_6 j & i_x \end{vmatrix} \tag{6.15}$$

— линейные однородные функции постоянных $C_3$, $C_6$–$C_8$.

Подстановка в (6.8) приводит к классификационным соотношениям

$$\begin{gathered}(C_1 + ji^{-1}C_5)(ii_v + bji_x + 2bij_x) - 2C_2 bii_x - C_4 ji^{-1}(ij_v + bjj_x) = 0,\\ -(C_1 ij^{-1} + C_5)(2ji_v + ij_v + bjj_x) + C_2(i^2 j^{-1} i_v + bii_x) + 2C_4 jj_v = 0.\end{gathered} \tag{6.16}$$

Подстановка (6.13)–(6.15) в (6.3) приводит к шести классификационным соотношениям

$$\begin{gathered}-C_1\left[\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_v + b\right] + C_4\left(\frac{jj_v}{\Delta}\right)_v - C_5\left(\frac{ji_v}{\Delta}\right)_v = 0,\\ C_1\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_x - C_4\left[\left(\frac{jj_x}{\Delta}\right)_x + b^{-1}\right] + C_5\left(\frac{ji_x}{\Delta}\right)_x = 0;\end{gathered} \tag{6.17}$$

$$\begin{gathered}C_1\left(\frac{ij_v}{\Delta}\right)_v - C_2\left[\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_v + b\right] + C_5\left(\frac{jj_v}{\Delta}\right)_v = 0,\\ -C_1\left(\frac{ij_x}{\Delta}\right)_x + C_2\left(\frac{ii_x}{\Delta}\right)_x - C_5\left[\left(\frac{jj_x}{\Delta}\right)_x + b^{-1}\right] = 0;\end{gathered} \tag{6.18}$$

$$\begin{gathered}-C_3\left[\left(\frac{ii_v}{\Delta}\right)_v + b\right] + C_6\left(\frac{jj_v}{\Delta}\right)_v + C_7\left(\frac{ij_v}{\Delta}\right)_v - C_8\left(\frac{ji_v}{\Delta}\right)_v = 0,\\ C_3\left(\frac{ii_x}{\Delta}\right)_x - C_6\left[\left(\frac{jj_x}{\Delta}\right)_x + b^{-1}\right] - C_7\left(\frac{ij_x}{\Delta}\right)_x + C_8\left(\frac{ji_x}{\Delta}\right)_x = 0.\end{gathered} \tag{6.19}$$

Подстановка (6.13)–(6.15) в (6.5)–(6.7) приводит еще к шести классификационным соотношениям, которые здесь не выписываем.

Представление для решения (6.1), (6.2) определяющих уравнений (2.1) с учетом формул (6.9) принимают вид

$$\begin{gathered}\xi = C_1 tw + \frac{1}{2}C_2 w^2 + C_3 w + C_7 t + C_1\int\frac{i(-i_v\,dx + bj_v\,dv)}{ab\Delta} - C_2\int\frac{ii_v\,dv}{a\Delta}\\ +C_4\int\frac{jj_v\,dx}{ab\Delta} + C_5\int\frac{j(-i_v\,dx + bj_v\,dv)}{ab\Delta} + C_{01},\\ \eta = t\Big(-C_1\frac{ii_v}{\Delta} + C_4\frac{jj_v}{\Delta} - C_5\frac{ji_v}{\Delta}\Big) + w\Big(-C_2\frac{ii_v}{\Delta} + C_1\frac{ij_v}{\Delta} + C_5\frac{jj_v}{\Delta}\Big)\\ -C_3\frac{ii_v}{\Delta} + C_6\frac{jj_v}{\Delta} + C_7\frac{ij_v}{\Delta} - C_8\frac{ji_v}{\Delta},\\ \zeta = t\Big(C_1\frac{ii_x}{\Delta} - C_4\frac{jj_x}{\Delta} + C_5\frac{ji_x}{\Delta}\Big) + w\Big(-C_1\frac{ij_x}{\Delta} + C_2\frac{ii_x}{\Delta} - C_5\frac{jj_x}{\Delta}\Big)\\ +C_3\frac{ii_x}{\Delta} - C_6\frac{jj_x}{\Delta} - C_7\frac{ij_x}{\Delta} + C_8\frac{ji_x}{\Delta},\\ \chi = \frac{1}{2}C_4 t^2 + C_5 tw + C_6 t + C_8 w + C_1\int\frac{i(i_x\,dx - bj_x\,dv)}{a\Delta} + C_2\int\frac{bii_x\,dv}{a\Delta}\\ -C_4\int\frac{jj_x\,dx}{a\Delta} + C_5\int\frac{j(i_x\,dx - bj_x\,dv)}{a\Delta} + C_{02}.\end{gathered} \tag{6.20}$$

Из этих формул видно, что размерность векторного пространства решений не более 10 по числу постоянных. Ядру отвечают постоянные $C_{01}$, $C_{02}$.

Имеется 14 классификационных соотношений на постоянные $C_k$ и функции $a$, $b$.

Векторное пространство решений образует алгебру Ли, поэтому коммутатор операторов $X_l$, $l = 1, 2$, отвечающих наборам постоянных $C_k^l$, $k = 1, \dots, 8$, снова является решением.

Вычисляя коммутатор по правилу

$$[X_1, X_2] = (X_1\xi^2 - X_2\xi^1)\partial_t + (X_1\eta^2 - X_2\eta^1)\partial_x + (X_1\zeta^2 - X_2\zeta^1)\partial_v + (X_1\chi^2 - X_2\chi^1)\partial_w,$$

убедимся, что при $\partial_t$ и $\partial_w$ стоят выражения с кубическими слагаемыми по переменным $t$ и $w$, а при $\partial_x$, $\partial_v$ — выражения с квадратичными слагаемыми по $t$ и $w$. Поскольку коммутатор должен линейно выражаться через представление решения (6.20), то коэффициенты при кубических слагаемых по $t$, $w$ при $\partial_t$, $\partial_w$ и при квадратичных слагаемых по $t$, $w$ при $\partial_x$, $\partial_v$ равны нулю. Это приводит к пропорциям

$$\frac{C_5^2}{C_4^2} = \frac{C_5^1}{C_4^1}, \quad \frac{C_5^2}{C_2^2} = \frac{C_5^1}{C_2^1}, \quad \frac{C_4^2}{C_1^2} = \frac{C_4^1}{C_1^1} \tag{6.21}$$

и уравнениям

$$\begin{gathered}
C_4^1\eta_2^2 + 2\eta_1^1\eta_{1x}^2 + 2\zeta_1^1\eta_{1v}^2 = C_4^2\eta_2^1 + 2\eta_1^2\eta_{1x}^1 + 2\zeta_1^2\eta_{1v}^1,\\
\begin{aligned}
C_1^1\eta_1^2 + C_5^1\eta_2^2 + \eta_1^1\eta_{2x}^2 + \eta_2^1\eta_{1x}^2 + \zeta_1^1\eta_{2v}^2 + \zeta_2^1\eta_{1v}^2&\\
= C_1^2\eta_1^1 + C_5^2\eta_5^1 + \eta_1^2\eta_{2x}^1 + \eta_2^2\eta_{1x}^1 + \zeta_1^2\eta_{2v}^1 + \zeta_2^2\eta_{1v}^1&,
\end{aligned}\\
C_2^1\eta_1^2 + 2\eta_2^1\eta_{2x}^2 + 2\zeta_2^1\eta_{2v}^2 = \eta_2^2\eta_{2x}^1 + 2\zeta_2^2\eta_{2v}^1 + C_2^2\eta_1^1,\\
C_4^1\zeta_2^2 + 2\eta_1^1\zeta_{1x}^2 + 2\zeta_1^1\zeta_{1v}^2 = C_4^2\zeta_2^1 + 2\eta_1^2\zeta_{1x}^1 + 2\zeta_1^2\zeta_{1v}^1,\\
\begin{aligned}
C_1^1\zeta_1^2 + C_5^1\zeta_2^2 + \eta_1^1\zeta_{2x}^2 + \eta_2^1\zeta_{1x}^2 + \zeta_1^1\zeta_{2v}^2 + \zeta_2^1\zeta_{1v}^2&\\
= C_1^2\zeta_1^1 + C_5^2\zeta_2^1 + \eta_1^2\zeta_{2x}^1 + \eta_2^2\zeta_{1x}^1 + \zeta_1^2\zeta_{2v}^1 + \zeta_2^2\zeta_{1v}^1&,
\end{aligned}\\
C_2^1\zeta_1^2 + 2\eta_2^1\zeta_{2x}^2 + 2\zeta_2^1\zeta_{2v}^2 = C_2^2\zeta_1^1 + 2\eta_2^2\zeta_{2x}^1 + 2\zeta_2^2\zeta_{2x}^1.
\end{gathered} \tag{6.22}$$

Из соотношений (6.21) следует, что линейное пространство величин $C_1$, $C_2$, $C_4$, $C_5$ одномерно. Рассмотрим четыре возможных случая.

**6.1.** $C_4 = kC_1$, $C_2 = nC_1$, $C_5 = lC_1$, $C_1 \neq 0$. Постоянной $C_1 \neq 0$ отвечает оператор (это следует из (6.20))

$$\begin{aligned}
X_0 = \big(tw + (1/2)nw^2 + C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0\big)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x&\\
+ \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_v + \big((1/2)kt^2 + ltw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w&.
\end{aligned}$$

При $C_1 = 0$ получим еще не более четырех линейно независимых операторов, отличающихся друг от друга лишь значением постоянных $C_3$, $C_6$–$C_8$:

$$X_\sigma = \big(C_3^\sigma w + C_7^\sigma t\big)\partial_t + \eta_3^\sigma\partial_x + \zeta_3^\sigma\partial_v + \big(C_8^\sigma w + C_6^\sigma t\big)\partial_w, \quad \sigma = 1, 2, \dots, p, \tag{6.23}$$

$p \in \mathbb{N}$, $p \leq 4$.

Вычислим коммутаторы и запишем условия алгебры:

$$[X_0, X_\sigma] = \lambda_\sigma X_0 + \sum_{\tau \neq 0} \mu_\tau^\sigma X_\tau. \tag{6.24}$$

Сравнивая коэффициенты при степенях переменных $t$ и $w$, получим

$$C_6^\sigma = (1/2)kC_3^\sigma, \quad C_3^\sigma(kn-4l) = 0, \quad \lambda_\sigma = -lC_3^\sigma - C_8^\sigma,$$

$$C_3^\sigma(ln-2)+n\big(C_7^\sigma - C_8^\sigma\big) = 0, \quad k(C_8^\sigma - C_7^\sigma) = 0, \quad C_3^\sigma(l^2-(1/2)k)+l\big(C_8^\sigma - C_7^\sigma\big) = 0.$$

Решения этих уравнений представляются четырьмя случаями.

Если $C_3 \neq 0$, $C_8 \neq C_7$, то $k = l = 0$, $C_6 = 0$, $C_3 = \frac{1}{2}n(C_7 - C_8)$, $\lambda_\sigma = -C_8^\sigma$, $n \neq 0$.

Если $C_3 = 0$, $C_8 \neq C_7$, то $n = k = l = 0$, $C_6 = 0$, $\lambda_\sigma = -C_8^\sigma$.

Если $C_3 \neq 0$, $C_8 = C_7$, то $n = 2l^{-1}$, $k = 2l^2$, $\lambda_\sigma = -lC_3^\sigma - C_7^\sigma$, $C_6 = l^2C_3$.

Если $C_3 = 0$, $C_8 = C_7$, то $C_6 = 0$, $\lambda_\sigma = C_7^\sigma$ и алгебра четырехмерна.

В первых трех случаях алгебра может быть пятимерной. Считаем, что $\sigma = 1, 2$.

6.1.1. $C_6 = 0$, $C_3 = \frac{1}{2}n(C_7 - C_8)$, $n \neq 0$, $k = l = 0$, $C_7 \neq C_8$, $C_7$, $C_8$ — произвольные постоянные. Выберем базис алгебры так, что $C_7^1 = 1$, $C_8^1 = 0$, $C_7^2 = 0$, $C_8^2 = 1$, $C_7^0 = C_8^0 = 0$ и операторы базиса принимают вид

$$X_0 = (tw + (1/2)nw^2 + \xi_0)\partial_t + (t\eta_1 + w\eta_2)\partial_x + (t\zeta_1 + w\zeta_2)\partial_v + \chi_0\partial_w,$$

$$X_1 = ((1/2)nw + t)\partial_t + \eta_3^1\partial_x + \zeta_3^1\partial_v, \quad X_2 = -(1/2)nw\partial_t + \eta_3^2\partial_x + \zeta_3^2\partial_v + w\partial_w,$$

откуда

$$[X_1, X_2] = 0. \tag{6.25}$$

По формулам (6.20) имеем $\Delta\eta_3^1 = ij_v$, $\Delta\eta_3^2 = -ji_v$, $\Delta\zeta_3^1 = -ij_x$, $\Delta\zeta_3^2 = ji_x$, $\Delta\eta_1 = -ii_v$, $\Delta\eta_2 = i(j_v - ni_v)$, $\Delta\zeta_1 = ii_x$, $\Delta\zeta_2 = i(ni_x - j_x)$. Отсюда следует $\eta_2 = n\eta_1 + \eta_3^1$, $\zeta_2 = n\zeta_1 + \zeta_3^1$ и из условий алгебры (6.24), (6.25) получим $\eta_1 = \zeta_1 = 0$, т. е. $i_x = i_v = 0$ или $\Delta = 0$; противоречие.

6.1.2. $C_3 = 0$, $C_6 = 0$, $n = k = l = 0$, $C_7 \neq C_8$, $C_7$, $C_8$ — произвольные постоянные. Выберем базис так, чтобы $C_7^1 = 1$, $C_8^1 = 0$, $C_7^2 = 0$, $C_8^2 = 1$, $C_7^0 = C_8^0 = 0$. Тогда операторы базиса имеют вид

$$X_0 = (tw + \xi_0)\partial_t + (t\eta_1 + w\eta_2)\partial_x + (t\zeta_1 + w\zeta_2)\partial_v + \chi_0\partial_w,$$

$$X_1 = t\partial_t + \eta_3^1\partial_x + \zeta_3^1\partial_v, \quad X_2 = \eta_3^2\partial_x + \zeta_3^2\partial_v + w\partial_w \quad \Rightarrow \quad (6.25).$$

По формулам (6.20) $\eta_3^1 = ij_v\Delta^{-1} = \eta_2$, $\zeta_3^1 = -ij_x\Delta^{-1} = \zeta_2$, $\eta_3^2 = -ji_v\Delta^{-1} = ji^{-1}\eta_1$, $\zeta_3^2 = ji_x\Delta^{-1} = ji^{-1}\zeta_1$. Условия алгебры (6.23), (6.25) выполняются в силу (6.10) и (6.11). Из классификационных соотношений (6.16)–(6.19) имеем

$$ii_v + b(ji_x + 2ij_x) = 0 \quad 2ji_v + ij_v + bjj_x = 0,$$

$$ii_v = -\varphi\Delta, \quad ij_v = \alpha_1(x)\Delta, \quad ji_v = \alpha_2(x)\Delta,$$

$$ii_x = \beta_1(v)\Delta, \quad ij_x = \beta_2(v)\Delta, \quad ji_x = \beta_3(v)\Delta, \quad \text{где } b = \varphi_v.$$

Подстановка в первое равенство выражений для производных дает уравнение для определения $\varphi$:

$$\varphi = \varphi_0(x)\exp\left(\int(\beta_1 + 2\beta_2)^{-1}\,dv\right) \quad \Rightarrow \quad (\ln b)_{xv} = 0;$$

противоречие.

6.1.3. $C_8 = C_7$, $C_6 = l^2C_3$, $n = 2l^{-1}$, $k = 2l^2$, $l \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $C_7$, $C_3$ — произвольные постоянные. Базис пятимерной алгебры такой:

$$X_0 = (tw + l^{-1}w^2 + \xi_0)\partial_t + (t\eta_1 + w\eta_2)\partial_x + (t\zeta_1 + w\zeta_2)\partial_v + (l^2t^2 + ltw + \chi_0)\partial_w,$$

$$X_1 = w\partial_t + \eta_3^1\partial_x + \zeta_3^1\partial_v + l^2 t\partial_w, \quad X_2 = t\partial_t + \eta_3^2\partial_x + \zeta_3^2\partial_v + w\partial_w \Rightarrow (6.25),$$

где в силу (6.20) $\eta_1 = \Delta^{-1}(-ii_v + 2l^2 ji_v - lji_v)$, $\eta_2 = (-2l^{-1}ii_v + ij_v + ljj_v)\Delta^{-1}$, $\zeta_1 = \Delta^{-1}(ii_x - 2l^2 jj_x + lji_x)$, $\zeta_2 = \Delta^{-1}(-ij_x + 2l^{-1}ii_x - ljj_x)$, $\eta_3^1 = \Delta^{-1}(-ii_v + l^2 jj_v)$, $\zeta_3^1 = \Delta^{-1}(ii_x - l^2 jj_x,)$ $\eta_3^2 = \Delta^{-1}(ij_v - ji_v)$, $\zeta_3^2 = \Delta^{-1}(-ij_x + ji_x) \Rightarrow \zeta_1 + l\zeta_2 = 3\zeta_3^1 + l\zeta_3^2$, $\eta_1 + l\eta_2 = 3\eta_3^1 + l\eta_3^2$.

Из условий алгебры $[X_0, X_1] = -lX_0$, $[X_0, X_2] = -X_0$, $[X_1, X_2] = 0$ следуют соотношения $3\eta_3^1 + l\eta_3^2 = 0$, $3\zeta_3^1 + l\zeta_3^2 = 0$.

Из (6.19) получим $\eta_{3v}^1 = b$, $\eta_{3v}^2 = 0$, $\zeta_{3x}^1 = l^2 b^{-1}$, $\zeta_{3x}^2 = 0$. Отсюда $b = 0$; противоречие.

**6.2.** $C_1 = 0$, $C_4 = kC_2$, $C_5 = lC_2$, $C_2 \neq 0$. Постоянной $C_2 \neq 0$ соответствует оператор (по формулам (6.20))

$$\begin{aligned} X_0 = ((1/2)w^2 + C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x \\ + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_v + \big((1/2)kt^2 + ltw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w. \end{aligned}$$

Если положить $C_2 = 0$, то получим еще не более четырех линейно независимых операторов вида (6.23), отличающихся друг от друга лишь значениями постоянных $C_3$, $C_6$–$C_8$. Выполняются условия алгебры (6.24).

Приравнивая к нулю коэффициенты при квадратичных по $t$, $w$ слагаемых, приходим к равенствам

$$\lambda_\sigma = C_7^\sigma - 2C_8^\sigma, \quad C_6 = 0, \quad C_3 l = C_3 k = 0, \quad l(C_7 - C_8) = 0, \quad k(C_7 - C_8) = 0.$$

Алгебра четырехмерна, если $C_3 = C_6 = 0$, $C_7 = C_8$.

Если $k = l = 0$, $C_6 = 0$, то алгебра может быть шестимерна. В этом случае из классификационных соотношений (6.16) следует, что $i_x = 0$, $i_v = 0$, откуда $\Delta = 0$; противоречие.

**6.3.** $C_1 = C_2 = 0$, $C_5 = kC_4$, $C_4 \neq 0$. Постоянной $C_4 \neq 0$ отвечает оператор (6.20):

$$\begin{aligned} X_0 = \big(C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0\big)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_v \\ + \big((1/2)t^2 + ktw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w. \end{aligned}$$

Другие операторы с $C_4 = 0$ имеют вид (6.23). Из уравнения алгебры (6.24) получаем $C_3 = 0$ и $C_8 = C_7 + 2kC_6$ при $k \neq 0$.

Если $k = 0$, то $C_3 = C_1 = C_2 = C_5 = 0$, $C_4 \neq 0$ и из (6.16) вытекает, что $j_v = j_x = 0 \Rightarrow \Delta = 0$; противоречие.

При $k \neq 0$ из (6.16)–(6.19) получим $b^{-1} = \psi_x$;

$$k(ii_v + bji_x + 2bij_x) = ij_v + bjj_x, \quad k(2ji_v + ij_v + bjj_x) = 2jj_v; \tag{6.26}$$

$$jj_v - kji_v = \alpha_1(x)\Delta,\ jj_v = \alpha_2(x)\Delta,\ jj_v - 2kji_v = \alpha_3(x)\Delta,\ ij_v - ji_v = \alpha_4(x)\Delta; \tag{6.27}$$

$$jj_x + \psi\Delta = kjj_x = \beta_1(v)\Delta = 2kji_x - \beta_2(v)\Delta, \quad ji_x - ij_x = \beta_3(v)\Delta. \tag{6.28}$$

При $\alpha_2 \neq 0$ из уравнений (6.27) следует, что $i = j\alpha(x)$, $\Delta = -\alpha' jj_v \neq 0$, $\alpha_1 = (k\alpha - 1)\alpha'^{-1}$, $\alpha_2 = -\alpha'^{-1}$, $\alpha_3 = (2k\alpha - 1)\alpha'^{-1}$ и $\alpha_4 = 0$.

Из уравнений (6.28) вытекает, что $j = j_0(x)\beta(v)$, $j_0(x) = J_0\alpha^{m-1}$, $J_0$, $m$ — постоянные, $\beta_1 = \beta_2 = -mk\beta\beta'^{-1}$, $\beta_3 = -\beta\beta'^{-1}$.

Из (6.26), исключая $b$, получим тождество по переменной $\alpha$:

$$(m-1)k\alpha(k\alpha - 1) - (3k\alpha - 2)\left[(m-1)(3k\alpha - 1) + k\alpha\right] = 0.$$

При $\alpha = 0$ будет $m = 1$. Остается тождество $3k\alpha = 2$, из которого $k = 0$, $2 = 0$; противоречие.

В завершение рассмотрим случай $\alpha_2 = 0$, при котором $j = j_0(x)$, $\Delta = j_0' i_v \neq 0$. Из (6.28) следует, что $i = i_0(x)\beta(v)$, $\psi = \beta_1 - j_0 i_0^{-1}\beta'^{-1} \Rightarrow b^{-1} = \psi_x = -\big(j_0 i_0^{-1}\big)'\beta'^{-1} \Rightarrow (\ln b)_{xv} = 0$; противоречие.

**6.4.** $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, $C_5 \neq 0$. Постоянной $C_5$ соответствует оператор

$$X_0 = \big(C_3^0 w + C_7^0 t + \xi_0\big)\partial_t + \big(t\eta_1 + w\eta_2 + \eta_3^0\big)\partial_x + \big(t\zeta_1 + w\zeta_2 + \zeta_3^0\big)\partial_w + \big(tw + C_6^0 t + C_8^0 w + \chi_0\big)\partial_w.$$

Другие операторы алгебры имеют вид (6.23). Из уравнений алгебры (6.24) следует, что $C_3 = 0$, $C_6 = 0$. Из (6.17)–(6.19) получаем $i = \alpha(x)j$, $j = j_0(x)\beta(v)$, $j_0 = J_0\alpha^k$; $J_0$, $k$ — постоянные. Тогда из (6.16)

$$k = -3/8, \quad b = -3\alpha j_0 {j'}_0^{-1}\beta'\beta^{-1},$$

т. е. $(\ln b)_{xv} = 0$; противоречие.

Рассмотрим последнюю возможность.

**6.5.** $\Delta = 0 \Rightarrow j = f(i)$. Из (6.10)–(6.12) получим

$$f'(i)C_4 f = C_1 i + C_5 f, \quad f'(C_1 i + C_5 f) = C_2 i, \quad f'(C_6 f + C_7 i) = C_3 i + C_8 f, \tag{6.29}$$

при этом $f i^{-1} = g \neq \mathrm{const}$. С переменной $g$ уравнения (6.29) принимают вид

$$C_4(ig' - g) = C_1 g^{-1} + C_5, \quad (ig' - g)(C_5 g + C_1) = C_2.$$

Исключая $g'$, имеем тождество по переменной $g$:

$$C_2 C_4 g = (C_1 + C_5 g)^2.$$

Отсюда $C_5 = C_1 = 0$, $C_2 C_4 = 0$.

Если $C_2 = 0$, $C_4 = 1$, то получим противоречие из 1-го уравнения (6.29). Если $C_2 = 1$, $C_4 = 0$, то получим противоречие из 2-го уравнения (6.29).

Итак, если размерность алгебры Ли, допускаемой нелинейной системой (0.1), больше четырех, то приходим к противоречию.

## Заключение

При решении задачи групповой классификации нелинейной системы (0.1) использованы следующие факты.

1. Вычислена бесконечная группа преобразований эквивалентности и ее инварианты.
2. Система определяющих уравнений алгебры Ли приведена в инволюцию.
3. Использовано важное свойство определяющих уравнений: коммутатор двух решений есть решение определяющей системы.
4. Доказано, что размерность алгебры Ли , допускаемой нелинейной системой (0.1), не больше четырех.
5. Для классификации систем (0.1) использованы неподобные структуры алгебр Ли размерностей 3 и 4.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Ibragimov N. H., Khabirov S. V.* Contact transformation group classification of nonlinear wave equation // Nonlinear Dynam. 2000. V. 22. P. 61–71.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Петров А. З.* Новые методы в общей теории относительности. М.: Наука, 1966.
4. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.


*Статья поступила 14 ноября 2007 г.*

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики УНЦ РАН, пр. Октября, 71, Уфа 450054
habirov@anrb.ru