Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 510.67

ОБ ОБОГАЩЕНИЯХ И РАСШИРЕНИЯХ ВЛАСТНЫХ ОРГРАФОВ

С. В. Судоплатов

Аннотация. Исследуется проблема обогащения и расширения структуры стабильного властного орграфа до структуры стабильной эренфойхтовой теории. Определяются понятия ти́повой нестабильности и ти́пового свойства строгого порядка. Устанавливается наличие ти́пового свойства строгого порядка у любой бесконтурной графовой структуры с бесконечной цепью. Доказывается, что простейший вид обогащения властного орграфа до структуры эренфойхтовой теории — обогащение 1-несущественной упорядоченной раскраской и локально графово $\exists$-определимыми многоместными отношениями, позволяющими взаимно реализовывать неглавные типы, — не способен сохранить структуру в классе стабильных структур и, более того, в силу ти́пового свойства строгого порядка порождает формульное свойство строгого порядка. Определяется понятие локально счетно категоричной теории (LCC-теории) и доказывается, что если $p_1(x), \dots, p_n(x)$ — все неглавные 1-типы данной LCC-теории, то подчинение типу q всех типов $r(x_1, \dots, x_m)$, содержащих $p_{i_1}(x_1) \cup \dots \cup p_{i_m}(x_m)$, влечет властность типа q.

Ключевые слова: властный орграф, властный тип, ти́пово стабильная теория, эренфойхтова теория, локально счетно категоричная теория.

В работе исследуется проблема обогащения и расширения структуры властного орграфа до структуры *эренфойхтовой* теории, т. е. не счетно категоричной теории с конечным числом попарно не изоморфных счетных моделей.

Понятие властного орграфа введено автором в работе [1], в которой показано локальное присутствие властного орграфа в структурах любой эренфойхтовой теории. При этом существование самого́ властного орграфа вытекает из свойства инвариантности окрестностей властного типа. В работе [2] автором предложен пример генерического властного орграфа и на основе несущественной раскраски [3] построены обогащения властного орграфа, демонстрирующие все возможные реализации эренфойхтовых теорий относительно их двух основных характеристик (предпорядков Рудина — Кейслера и функций распределения числа предельных моделей), установленных в [4].

Мы покажем, что простейший вид обогащения, предложенный в [2], — обогащение 1-несущественной упорядоченной раскраской и локально графово $\exists$-определимыми многоместными отношениями, позволяющими взаимно реализовывать неглавные типы, — не способен сохранить структуру в классе стабильных структур: 1-несущественная упорядоченная раскраска с локально графово $\exists$-определимыми отношениями, взаимореализующими неглавные типы, влечет

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05–01–00411, 09–01–00336) и Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–4787.2006.1, НШ–344.2008.1).

существование формулы с двумя свободными переменными, обладающей свойством строгого порядка (теорема 2.1).

Основная причина наличия свойства строгого порядка после обогащения властного орграфа с неограниченными длинами кратчайших маршрутов — так называемое ти́повое свойство строгого порядка, определяемое в п. 1, которое в силу конструкции обогащения из работы [2] превращается в формульное свойство строгого порядка.

Как известно, классические и близкие к ним примеры эренфойхтовых теорий строятся константными обогащениями моделей счетно категоричных теорий, которые, с одной стороны, являются несущественными раскрасками [4] властных орграфов, а с другой стороны, *почти ω-категоричны* [5], т. е. для любых типов $p_1(x_1),\dots,p_n(x_n)$ данной теории существует лишь конечное число типов этой же теории, расширяющих $p_1(x_1)\cup\dots\cup p_n(x_n)$. При этом ни представимость в виде счетных объединений ω-категоричных структур, ни почти ω-категоричность не совместимы со стабильностью и эренфойхтовостью [6–8]. Более того, условие $I(T,\omega)=3$ для почти ω-категоричной теории T влечет интерпретируемость в T плотного линейного порядка [5].

В п. 3 мы определяем еще одно понятие, близкое к счетной категоричности, — понятие локально счетно категоричной теории, или LCC-теории. Модели таких теорий после проведения морлизации можно рассматривать как объединения цепей счетно категоричных структур. Мы покажем, что если $p_1(x),\dots,p_n(x)$ — все неглавные 1-типы данной LCC-теории, то подчинение типу q всех типов $r(x_1,\dots,x_m)$, содержащих $p_{i_1}(x_1)\cup\dots\cup p_{i_m}(x_m)$, влечет властность типа q (теорема 3.1). Таким образом, в классе LCC-теорий с единственным неглавным 1-типом $p(x)$ проблема обогащения структуры властного орграфа в структуре типа $p(x)$ (расширенной структурой некоторой окрестности типа $p(x)$) до структуры с властным типом сводится к проблеме обогащения расширенной структуры властного орграфа до структуры с *внутренне* властным типом p, т. е. типом, реализуемость которого в произвольной модели $\mathscr{M}$ влечет реализуемость в $\mathscr{M}$ всех типов $r(x_1,\dots,x_n)\supseteq p(x_1)\cup\dots\cup p(x_n)$.

В дальнейшем без пояснений мы будем использовать стандартную теоретико-модельную терминологию из [9, 10], аппарат теории графов [11], а также понятия и обозначения из работ [1–4].

Все рассматриваемые теории будут считаться элементарными, полными, счетными и не имеющими конечных моделей.

1. Ти́пово нестабильные теории

Следующие понятия обобщают соответствующие понятия теории классификаций [9, 10].

Пусть $q(\bar{x},\bar{y})$ — некоторый (не обязательно полный) тип теории T, $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — непересекающиеся наборы переменных, $\mathscr{M}$ — некоторая счетно насыщенная модель теории T.

Тип $q(\bar{x},\bar{y})$ называется *нестабильным*, или типом, имеющим *свойства порядка*, если существуют кортежи $\bar{a}_n$, $\bar{b}_n$, $n\in\omega$, для которых выполняется $\models q(\bar{a}_i,\bar{b}_j)\Leftrightarrow i\le j$.

Будем говорить, что тип $q(\bar{x},\bar{y})$ имеет *свойство независимости*, если существуют кортежи $\bar{a}_n$, $n\in\omega$, такие, что для любого множества $w\subseteq\omega$ существует кортеж $\bar{b}_w$, для которого выполняется $\models q(\bar{a}_n,\bar{b}_w)\Leftrightarrow n\in w$.

Тип $q(\bar{x}, \bar{y})$ имеет *свойство строгого порядка*, если существуют кортежи $\bar{a}_n$, $n \in \omega$, такие, что $q(\bar{a}_n, \mathscr{M}) \supsetneqq q(\bar{a}_{n+1}, \mathscr{M})$ для всех $n \in \omega$.

Теория T называется *ти́пово стабильной*, если T не имеет нестабильных типов $q(\bar{x}, \bar{y})$. Теория T называется *ти́пово нестабильной* или имеющей *ти́повое свойство порядка*, ти́повое свойство независимости или ти́повое свойство строгого порядка, если соответствующее свойство имеет некоторый тип $q(\bar{x}, \bar{y})$ теории T.

Ясно, что свойства порядка, независимости и строгого порядка для типов обобщают соответствующие понятия для формул (см. [9, с. 342]), а ти́повое свойство порядка является следствием как ти́пового свойства независимости, так и ти́пового свойства строгого порядка.

Пусть $\Gamma = \langle X, Q \rangle$ — некоторый граф без петель, a — вершина графа Γ. Множество $\bigtriangledown_Q(a) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n \in \omega} Q^n(a, \Gamma)$ (соответственно $\bigtriangleup_Q(a) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n \in \omega} Q^n(\Gamma, a)$) называется *верхним* (*нижним*) *Q-конусом* вершины a. Будем называть Q-конусы $\bigtriangledown_Q(a)$ и $\bigtriangleup_Q(a)$ *конусами* и обозначать через $\bigtriangledown(a)$ и $\bigtriangleup(a)$ соответственно, если из контекста ясно, о каком отношении Q идет речь.

Отметим следующий очевидный критерий включения одних конусов вершин в другие.

Предложение 1.1. *Для любых вершин a и b графа Γ следующие условия эквивалентны:*

1) $\bigtriangledown(a) \supseteq \bigtriangledown(b)$;
2) $\bigtriangleup(a) \subseteq \bigtriangleup(b)$;
3) *$a = b$ или вершина a достижима из вершины b.*

Непосредственно из предложения вытекают следующие два утверждения.

Следствие 1.2. *Для любой последовательности вершин a_n, $n \in \omega$, графа Γ следующие условия эквивалентны:*

1) *верхние конусы $\bigtriangledown(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго возрастающую (убывающую) по отношению включения;*

2) *нижние конусы $\bigtriangleup(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго убывающую (возрастающую) по отношению включения;*

3) *для любого $n \in \omega$ вершина a_n (контр)достижима из вершины a_{n+1}, но a_{n+1} не (контр)достижима из a_n.*

Следствие 1.3. *Для любой последовательности вершин a_n, $n \in \omega$, бесконтурного орграфа Γ следующие условия эквивалентны:*

1) *верхние конусы $\bigtriangledown(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго возрастающую (убывающую) по отношению включения;*

2) *нижние конусы $\bigtriangleup(a_n)$ образуют бесконечную последовательность, строго убывающую (возрастающую) по отношению включения;*

3) *для любого $n \in \omega$ вершина a_n (контр)достижима из вершины a_{n+1}.*

Ясно, что отношения $x \notin \bigtriangledown(y)$ и $x \notin \bigtriangleup(y)$ ти́пово определимы. Таким образом, справедливо

Предложение 1.4. *Если Γ — бесконтурный орграф с бесконечной цепью, то теория $\mathrm{Th}(\Gamma)$ имеет ти́повое свойство строгого порядка.*

Из бесконтурности любого властного орграфа и наличия образов и прообразов у любой вершины вытекает

Следствие 1.5. *Теория любого властного орграфа имеет ти́повое свойство строгого порядка.*

2. От ти́пового к формульному свойству строгого порядка

Пусть $\mathrm{Col}: X \to \omega \cup \{\infty\}$ — 1-несущественная раскраска графа $\Gamma = \langle X, Q\rangle$, имеющего транзитивную группу автоморфизмов, Δ — некоторое множество формул сигнатуры $\{Q\} \cup \{\mathrm{Col}_n \mid n \in \omega\}$. Предикатное обогащение $\mathscr{M}$ структуры цветного графа $\langle \Gamma, \mathrm{Col}\rangle$ называется *локально* $(\Delta, 1, \mathrm{Col})$*-определимым*, если после обогащения раскраска Col остается 1-несущественной, и для любого нового предикатного символа $R^{(m)}$ формула $R(x, \bar{y}) \wedge \mathrm{Col}_n(x)$ эквивалентна некоторой булевой комбинации формул из Δ. Если множество Δ состоит из $\exists$-формул, то локально $(\Delta, 1, \mathrm{Col})$-определимое обогащение называется *локально* $(\exists, 1, \mathrm{Col})$*-определимым*.

Пусть Col — 1-несущественная Q-упорядоченная раскраска властного орграфа $\Gamma_{\mathrm{pg}} = \langle X, Q\rangle$, $p_\infty(x)$ — тип элементов бесконечного цвета. Локально $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимое обогащение $\mathscr{M}$ структуры $\langle \Gamma_{\mathrm{pg}}, \mathrm{Col}\rangle$ называется p_∞*-властным*, если выполняются следующие условия:

1) отношение полуизолированности SI_{p_∞} на реализациях типа p_∞ несимметрично посредством формулы $Q(x, y)$;

2) p_∞ — властный тип теории $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\mathscr{M})$;

3) каждый неглавный тип $q(\bar{y}) \in S(T)$ реализуется в $\mathscr{M}_{p_\infty}$ посредством некоторой главной формулы $R_q(a, \bar{y})$ (т. е. $R_q(a, \bar{y}) \vdash q(\bar{y})$), где R_q — новый сигнатурный символ, $\models p_\infty(a)$;

4) если $\models R_q(a, \bar{b})$, $\models p_\infty(a)$, $\models p_\infty(b_i)$, где $b_i \in \bar{b}$, то существует (a, b_i)-Q-маршрут.

Отметим, что свойства 1–4 выполняются в морлизациях структур формульных окрестностей неглавных властных типов, из которых извлекаются структуры властных орграфов (см. доказательство предложения 2 из работы [1]).

Напомним (см. [12, доказательство предложения 3.2]), что ограниченность длин кратчайших маршрутов во властном орграфе Γ_{pg} влечет наличие свойства строгого порядка у теории $\mathrm{Th}(\Gamma_{\mathrm{pg}})$.

Пусть $\mathscr{M}$ — локально $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимое p_∞-властное обогащение структуры властного орграфа $\Gamma_{\mathrm{pg}} = \langle X, Q\rangle$ с неограниченными длинами кратчайших маршрутов. Тогда существует тип $q(y_1, y_2, y_3) \in S^3(\mathrm{Th}(\mathscr{M}))$, для которого первая координата любой реализации имеет конечный цвет, а вторая и третья — бесконечный и эти реализации попарно не связаны маршрутами в орграфе. Рассмотрим формулу

$$\varphi(x, y_1) \rightleftharpoons \exists y_2\, \exists y_3\, R_q(x, y_1, y_2, y_3).$$

Из локальной $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимости отношения R_q, взаимной недостижимости реализаций a и b_1 (где $\models \varphi(a, b_1)$, $\models p_\infty(a)$) в графе Γ_{pg} и неограниченности длин кратчайших маршрутов вытекает, что формулой $\varphi(x, y_1)$ задается двухместное отношение, не определимое формулой сигнатуры цветного властного орграфа. Более того, поскольку $\exists$-формулами на графовой структуре с транзитивной группой автоморфизмов можно определить лишь ограниченные длины кратчайших маршрутов, из условий $\models p_\infty(a_1)$ и $\models Q(a_1, a_2)$ вытекает

$$\models \forall y(\varphi(a_1, y) \to \varphi(a_2, y)) \wedge \exists y\,(\neg\varphi(a_1, y) \wedge \varphi(a_2, y)). \tag{1}$$

Так как элементы a_1 и a_2 реализуют один и тот же тип p_∞, соотношение (1) влечет свойство строгого порядка.

Таким образом, справедлива следующая теорема, согласно которой сохранение 1-несущественности раскраски властного орграфа несовместимо со стабильностью локально $(\exists, 1, \mathrm{Col})$-определимой структуры обогащенной теории, имеющей неглавный властный тип p_∞.

Теорема 2.1. *Теория любого локально* $(\exists, 1, \mathrm{Col})$*-определимого* p_∞*-властного обогащения структуры властного орграфа имеет свойство строгого порядка.*

Представленный в доказательстве теоремы 2.1 механизм появления свойства строгого порядка при обогащении структуры властного орграфа демонстрирует переход от ти́пового свойства строгого порядка теории властного орграфа к формульному свойству строгого порядка, порожденному указанной спецификой обогащения.

3. Локально счетно категоричные теории и властные типы

Рассмотрим теперь подход, дающий возможность минимизировать множество типов q теории обогащения властного орграфа, для которых требуется введение предикатов R_q, позволяющих реализовать все типы теории в модели $\mathscr{M}_{p_\infty}$.

Теория T называется *локально счетно категоричной*, или LCC-*теорией*, если T — счетная предикатная теория, имеющая лишь конечное число неглавных 1-типов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ и такая, что для любых формул $\varphi_i(x) \in p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, и любого кортежа $\bar{a}$, каждая координата которого реализует один из типов p_i, структура, определяемая формулами с параметрами из $\bar{a}$, на множестве, определяемом формулой $\neg\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_n(x)$, ω-категорична.

Пусть $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ — все неглавные 1-типы LCC-теории T. Тип $q \in S(T)$ называется $(p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$*-властным*, где $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, если в любой модели $\mathscr{M} \models T$, реализующей тип q, реализуются все типы $r(\bar{y})$, у которых для каждой переменной $y_l \in \bar{y}$ некоторый тип $p_{i_j}(y_l)$ содержится в $r(\bar{y})$. Тип $p_1(x)$ называется *внутренне властным*, если $p_1(x)$ — p_1-властный тип.

Теорема 3.1. *Если* $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ *— все неглавные* 1*-типы* LCC*-теории* T*, то любой* $(p_1, \ldots, p_n)$*-властный тип* $q \in S(T)$ *является властным.*

Доказательство. Пусть q — $(p_1, \ldots, p_n)$-властный тип. Рассмотрим произвольный неглавный тип $r(\bar{y}) \in S(T)$. Без ограничения общности будем считать, что $\bar{y} = \bar{y}^1 \,\hat{}\, \bar{y}^2$, где для любой реализации $\bar{b}^1 \,\hat{}\, \bar{b}^2$ типа r каждый элемент $\bar{b}^1$ является реализацией одного из типов $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, а каждый из элементов $\bar{b}^2$ удовлетворяет некоторой единой формуле $\psi(x) \rightleftharpoons \neg\varphi_1(x) \wedge \cdots \wedge \neg\varphi_n(x)$, где $\varphi_i(x) \in p_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

По условию подтип $r^1(\bar{y}^1)$ типа r реализуется в любой модели $\mathscr{M}$, реализующей тип q. Это означает, что найдутся главная формула $\chi(\bar{a}, \bar{y}^1)$, $\bar{a} \in \mathscr{M}$, и кортеж $\bar{b}^1 \in \mathscr{M}$, для которых выполняется $\models q(\bar{a})$, $\models r^1(\bar{b}^1)$ и $\models \chi(\bar{a}, \bar{b}^1)$. Теперь из локальной счетной категоричности теории T вытекает существование главной формулы $\theta(\bar{a}, \bar{b}^1, \bar{y}^2)$, для которой $\theta(\bar{a}, \bar{b}^1, \bar{y}^2) \vdash r(\bar{b}^1, \bar{y}^2)$. Тогда существует кортеж $\bar{b}^2 \in \mathscr{M}$, для которого $\models r(\bar{b}^1, \bar{b}^2)$, и тип r реализуется в модели $\mathscr{M}$.

В силу произвольности выбора типа r и модели $\mathscr{M}$, реализующей тип q, тип q является властным. $\square$

Непосредственно из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.2. *Если $p(x)$ — единственный неглавный* 1*-тип* LCC*-теории* T *и* $p(x)$ *— внутренне властный тип, то тип* $p(x)$ *является властным.*

В заключение заметим, что локальная счетная категоричность теории T с неглавным властным 1-типом $p(x)$ влечет ограниченность на каждом формульном множестве X, не реализующем неглавные 1-типы, длин кратчайших маршрутов орграфа, определяемого формулой $\varphi(x,y)$, задающей несимметричность отношения полуизолированности на множестве реализаций типа p. Кроме того, на каждом таком формульном множестве X формульно определимы нижние конусы $\triangle_\varphi(a)$, $\models p(a)$, ограниченные на X. При наличии единой верхней оценки для длин кратчайших φ-маршрутов теория T имеет свойство строгого порядка. Вместе с тем, используя генерическую конструкцию [13], можно построить LCC-теорию с неглавным властным типом и неограниченными длинами кратчайших φ-маршрутов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Судоплатов С. В.* Властные орграфы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 205–213.
2. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 314–353.
3. *Судоплатов С. В.* Несущественные совмещения и раскраски моделей // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1132–1141.
4. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. I // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 1. С. 110–124.
5. *Ikeda K., Pillay A., Tsuboi A.* On theories having three countable models // Math. Logic Quaterly. 1998. V. 44. P. 161–166.
6. *Tsuboi A.* On theories having a finite number of nonisomorphic countable models // J. Symbol. Logic. 1985. V. 50, N 3. P. 806–808.
7. *Woodrow R. E.* A note on countable complete theories having three isomorphism types of countable models // J. Symbolic Logic. 1976. V. 41. P. 672–680.
8. *Woodrow R. E.* Theories with a finite number of countable models // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43, N 3. P. 442–455.
9. *Справочная* книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса, Ю. Л. Ершова, Е. А. Палютина, А. Д. Тайманова. М.: Наука, 1982.
10. *Shelah S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models. Amsterdam: North-Holland, 1990. (Stud. Logic Found. Math.; V. 92).
11. *Судоплатов С. В., Овчинникова Е. В.* Дискретная математика. М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007.
12. *Судоплатов С. В.* О мощных типах в малых теориях // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 118–128.
13. *Судоплатов С. В.* Синтаксический подход к построению генерических моделей // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 244–268.

Статья поступила 22 мая 2007 г.

Судоплатов Сергей Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`sudoplat@math.nsc.ru`, `sudoplat@ngs.ru`