Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.98

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА МЕЖДУ H^∞ И ПРОСТРАНСТВОМ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ПОЛИКРУГЕ

С. Стевич

Аннотация. В заметке, являющейся дополнением к [1], даны исчерпывающие характеристики ограниченности и компактности недавно введенных операторов интегрального типа между пространствами ограниченных голоморфных функций $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ на единичном поликруге $\mathbb{D}^n$ и пространстве со смешанной нормой $\mathscr{A}_\alpha^{p,q}(\mathbb{D}^n)$ с $p, q \in [1, \infty)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ такими, что $\alpha_j > -1$ для любого $j = 1, \dots, n$. Доказано, что ограниченность оператора равносильна его компактности и тому, что $g \in \mathscr{A}^{p,q}_{\alpha+\vec{q}}(\mathbb{D}^n)$, где $\vec{q} = (q, \dots, q)$.

Ключевые слова: ограниченная аналитическая функция, пространство со смешанной нормой, интегральный оператор, поликруг, ограниченность, компактность.

1. Введение

Пусть $\mathbb{D}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}^n$ — единичный поликруг в комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$ и $H(\mathbb{D}^n)$ — множество аналитических функций $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{C}$. Поммеренке в [2] определил следующий интегральный оператор:

$$T_g(f)(z) = \int\limits_0^z f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta, \tag{1}$$

и доказал, что он ограничен на пространстве Харди $H^2(\mathbb{D})$ тогда и только тогда, когда $g \in BMOA(\mathbb{D})$. В [3] мы распространили оператор (1) на $\mathbb{D}^n$, просто приближая его (в g), однако рецензент работы [3] предложил изучить следующее, в некоторое мере более естественное, распространение оператора (1):

$$T_g(f)(z) = \int\limits_0^{z_1} \cdots \int\limits_0^{z_n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) g(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots \zeta_n, \tag{2}$$

где $g \in H(\mathbb{D}^n)$.

В [1] мы изучали оператор (2) на пространстве со смешанной нормой

$$\mathscr{A}_\alpha^{p,q}(\mathbb{D}^n) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}^n) \mid \|f\|^q_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} = \int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(f, r) \prod_{j=1}^n (1 - r_j)^{\alpha_j} dr_j < \infty \right\},$$

где $r = (r_1, \ldots, r_n)$, с $p, q \in [1, \infty)$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такими, что $\alpha_j > -1$ для любого $j = 1, \ldots, n$, в то время как в [4] этот оператор изучался на весовом пространстве $\mathscr{S}_{\vec{\beta}}(\mathbb{D}^n) = \mathscr{S}_{\vec{\beta}}$, т. е. пространстве аналитических функций f на $\mathbb{D}^n$ таких, что

$$\|f\|_{\mathscr{S}_{\vec{\beta}}} = \sup_{z\in\mathbb{D}^n} |f(z)| \prod_{j=1}^{n} (1 - |z_j|)^{\beta_j} < \infty,$$

где $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\beta_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Близкие результаты получены в [5–7]. В настоящей заметке, являющейся добавлением к [1], мы изучаем ограниченность и компактность оператора (2) между пространством ограниченных голоморфных функций $H^\infty(\mathbb{D}^n)$ на единичном поликруге и на пространстве со смешанной нормой $\mathscr{A}^{p,q}_\alpha(\mathbb{D}^n)$.

Основной результат представляет

Теорема 1. *Пусть $g \in H(\mathbb{D}^n)$. Следующие утверждения равносильны:*
(a) *оператор $T_g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(\mathbb{D}^n)$ ограничен;*
(b) *оператор $T_g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(\mathbb{D}^n)$ компактен;*
(c) *$g \in \mathscr{A}^{p,q}_{\alpha+\vec{q}}(\mathbb{D}^n)$.*
Более того, если $T_g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(\mathbb{D}^n)$ ограничен, то

$$\|T_g\|_{H^\infty \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \asymp \|g\|_{\mathscr{A}^{p,q}_{\alpha+\vec{q}}}, \tag{3}$$

где $\vec{q} = (q, \ldots, q)$.

Запись $L(f) \asymp R(f)$ означает, что существуют конечные положительные постоянные C и C', на зависящие от f, такие, что $CR(f) \le L(f) \le C'R(f)$ для любой голоморфной функции f. Далее через C обозначаются положительные постоянные, возможно, различные.

2. Вспомогательные результаты

Приведем два вспомогательных результата, которые потребуются при доказательстве теоремы 1.

Для $f \in H(\mathbb{D}^n)$ положим

$$\partial_n f(z) = \frac{\partial^n f(z)}{\partial z_1 \ldots \partial z_n}.$$

Следующая лемма, доказанная в [1], является основным инструментом доказательства теоремы 1.

Лемма 1. *Пусть $f \in H(\mathbb{D}^n)$ такова, что $f(z) = 0$ при $\prod_{j=1}^{n} z_j = 0$. Тогда для $p, q \in [1, \infty)$ и $\alpha_j > -1$, $j = 1, \ldots, n$,*

$$\int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(f, r) \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{\alpha_j}\, dr \asymp \int\limits_{[0,1)^n} M_p^q(\partial_n f, r) \prod_{j=1}^{n} (1 - r_j)^{q+\alpha_j}\, dr. \tag{4}$$

Доказательство следующей леммы стандартно и аналогично, например, доказательству леммы 4 в [1], поэтому оно опущено.

Лемма 2. *Пусть $g \in H(\mathbb{D}^n)$. Тогда $T_g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \to \mathscr{A}^{p,q}_\alpha(\mathbb{D}^n)$ компактен в том и только в том случае, если для любой ограниченной последовательности $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, сходящейся к нулю равномерно на компактах в $\mathbb{D}^n$, будет $\|T_g f_k\|_{\mathscr{A}^{p,q}_\alpha} \to 0$ при $k \to \infty$.*

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. $(b) \Rightarrow (a)$ Эта импликация очевидна.

$(a) \Rightarrow (c)$ Заметим сначала, что

$$\partial_n \left(\int\limits_0^{z_1} \cdots \int\limits_0^{z_n} g(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots \zeta_n \right) = g(z).$$

В силу этой формулы и ограниченности $T_g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \to \mathscr{A}_\alpha^{p,q}(\mathbb{D}^n)$ для функции $f(z) \equiv 1$ с помощью леммы 1 получим

$$\begin{aligned} \infty > \|1\|_{H^\infty} \|T_g\|_{H^\infty \to \mathscr{A}_\alpha^{p,q}} &\geq \|T_g(1)\|_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} \\ &= \left\| \int\limits_0^{z_1} \cdots \int\limits_0^{z_n} g(\zeta_1, \dots, \zeta_n) d\zeta_1 \cdots \zeta_n \right\|_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} \asymp \|\partial_n T_g(1)\|_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}} = \|g\|_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $z_j = r_j e^{\theta_j}$, $j = 1, \dots, n$, откуда вытекает требуемое.

$(c) \Rightarrow (b)$ Ввиду леммы 2 достаточно показать, что если $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ — произвольная ограниченная последовательность в $H^\infty(\mathbb{D}^n)$, сходящаяся к нулю равномерно на компактах в $\mathbb{D}^n$, то $\|T_g(f_m)\|_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} \to 0$ при $m \to \infty$. Допустим, что $\sup\limits_{m \in \mathbb{N}} \|f_m\|_\infty \leq L$. Отсюда

$$|f_m(z) g(z)| \leq L |g(z)|, \quad z \in \mathbb{D}^n. \quad (6)$$

Так как $g \in \mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}(\mathbb{D}^n)$, имеем

$$M_p(g, r) < \infty \quad \text{п. в. на } (0,1). \quad (7)$$

Из (6), (7) и того, что $\lim\limits_{n \to \infty} |f_m(z) g(z)| = 0$ при каждом $z \in \mathbb{D}^n$, выводим, что может быть применена теорема Лебега об ограниченной сходимости, тем самым

$$\lim_{m \to \infty} M_p^p(f_m g, r) = M_p^p(\lim_{m \to \infty} f_m g, r) = 0 \quad (8)$$

для п. в. $r \in (0,1)$.

Пусть теперь $h_m(r) = M_p^q(f_m g, r)$. Тогда $|h_m(r)| \leq L^q M_p^q(g, r)$ и из (8) находим, что $\lim\limits_{m \to \infty} h_m(r) = 0$ п. в. на $(0,1)$. Эти факты и предположение $g \in \mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}(\mathbb{D}^n)$ с помощью теоремы Лебега об ограниченной сходимости приводят к тому, что

$$\lim_{m \to \infty} \|f_m g\|^q_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}} = \lim_{m \to \infty} \int\limits_0^1 h_m(r) \prod_{j=1}^n (1 - r_j)^{\alpha_j + q} dr_j = 0. \quad (9)$$

С другой стороны, по лемме 1

$$\|T_g(f_m)\|_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} \asymp \|\partial_n T_g(f_m)\|_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}} = \|f_m g\|_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}},$$

а это наряду с (9) влечет

$$\lim_{m \to \infty} \|T_g(f_m)\|_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} = 0,$$

что и требовалось.

Наконец, если $T_g : H^\infty(\mathbb{D}^n) \to \mathscr{A}_\alpha^{p,q}(\mathbb{D}^n)$ ограничен, то из (5) и следующих соотношений:

$$\|T_g(f)\|_{\mathscr{A}_\alpha^{p,q}} \asymp \|\partial_n T_g(f)\|_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}} \leq C \|f\|_\infty \|g\|_{\mathscr{A}_{\alpha+\vec{q}}^{p,q}},$$

вытекает (3), что завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стевич С.* Ограниченность и компактность интегрального оператора на пространстве со смешанной нормой на поликруге // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 694–706.
2. *Pomerenke Ch.* Schlichte funktionen und analytische funktionen von beschrankter mittler oszilation // Comment. Math. Helv. 1977. V. 52. P. 122–129.
3. *Chang D. C., Stević S.* Estimates of an integral operator on function spaces // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 3. P. 423–432.
4. *Stević S.* Boundedness and compactness of an integral operator on a weighted space on the polydisc // Indian J. Pure Appl. Math. 2006. V. 37, N 6. P. 343–355.
5. *Chang D. C., Stević S.* The generalized Cesàro operator on the unit polydisk // Taiwanese J. Math. 2003. V. 7, N 2. P. 293–308.
6. *Stević S.* Cesàro averaging operators // Math. Nachr. 2003. V. 248–249. P. 185–189.
7. *Stević S.* The generalized Libera transform on Hardy, Bergman and Bloch spaces on the unit polydisk // Z. Anal. Anwendungen. 2003. Bd 21, Heft 1. S. 179–186.

Статья поступила 9 июня 2007 г.

Stevo Stević (Стевич Стево)
Mathematical Institute of the Serbian Academy of Science,
Knez Mihailova, 36/III, 11000 Beograd, Serbia
sstevic@ptt.rs