Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.546

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОДНОЛИСТНЫХ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ МНОГОЧЛЕНОВ

Э. Г. Кирьяцкий

Аннотация. Изучаются свойства симметрических многочленов специального вида. С помощью этих свойств найдена максимальная угловая область однолистности некоторого семейства многочленов.

Ключевые слова: угловая область, симметрический многочлен, однолистная функция.

Введение. Область D назовем *областью однолистности семейства* T аналитических в этой области функций, если любая функция из семейства T является однолистной в области D. Область D назовем *максимальной областью однолистности семейства* T, если область D нельзя расширить до такой области, в которой однолистны все функции из семейства T.

Одной из многих задач теории аналитических функций является установление однолистности конкретной функции в некоторой области или отыскание максимальной области однолистности для целого семейства функций (см. [1, 2]). В частном случае сказанное относится и к многочленам. Например, для семейства многочленов $f(z) = z + az^2$, где $|a| \leq 1/2$, круг $|z| < 1$ будет максимальной областью однолистности. Для семейства многочленов $f(z) = z + az^2$, где $a \geq 0$, правая полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ является максимальной областью однолистности. Имеется множество других более сложных примеров максимальных областей однолистности для семейств аналитических функций (см. [3–7]).

Обозначим через $U(\alpha)$ произвольно расположенный в комплексной плоскости угол величиной α, где $0 < \alpha < 2\pi$, образованный двумя лучами с вершиной в начале координат. Присоединим к $U(\alpha)$ бесконечно удаленную точку и полученное замыкание обозначим через $\overline{U}(\alpha)$. Тогда $\overline{U}(\alpha)$ будет замкнутой жордановой кривой расширенной комплексной области, проходящей через бесконечно удаленную точку. Через $D(\alpha)$ обозначим угловую область, лежащую внутри угла $U(\alpha)$, и через $\overline{D}(\alpha)$ — замыкание области $D(\alpha)$.

Условимся угловую область считать максимальной угловой областью однолистности семейства функций, если при увеличении раствора угла получим новую угловую область, в которой уже не все функции из данного семейства являются однолистными.

Введем в рассмотрение однородный симметрический многочлен

$$\sigma_k(z_0, \dots, z_n) = \sum z_0^{j_0} \cdot \ldots \cdot z_n^{j_n}$$

комплексных переменных $z_0, \dots, z_n$, где $j_0 + \dots + j_n = k$, $j_0 \geq 0, \dots, j_n \geq 0$ и k — целое неотрицательное число. Здесь полагаем $\sigma_0(z_0, \dots, z_n) \equiv 1$. В частности,

$\sigma_1(z_0,\dots,z_n)=z_0+z_1+\dots+z_n$. Ясно, что функция $\sigma_1(z,z_1,\dots,z_n)$ комплексного переменного z является однолистной функцией в комплексной плоскости при любых фиксированных комплексных $z_1,\dots,z_n$. Нетрудно понять также, что $\sigma_1(z_0,\dots,z_n)=z_0+z_1+\dots+z_n\neq 0$ при любых $z_0,\dots,z_n\in D(\pi)$, т. е. при любых $z_0,\dots,z_n$, взятых из полуплоскости, ограниченной прямой, проходящей через начало координат.

Основной целью работы является формулировка и доказательство следующих связанных между собой утверждений.

I. *Угловая область $D(2\pi/k)$, $k\geq 2$, является максимальной угловой областью однолистности семейства многочленов*

$$P(z)=\sum_{m=0}^{k}\sigma_m(z_1,\dots,z_n)z^{k-m},\quad z\in D(2\pi/k),\ z_1,\dots,z_n\in\overline{D}(2\pi/k)\backslash\{\infty\}.$$

II. *Если хотя бы одна из точек $z_0,\dots,z_n$ принадлежит угловой области $D(2\pi/(k+1))$, $k\geq 1$, а остальные конечные точки принадлежат замкнутой области $\overline{D}(2\pi/(k+1))$, то*

$$\sigma_k(z_0,\dots,z_n)\neq 0.$$

При увеличении раствора угла утверждение перестает быть справедливым.

Для доказательства нам понадобятся различные определения, понятия и вспомогательные утверждения.

1. Введем понятие χ-последовательности. Последовательность положительных чисел $a_0,\dots,a_k$, где $k\geq 2$, назовем *χ-последовательностью*, если выполняются неравенства

$$a_m^2\geq a_{m+1}a_{m-1},\quad m=1,\dots,k-1.$$

Если последовательность $a_0,\dots,a_k$ такая, что $a_0=\dots=a_k$, то назовем ее *тривиальной χ-последовательностью.* Простейшим примером χ-последовательности может служить геометрическая прогрессия. Из определения χ-последовательности следует, что

$$\ln a_m\geq\frac{\ln a_{m+1}+\ln a_{m-1}}{2},\quad m=1,\dots,k-1.$$

т. е. χ-последовательность является логарифмически выпуклой вверх последовательностью. Кроме того, заметим, что

$$\frac{a_0}{a_1}\leq\frac{a_1}{a_2}\leq\dots\leq\frac{a_{m-1}}{a_m},\quad m=1,\dots,k-1.$$

Отметим несколько элементарных свойств χ-последовательности, которые используются в дальнейшем.

Лемма 1. *Если $a_0,\dots,a_k$ есть χ-последовательность, то она может быть только четырех типов: возрастающей, убывающей, тривиальной, сначала возрастающей, а потом убывающей, т. е.*

$$a_0\leq a_1\leq\dots\leq a_l\quad\text{и}\quad a_l\geq a_{l+1}\geq\dots\geq a_k,$$

где среди чисел $a_0,\dots,a_k$ есть хотя бы два числа, не равных между собой.

Лемма 2. *Пусть*

$$a_0, a_1, \dots, a_k, \tag{1}$$

$$b_0, b_1, \dots, b_k \tag{2}$$

суть две χ-последовательности. Тогда последовательность

$$a_0b_0, \dots, a_kb_k \tag{3}$$

также χ-последовательность. Далее, для того чтобы χ-последовательность (3) была геометрической прогрессией, необходимо и достаточно, чтобы χ-последовательности (1), (2) были геометрическими прогрессиями с произведением знаменателей, не равным единице, либо одна из них была геометрической прогрессией, а другая была тривиальной. Для того чтобы χ-последовательность (3) была тривиальной, необходимо и достаточно, чтобы обе χ-последовательности (1), (2) были тривиальными или обе χ-последовательности (1) и (2) были геометрическими прогрессиями с произведением знаменателей, равным единице.

Лемма 3. *Если $a_0, \dots, a_k$ есть χ-последовательность, то $a_k, \dots, a_0$ также χ-последовательность.*

Следующая теорема показывает, как можно использовать χ-последовательность при исследовании корней многочлена.

Теорема 1. *Пусть $a_0, \dots, a_k$ есть χ-последовательность. Тогда многочлен*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k$$

не имеет корней в угловой области

$$-\frac{2\pi}{k+1} < \arg z < \frac{2\pi}{k+1}. \tag{4}$$

На границе этой области многочлен $P(z)$ может иметь корень и, следовательно, ему сопряженный тогда и только тогда, когда χ-последовательность $a_0, \dots, a_k$ есть геометрическая прогрессия или тривиальная χ-последовательность.

Доказательство. Так как $a_0 > 0$, то $P(0) \neq 0$. Кроме того, многочлен $P(z)$ не имеет положительных корней. Поэтому достаточно установить, что многочлен $P(z)$ не имеет корней в угловой области $0 < \arg z < 2\pi/(k+1)$. Пусть $z = r\varepsilon$, где $r = |z| > 0$ и $\varepsilon = e^{i\alpha}$, причем $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$. Тогда

$$P(r\varepsilon) = a_0 + a_1 r\varepsilon + \dots + a_k r^k \varepsilon^k.$$

При каждом конкретном $r > 0$ последовательность

$$a_0, a_1 r, \dots, a_k r^k \tag{5}$$

по лемме 2 есть χ-последовательность.

Пусть χ-последовательность (5) тривиальна, т. е. $a_0 = a_1 r = \dots = a_k r^k$. Тогда

$$P(r\varepsilon) = a_0 + a_0 r\varepsilon + \dots + a_0 r^k \varepsilon^k = a_0 \frac{1 - r^{k+1}\varepsilon^{k+1}}{1 - r\varepsilon}.$$

Ясно, что $P(r\varepsilon) \neq 0$ в угловой области $0 < \arg z < 2\pi/(k+1)$.

Пусть χ-последовательность (5) является монотонно убывающей, т. е.

$$a_0 \geq a_1 r \geq \dots \geq a_k r^k,$$

причем не все члены этой последовательности совпадают между собой. Так как $\varepsilon \neq 1$, то

$$\begin{aligned}
&|(1-\varepsilon)P(r\varepsilon)| = |(1-\varepsilon)(a_0 + a_1 r\varepsilon + a_2 r^2\varepsilon^2 + \dots + a_k r^k \varepsilon^k)| \\
&= |a_0 - (a_0 - a_1 r)\varepsilon - (a_1 r - a_2 r^2)\varepsilon^2 - \dots - (a_{k-1}r^{k-1} - a_k r^k)\varepsilon^k - a_k r^k \varepsilon^{k+1}| \\
&\geq a_0 - |(a_0 - a_1 r)\varepsilon + (a_1 r - a_2 r^2)\varepsilon^2 + \dots + (a_{k-1}r^{k-1} - a_{nk} r^k)\varepsilon^k + a_k r^k \varepsilon^{k+1}| \\
&\qquad > a_0 - (a_0 - a_1 r + a_1 r - a_2 r^2 + \dots + a_{k-1} - a_k r^k + a_k r^k) = 0.
\end{aligned}$$

Значит, $P(r\varepsilon) \neq 0$ в угловой области $0 < \arg z < 2\pi/(k+1)$. Аналогично можно убедиться в справедливости теоремы, если χ-последовательность (5) является монотонно возрастающей.

Пусть теперь χ-последовательность (5) сначала возрастает, а затем убывает. По лемме 1 для каждого r найдется такое зависящее от r число m, $0 \leq m \leq k$, для которого

$$a_0 \leq a_1 r \leq \dots \leq a_m r^m, \tag{6}$$

$$a_{m+1}r^{m+1} \geq a_{m+2}r^{m+2} \geq \dots \geq a_k r^k. \tag{7}$$

Пусть $P(r\varepsilon) = P_1(r\varepsilon) + P_2(r\varepsilon)$, где

$$P_1(r\varepsilon) = a_0 + a_1 r\varepsilon + \dots + a_m r^m \varepsilon^m, \quad P_2(r\varepsilon) = a_{m+1}r^{m+1}\varepsilon^{m+1} + \dots + a_k r^k \varepsilon^k.$$

Обозначим

$$T_1(\varepsilon) = 1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^m, \quad T_2(\varepsilon) = \varepsilon^{m+1} + \dots + \varepsilon^k.$$

Из (6) и (7) следуют неравенства

$$m\alpha \leq \arg P_2(r\varepsilon) \leq \arg T_2(\varepsilon) = \frac{\alpha}{2}(m+k+1),$$

$$m\alpha \geq \arg P_1(r\varepsilon) \geq \arg T_1(\varepsilon) = \frac{m\alpha}{2} > 0,$$

благодаря которым получаем

$$\arg P_2(r\varepsilon) - \arg P_1(r\varepsilon) \leq \arg T_2(\varepsilon) - \arg T_1(\varepsilon) = \frac{1+k}{2}\alpha < \pi.$$

Отсюда заключаем, что $P(r\varepsilon) \neq 0$ при любом α, удовлетворяющем условию $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, и любом $r > 0$. Так как коэффициенты многочлена $P(z)$ являются положительными числами, этот многочлен отличен от нуля в угловой области (4).

Пусть теперь многочлен $P(z)$ имеет корень $z_0 = r_0\varepsilon_0$, где $r_0 = |z_0|$, $\varepsilon_0 = e^{i\alpha_0}$, на сторонах угловой области (4), т. е. $P(r_0\varepsilon_0) = 0$. Тогда также $P(r_0\bar{\varepsilon}_0) = 0$. Для удобства будем считать, что $z_0 = r_0\varepsilon_0 = r_0 e^{i\alpha_0}$, где $\alpha_0 = (2\pi)/(k+1)$. Рассуждая так же, как и раньше, приходим к трем неравенствам

$$\arg P_2(r_0\varepsilon_0) \leq \arg T_2(\varepsilon_0) = \frac{1}{2}(m+k+1)\alpha_0, \tag{8}$$

$$\arg P_1(r_0\varepsilon_0) \geq \arg T_1(\varepsilon_0) = \frac{m}{2}\alpha_0 > 0, \tag{9}$$

$$\arg P_2(r_0\varepsilon_0) - \arg P_1(z_0\varepsilon_0) \leq \arg T_2(\varepsilon_0) - \arg T_1(\varepsilon_0) = \pi. \tag{10}$$

Так как $P(z_0\varepsilon_0) = 0$ и $\arg P_1(r_0\varepsilon_0) > 0$, то

$$\arg P_2(r_0\varepsilon_0) - \arg P_1(r_0\varepsilon_0) = \pi. \tag{11}$$

Рассматривая соотношения (8)–(11), приходим к выводу, что в обоих неравенствах (8) и (9) может быть только знак равенства, т. е. $\arg P_1(r_0\varepsilon_0) = T_1(\varepsilon_0)$ и $\arg P_2(r_0\varepsilon_0) = T_2(\varepsilon_0)$. Последние два равенства возможны лишь тогда, когда

$$a_{m+1}r_0^{m+1} = a_{m+2}r_0^{m+2} = \cdots = a_k r_0^k, \tag{12}$$

$$a_0 = a_1 r_0 = \cdots = a_m r_0^m. \tag{13}$$

Теперь можно записать

$$\begin{aligned} 0 = P(r_0\varepsilon_0) &= P_1(r_0\varepsilon_0) + P_2(r_0\varepsilon_0) \\ &= a_0 + a_1 r_0\varepsilon_0 + \cdots + a_m r_0^m \varepsilon_0^m + a_{m+1} r_0^{m+1}\varepsilon_0^{m+1} + \cdots + a_k r_0^k \varepsilon_0^k \\ &= a_0(1 + \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_0^m) + a_{m+1}(\varepsilon_0^{m+1} + \cdots + \varepsilon_0^k) r_0^{m+1}. \end{aligned} \tag{14}$$

Равенства (14) имеют место только в двух случаях: если $m = k$ и если $m < k$ и $a_0 = a_{m+1}r_0^{m+1}$. В обоих случаях коэффициенты $a_0, \ldots, a_k$ многочлена $P(z)$ образуют, как следует из (12), (13), геометрическую прогрессию или тривиальную χ-последовательность. Таким образом, если многочлен $P(z)$ имеет корень z_0 на границе угловой области (4), то он имеет только еще один корень $\bar{z}_0$ на границе этой же угловой области и коэффициенты многочлена $P(z)$ образуют геометрическую прогрессию или тривиальную χ-последовательность. Такой многочлен можно записать в виде

$$P(z) = a_0 + \frac{a_0}{|z_0|} z + \cdots + \frac{a_0}{|z_0|^k} z^k.$$

Обратно, легко понять, что если коэффициенты многочлена $P(z)$ образуют геометрическую прогрессию или тривиальную χ-последовательность, то он имеет только два комплексно сопряженных корня, расположенных на границе угловой области (4).

Замечание 1. Связь между корнями многочлена и χ-последовательностью обнаруживается также с помощью следующего результата Гюа (см. [8]).

Если у многочлена

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k$$

все коэффициенты положительны и все корни отрицательны, то коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_k$ этого многочлена образуют χ-последовательность.

2. Сформулируем несколько простейших свойств симметрического однородного многочлена.

Свойство 1. *При любых комплексных $z_0, \ldots, z_n$ справедливо равенство*

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) = \sum_{m=0}^{k} \sigma_m(z_1, \ldots, z_n) z_0^{k-m}.$$

Свойство 2. *Справедливы равенство*

$$\sigma_{k-1}(z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}) = \frac{\sigma_k(z_0, z_1, \ldots, z_n) - \sigma_k(z_1, \ldots, z_{n+1})}{z_0 - z_{n+1}}, \quad \text{если } z_0 \neq z_{n+1},$$

и равенство

$$\sigma_{k-1}(z_0, \ldots, z_n, z_0) = \left.\frac{\partial \sigma_k(z, z_1, \ldots, z_n)}{\partial z}\right|_{z=z_0}, \quad \text{если } z_0 = z_{n+1}.$$

Свойство 3. *Пусть $\zeta_0, \dots, \zeta_s$ и $\xi_0, \dots, \xi_p$ — два множества комплексных чисел. Тогда справедливо равенство*

$$\sigma_k(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p) = \sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p), \tag{15}$$

где $\Delta_{k,m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s, \xi_0, \dots, \xi_p) = \sigma_{k-m}(\zeta_0, \dots, \zeta_s) \cdot \sigma_m(\xi_0, \dots, \xi_p)$.

Следующие две леммы связывают χ-последовательности и однородные симметрические многочлены.

Лемма 4. *Пусть $\upsilon_0, \dots, \upsilon_s$ — неотрицательные числа и $\upsilon_0 > 0$. Тогда при любых $s \geq 0$ и $l \geq 0$ последовательность симметрических многочленов*

$$\sigma_l(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s), \quad \sigma_{l+1}(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s), \quad \sigma_{l+2}(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s), \dots, \tag{16}$$

имеющая не менее трех членов, есть χ-последовательность.

При любом фиксированном m, где $m \geq l$, тройка многочленов

$$\sigma_m(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s), \quad \sigma_{m+1}(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s), \quad \sigma_{m+2}(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s), \tag{17}$$

взятая из последовательности (16), *может быть геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью лишь в том случае, если она имеет вид*

$$\upsilon_0^m, \quad \upsilon_0^{m+1}, \quad \upsilon_0^{m+2}. \tag{18}$$

Доказательство. Обозначим для краткости $\sigma_{m,s} = \sigma_m(\upsilon_0, \dots, \upsilon_s)$. Установим, что

$$\sigma_{m,s}^2 \geq \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} \tag{19}$$

при любом $m \geq l+1$ и любом $s \geq 0$. Для этого воспользуемся индукцией по s. При $s = 0$ имеем $\sigma_{m,0}(\upsilon_0) = \upsilon_0^m$. Значит, при $s = 0$ и любом $m \geq 1$ неравенство (19) справедливо. Пусть неравенство (19) справедливо при некотором $s = p$ и любом $m \geq l+1$. Докажем его справедливость при $s = p+1$ и любом $m \geq l+1$. Имеем

$$\sigma_{m,p+1} = \upsilon_{p+1}^m + \sigma_{1,p} \cdot \upsilon_{p+1}^{m-1} + \dots + \sigma_{m-1,p} \cdot \upsilon_{p+1} + \sigma_{m,p}. \tag{20}$$

Отсюда

$$\sigma_{m,p+1} = \upsilon_{p+1} \cdot \sigma_{m-1,p+1} + \sigma_{m,p}.$$

Далее, вычисления показывают, что

$$\sigma_{m,p+1}^2 - \sigma_{m+1,p+1} \cdot \sigma_{m-1,p+1} = \sigma_{m,p} \cdot \upsilon_{p+1}^m + \sum_{j=0}^{m-1} (\sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-j,p} - \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}) \cdot \upsilon_{p+1}^j.$$

Докажем, что при любом $m \geq l+j+1$ будут выполняться неравенства

$$\sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-j,p} - \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p} \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-l-1. \tag{21}$$

Действительно, по предположению при $s = p$ и любом $m \geq l+j+1$ имеем

$$\sigma_{m,p}^2 \geq \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-1,p}, \ \sigma_{m-1,p}^2 \geq \sigma_{m,p} \cdot \sigma_{m-2,p}, \ \dots, \sigma_{m-j,p}^2 \geq \sigma_{m-j+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}.$$

Перемножая эти неравенства, получим неравенство

$$\sigma_{m,p}^2 \cdot \sigma_{m-1,p} \cdot \ldots \cdot \sigma_{m-j,p} \geq \sigma_{m+1,p} \cdot \sigma_{m-1,p} \cdot \ldots \cdot \sigma_{m-j+1,p} \cdot \sigma_{m-j-1,p}.$$

Деля обе части последнего неравенства на общие множители, придем к неравенствам (21). Из неравенств (20) и (21) и того, что $\sigma_{m,p} > 0$ и $\upsilon_{p+1} \geq 0$, вытекает справедливость неравенств (19) при $s = p+1$. Пользуясь индукцией по s, убеждаемся в том, что неравенство (19) имеет место при любом $s \geq 0$ и любом $m \geq l+1$. Это означает, что последовательность (16) есть χ-последовательность. Таким образом, первая часть леммы 4 доказана.

Докажем вторую часть леммы 4. Пусть $\upsilon_0 > 0$, $\upsilon_0 \neq 1$, $s = 0$ или $\upsilon_0 > 0$, $\upsilon_0 \neq 1$, $s > 0$, $\upsilon_1 = \upsilon_2 = \cdots = \upsilon_s = 0$. Тогда для любого $m \geq 0$ имеем

$$\sigma_m(\upsilon_0) = \sigma_m(\upsilon_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s}) = \upsilon_0^m,$$

что приводит нас к геометрической прогрессии вида (18).

В остальных случаях, т. е. если среди чисел $\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s$ есть хотя бы два числа, не равные нулю, тройка чисел (17) не образует геометрической прогрессии, а также не является тривиальной χ-последовательностью. В самом деле, в силу симметрического свойства многочленов $\sigma_m(\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s)$ относительно переменных $\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s$ можно считать, что $\upsilon_0 > 0$ и $\upsilon_s > 0$. Опираясь на формулу (20), имеем для любого $m \geq l+1$ равенство

$$\sigma_{m,s}^2 - \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} = \sigma_{m,s-1} \cdot \upsilon_s^m + \sum_{j=0}^{m-1} (\sigma_{m,s-1} \cdot \sigma_{m-j,s-1} - \sigma_{m+1,s-1} \cdot \sigma_{m-j-1,s-1}) \cdot \upsilon_s^j,$$

причем согласно формуле (21) справедливо неравенство

$$\sigma_{m,s-1} \cdot \sigma_{m-j,s-1} - \sigma_{m+1,s-1} \cdot \sigma_{m-j-1,s-1} \geq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-l-1.$$

Кроме того, $\sigma_{m,s-1} > 0$ и $\upsilon_s > 0$. Поэтому

$$\sigma_{m,s}^2 - \sigma_{m+1,s} \cdot \sigma_{m-1,s} > 0$$

при любом $m \geq l+1$. Значит, тройка чисел (17) не образует геометрической прогрессии и не может быть тривиальной χ-последовательностью.

Лемма 5. *Пусть $\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s$ и $r_0, \ldots, r_p$ — два множества неотрицательных чисел и $\upsilon_0 > 0$, $r_0 > 0$. Тогда последовательность*

$$\Delta_{k,m}(\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s, r_0, \ldots, r_p), \ m = 0, 1, \ldots, k, \quad \text{где } k \geq 2, \tag{22}$$

является χ-последовательностью.

Эта χ-последовательность будет геометрической прогрессией или тривиальной последовательностью лишь тогда, когда она приводится к виду

$$\upsilon_0^k, \upsilon_0^{k-1} r_0, \ldots, \upsilon_0 r_0^{k-1}, r_0^k. \tag{23}$$

Доказательство. По леммам 4 и 3 последовательности

$$\sigma_0(\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s), \sigma_1(\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s), \ldots, \sigma_k(\upsilon_0, \ldots, \upsilon_s), \tag{24}$$

$$\sigma_k(r_0, \ldots, r_p), \sigma_{k-1}(r_0, \ldots, r_p), \ldots, \sigma_0(r_0, \ldots, r_p) \tag{25}$$

являются χ-последовательностями. Перемножая их и пользуясь леммой 2, получим последовательность

$$\sigma_0(v_0,\dots,v_s)\sigma_k(r_0,\dots,r_p),\sigma_1(v_0,\dots,v_s)\sigma_{k-1}(r_0,\dots,r_p),\\ \dots,\sigma_k(v_0,\dots,v_s)\sigma_0(r_0,\dots,r_p),$$

которая также будет χ-последовательностью. Вспоминая формулу (15) из свойства 3, приходим к тому, что последовательность (22) есть χ-последовательность. Это доказывает первую часть леммы 5.

Докажем вторую часть леммы 5. Если $s+p=0$ или $s+p>0$ и $v_1=\dots=v_s=r_1=\dots=r_p=0$, то в обоих случаях получим последовательность

$$\Delta_{k,m}(v_0,r_0)=\Delta_{k,m}(v_0,\underbrace{0,\dots,0}_{s},r_0,\underbrace{0,\dots,0}_{p})=v_0^{k-m}r_0^m,\quad m=0,1,\dots,k,$$

вида (23), которая будет геометрической прогрессией со знаменателем r_0/v_0 или тривиальной χ-последовательностью v_0^k, $v_0^k,\dots,v_0^k$.

Остается показать, что в остальных случаях χ-последовательность (22) не будет геометрической прогрессией и тривиальной χ-последовательностью. Действительно, пусть вопреки нашему утверждению χ-последовательность (22) является геометрической прогрессией или тривиальной χ-последовательностью. Тогда по лемме 2 хотя бы одна из последовательностей (24) и (25) необходимо будет геометрической прогрессией или тривиальной χ-последовательностью. Так как среди чисел $v_0,\dots,v_s$, $r_0,\dots,r_p$ теперь имеются хотя бы три числа, отличные от нуля, то в одной из последовательностей (24), (25) есть хотя бы два числа, отличные от нуля. Однако лемма 4 утверждает, что та последовательность, которая имеет два числа, отличные от нуля, не может быть геометрической прогрессией и тривиальной χ-последовательностью. Получаем противоречие, которое доказывает вторую часть леммы 5.

3. Рассмотрим поведение многочлена $P(z)=z^{k+1}+a_1z^k+\dots+a_{k+1}$ и симметрического многочлена $\sigma_k(z_0,\dots,z_n)$ на сторонах угла $U(\alpha)$.

Лемма 6. *Если при любых $z_0,z_1\in U(\alpha)$, где $z_0\neq z_1$, $0<\alpha<2\pi/(k+1)$, для многочлена $P(z)=z^{k+1}+a_1z^k+\dots+a_{k+1}$ справедливо соотношение $P(z_0)\neq P(z_1)$, то этот многочлен является однолистной функцией в области $D(\alpha)$.*

Доказательство. Здесь мы не можем сразу использовать хорошо известный признак однолистности в случае ограниченной области, так как угловая область $D(\alpha)$ является неограниченной областью. Поэтому мы воспользуемся замечанием, которое имеет место в [9, с. 369]. Возьмем какую-нибудь точку ξ, не принадлежащую замкнутой области $\overline{D}(\alpha)$. Функция $\zeta=(z-\xi)^{-1}$ взаимно однозначно отображает угловую область $D(\alpha)$ на некоторую ограниченную область G. Эта же функция взаимно однозначно отображает замкнутую область $\overline{D}(\alpha)$ на ограниченную замкнутую область $\overline{G}$, границей которой будет ограниченная замкнутая спрямляемая жорданова кривая γ. Образуем функцию $f(\zeta)=P(1/\zeta+\xi)$. Имеем $\lim f(\zeta)=\infty$ при $\zeta\to 0$, где $\zeta\in\overline{G}$. Положим $f(0)=\infty$. Тогда функция $f(\zeta)$ станет непрерывной (в обобщенном смысле) в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ и даже аналитической в $\overline{G}$, за исключением точки $\zeta=0$, в которой она обращается в бесконечность. Функция $f(\zeta)$ взаимно однозначно отображает γ на некоторую жорданову кривую расширенной комплексной плоскости, проходящей через бесконечно удаленную точку. Покажем, что существует конечная точка w, не принадлежащая образу замкнутой области $\overline{G}$ при отображении этой области функцией $f(\zeta)$. Для этого достаточно доказать, что существует конечная точка, не принадлежащая к образу замкнутой области $\overline{D}(\alpha)$ при отображении ее с помощью многочлена $P(z)$. Запишем многочлен $P(z)$ в виде

$$P(z) = z^{k+1}\left(1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}}\right)$$

и возьмем число η с условием $0 < \eta < \pi - (k+1)\alpha/2$. Тогда найдется зависящее от η число r такое, что при всех $z \in \overline{D}(\alpha)$, для которых $|z| > r$, будет выполняться двойное неравенство

$$-\eta \leq (k+1)\arg z + \arg\left(1 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_{k+1}}{z^{k+1}}\right) \leq (k+1)\alpha + \eta.$$

Как легко убедиться, справедливо неравенство $(k+1)\alpha + \eta - \alpha + \eta < 2\pi$, с помощью которого и доказывается существование окрестности $o(w)$ точки w, не принадлежащей образу замкнутой области $\overline{D}(\alpha)$ при отображении ее с помощью многочлена $P(z)$. Итак, существует окрестность $o(w)$ точки w, свободная от множества значений функции $f(1/\zeta + \xi)$, которые принимаются ею в $\overline{G}$. Образуем теперь функцию $f_0(\zeta) = P((1/\zeta + \xi) - w)^{-1}$. Эта функция непрерывна в замкнутой области $\overline{G}$ (в обобщенном смысле) и даже аналитическая в $\overline{G}$, за исключением точки $\zeta = 0$. Заметим, что $f_0(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$. Положим $f_0(0) = 0$. Функция $f_0(\zeta)$ взаимно однозначно отображает кривую γ на некоторую замкнутую жорданову кривую комплексной плоскости. Теперь мы можем применить признак однолистности функции, вытекающий из принципа взаимно однозначного соответствия границ конечных областей (см. [8]). В данном случае этот признак применяется к функции $f_0(\zeta)$, которая и будет однолистной в области G. По известным свойствам однолистных функций заключаем, что и многочлен $P(z)$ будет однолистной функцией в угловой области $D(\alpha)$ (см. [9, 10]).

Лемма 7. *Если $z_0, \dots, z_n \in U(\alpha)\backslash\{0\}$ и $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$, то при $k \geq 1$ справедливо соотношение*

$$\sigma_k(z_0, \dots, z_n) \neq 0. \tag{26}$$

Если $z_0, \dots, z_n \in U(2\pi/(k+1))$ и $k > 1$, то равенство

$$\sigma_k(z_0, \dots, z_n) = 0 \tag{27}$$

имеет место только в следующих случаях: если

$$z_0 = \cdots = z_n = 0, \tag{28}$$

если $n = 1$ и

$$z_0 = ve^{i\varphi}, \quad z_1 = v\exp\left(\varphi + \frac{2\pi}{k+1}\right)i,\ v > 0, \tag{29}$$

если $n > 1$ и

$$z_0 = ve^{i\varphi},\ z_1 = v\exp\left(\varphi + \frac{2\pi}{k+1}\right)i, \quad v > 0,\ z_2 = \cdots = z_n = 0. \tag{30}$$

Доказательство. Докажем первую часть леммы 7. Пусть среди чисел $z_0, \dots, z_n$ есть хотя бы одно число, отличное от нуля. Если все $z_0, \dots, z_n$ лежат на одном и том же луче, скажем на луче $\arg z = \gamma$, то

$$\sigma_k(z_0, \dots, z_n) = \sum e^{ik\gamma}|z_0|^{j_0} \dots |z_n|^{j_n} \neq 0, \quad \text{где } j_0 \geq 0, \dots, j_n \geq 0. \tag{31}$$

Пусть $z_0,\ldots,z_n$ лежат на разных сторонах угла. Разобьем множество точек $z_0,\ldots,z_n$ на два подмножества

$$\zeta_0 = \upsilon_0 e^{i\varphi},\ldots,\zeta_s = \upsilon_s e^{i\varphi}, \quad \text{где } \upsilon_0 > 0, \tag{32}$$

$$\xi_0 = r_0 e^{i(\varphi+\alpha)},\ldots,\xi_p = r_p e^{i(\varphi+\alpha)}, \quad \text{где } r_0 > 0. \tag{33}$$

Здесь $s+p+1 = n$ и $\upsilon_1,\ldots,\upsilon_s, r_1,\ldots,r_p$ — неотрицательные числа. По свойству 3

$$\sigma_k(\zeta_0,\ldots,\zeta_s,\xi_0,\ldots,\xi_p) = \sum_{m=0}^{k} \sigma_{k-m}(\zeta_0,\ldots,\zeta_s)\sigma_m(\xi_0,\ldots,\xi_p)$$
$$= e^{ik\varphi}\sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(\upsilon_0,\ldots,\upsilon_s,r_0,\ldots,r_p)e^{im\alpha}. \tag{34}$$

По лемме 5 числа

$$\sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(\upsilon_0,\ldots,\upsilon_s,r_0,\ldots,r_p), \quad m = 0,\ldots,k,$$

образуют χ-последовательность. По теореме 1 многочлен

$$\sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(\upsilon_0,\ldots,\upsilon_s,r_0,\ldots,r_p)z^m$$

не обращается в нуль, если $z = e^{i\alpha}$ и $0 < \alpha < 2\pi/(k+1)$. Опираясь на (34), получим (26). Первая часть леммы 7 доказана.

Докажем вторую часть. Очевидно, что любое из условий (28)–(30), налагаемых на точки $z_0,\ldots,z_n$, достаточно для справедливости равенства (27). Нам надо установить, что если справедливо равенство (27), то необходимо выполняется одно и только одно из условий (28)–(30). Очевидное условие (28) оставим в стороне. Пусть равенство (27) имеет место для точек $z_0,\ldots,z_n$, среди которых есть отличные от нуля. Все точки $z_0,\ldots,z_n$ из (27) не могут лежать только на одной стороне угла $U(2\pi/(k+1))$, так как в противном случае равенство (27) противоречило бы (31). Значит, точки $z_0,\ldots,z_n$ лежат на разных сторонах угла. Тогда множество этих точек разобьем на два подмножества (32) и (33), где берем $\alpha = 2\pi/(k+1)$. Согласно (32)–(34) имеем равенство

$$\sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(\upsilon_0,\ldots,\upsilon_s,r_0,\ldots,r_p)\exp\frac{2\pi mi}{k+1} = 0. \tag{35}$$

По лемме 5 последовательность

$$\Delta_{k,m}(\upsilon_0,\ldots,\upsilon_s,r_0,\ldots,r_p), \quad m = 0,\ldots,k, \tag{36}$$

является χ-последовательностью. Из (35) следует, что многочлен

$$\sum_{m=0}^{k} \Delta_{k,m}(\upsilon_0,\ldots,\upsilon_s,r_0,\ldots,r_p)z^m$$

имеет корень в точке $z = \exp(2\pi i/(k+1))$. По теореме 1 получим, что χ-последовательность (36) должна быть геометрической прогрессией или тривиальной χ-последовательностью. Но тогда по лемме 5 заключаем, что эта последовательность имеет вид

$$\upsilon_0^k, \upsilon_0^{k-1}r_0,\ldots,\upsilon_0 r_0^{k-1}, r_0^k.$$

Теперь равенство (27) можно заменить равенством

$$e^{i\varphi}\sum_{m=0}^{k}\upsilon_0^{k-m}r_0^m\exp\frac{2\pi mi}{k+1}=0.$$

Отсюда ясно, что $\upsilon_0=r_0$. Значит, если $n=1$, то имеем (29). Если же $n>1$, то получим (30).

Замечание 2. Во второй части леммы 7 мы не рассматривали случай, когда $k=1$. Если $k=1$, то стороны угла образуют прямую линию и поэтому многочлен $\sigma_1(z_0,\dots,z_n)=z_0+\dots+z_n$ обращается в нуль только в следующих случаях: если $z_0=\dots=z_n=0$ и если множество $z_0,\dots,z_n$ можно разбить на два подмножества (32), (33), где $\alpha=\pi$, таких, что выполняется равенство $\upsilon_0+\dots+\upsilon_s=r_0+\dots+r_p$.

4. Рассмотрим поведение однородного симметрического многочлена $\sigma_k(z_0,\dots,z_n)$ в угловой области и на ее замыкании.

Лемма 8. *Если $z_0,\dots,z_n\in D(2\pi/(k+1))$, то $\sigma_k(z_0,\dots,z_n)\neq 0$.*

Доказательство. Вспоминая свойство 3, запишем

$$\sigma_k(z_0,\dots,z_n)=\frac{\sigma_{k+1}(z_0,z_2,\dots,z_n)-\sigma_{k+1}(z_1,z_2,\dots,z_n)}{z_0-z_1},\tag{37}$$

$$\sigma_k(z,z,z_2,\dots,z_n)=\frac{\partial\sigma_{k+1}(z,z_2,\dots,z_n)}{\partial z}.\tag{38}$$

По лемме 7 при любом α из интервала $(0,2\pi/(k+1))$ и любых $z_0,\dots,z_n$, лежащих на сторонах угла $U(\alpha)$ и не равных одновременно нулю, имеем

$$\sigma_k(z_0,\dots,z_n)\neq 0.\tag{39}$$

Из (37) и (39) следует, что

$$\sigma_{k+1}(z_0,z_2,\dots,z_n)\neq\sigma_{k+1}(z_1,z_2,\dots,z_n)\tag{40}$$

для любых $z_0,\dots,z_n\in U(\alpha)$, но при условии $z_0\neq z_1$. При фиксированных $z_2,\dots,z_n$ выражение $\sigma_k(z,z_2,\dots,z_n)$ будет многочленом степени $k+1$ от z со старшим коэффициентом, равным единице. Так как этот многочлен удовлетворяет соотношению (40), к нему применима лемма 6, согласно которой он будет однолистной функцией в области $D(\alpha)$. Это означает, что

$$\sigma_{k+1}(z_0,z_2,\dots,z_n)\neq\sigma_{k+1}(z_1,z_2,\dots,z_n)\tag{41}$$

для любых $z_0,z_1\in D(\alpha)$, но с условием $z_0\neq z_1$, и любых $z_2,\dots,z_n\in U(\alpha)$. В силу формулы (38) и однолистности функции $\sigma_{k+1}(z,z_2,\dots,z_n)$ в области $D(\alpha)$ при фиксированных $z_2,\dots,z_n\in U(\alpha)$ имеем

$$\frac{d\sigma_{k+1}(z,z_2,\dots,z_n)}{dz}\neq 0\tag{42}$$

для любого $z\in D(\alpha)$. Применяя соотношение (41), приходим к тому, что $\sigma_k(z,z,z_2,\dots,z_n)\neq 0$ для любого $z\in D(\alpha)$ и любых $z_2,\dots,z_n\in U(\alpha)$. Объединяя (41) и (42), получим $\sigma_k(z_0,\dots,z_n)$ для любых $z_0,z_1\in D(\alpha)$ и любых $z_2,\dots,z_n\in U(\alpha)$. Далее, представим многочлен $\sigma_k(z_0,\dots,z_n)$ в виде

$$\sigma_k(z_0,\dots,z_n)=\frac{\sigma_{k+1}(z_0,z_1,z_3,\dots,z_n)-\sigma_{k+1}(z_0,z_2,z_3,\dots,z_n)}{z_1-z_2}.\tag{43}$$

Кроме того, отметим, что

$$\sigma_k(z_0, z, z, z_3, \dots, z_n) = \frac{\partial \sigma_{k+1}(z_0, z, z_3, \dots, z_n)}{\partial z}. \tag{44}$$

Согласно (43), (44)

$$\sigma_{k+1}(z_0, z_1, z_3, \dots, z_n) \neq \sigma_{k+1}(z_0, z_2, z_3, \dots, z_n)$$

для любого $z \in D(\alpha)$ и любых $z_1, \dots, z_n \in U(\alpha)$, но с условием, что $z_1 \neq z_2$. При фиксированных $z_0 \in D(\alpha)$ и $z_3, \dots, z_n \in U(\alpha)$ выражение $\sigma_{k+1}(z_0, z, z_3, \dots, z_n)$ представляет собой многочлен степени $k+1$ относительно z со старшим коэффициентом, равным единице. Рассуждая аналогичным образом и помня, что z_0 можно взять из $D(\alpha)$, получим $\sigma_k(z_0, \dots, z_n) \neq 0$ при любых $z_0, z_1, z_2 \in D(\alpha)$ и любых $z_3, \dots, z_n \in U(\alpha)$. В процессе дальнейших рассуждений придем к соотношению $\sigma_k(z_0, \dots, z_n) \neq 0$, справедливому для любых $z_0, \dots, z_n \in D(\alpha)$.

Теорема 2. *Многочлен*

$$P_k(z) = \sum_{m=0}^{k} \sigma_m(z_1, \dots, z_n) z^{k-m}, \quad \sigma_0(z_1, \dots, z_n) \equiv 1, \tag{45}$$

степени $k \geq 1$ является однолистной функцией в угловой области $D(2\pi/k)$ для любого натурального n и фиксированных $z_1, \dots, z_n \in \overline{D}(2\pi/k)\backslash\{\infty\}$, при этом угол увеличить нельзя.

Доказательство. Предположим сначала, что $z_1, \dots, z_n$ — произвольно фиксированные точки из области $D(2\pi/k)$. Согласно свойствам 2 и 3 получим

$$\sigma_{k-1}(z_0, \dots, z_{n+1}) = \frac{P_k(z_0) - P_k(z_{n+1})}{z_0 - z_{n+1}}$$

при любых различных $z_0, z_{n+1} \in D(2\pi/k)$. По лемме 6 отсюда следует однолистность многочлена (45) в области $D(2\pi/k)$ при любых фиксированных $z_1, \dots, z_n \in D(2\pi/k)$. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — точки, расположенные на сторонах угла $U(2\pi/k)$. Возьмем n последовательностей $z_p^{(l)}$, $p = 1, \dots, n$, $l = 1, 2, 3, \dots$, точек из $D(2\pi/k)$ таких, что $z_p^{(l)} \to \xi_p$ при $l \to \infty$. Тогда получим последовательность

$$\sum_{m=0}^{k} \sigma_m\big(z_1^{(l)}, \dots, z_n^{(l)}\big) z^{k-m}, \quad \sigma_0\big(z_1^{(l)}, \dots, z_n^{(l)}\big) = 1, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \tag{46}$$

однолистных в области $D(2\pi/k)$ функций, причем имеет место сходимость

$$\sum_{m=0}^{k} \sigma_m\big(z_1^{(l)}, \dots, z_n^{(l)}\big) z^{k-m} \to \sum_{m=0}^{k} \sigma_m\big(\xi_1^{(l)}, \dots, \xi_n^{(l)}\big) z^{k-m}, \quad \sigma_0(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1. \tag{47}$$

Так как последовательность (46) равномерно ограничена внутри области $D(2\pi/k)$, по теореме Витали (см. [9, 10]) сходимость в (47) будет равномерной внутри области $D(2\pi/k)$. Но тогда (см. [10]) предельная функция

$$\sum_{m=0}^{k} \sigma_m(\xi_1, \dots, \xi_n) z^{k-m}, \quad \sigma_0(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1,$$

однолистна в области $D(2\pi/k)$. Итак, многочлен (45) степени $k \geq 1$ является однолистной в области $D(2\pi/k)$ функцией при фиксированных $z_1, \ldots, z_n \in \overline{D}(2\pi/k)$. Если положить $z_1 = \cdots = z_n = 0$, то пример $P_k(z) = z^k$ показывает, что угол в теореме увеличить нельзя.

Таким образом, теорема 2 утверждает, что угловая область $D(2\pi/k)$, $k \geq 2$, является максимальной угловой областью однолистности семейства многочленов

$$P(z) = \sum_{m=0}^{k} \sigma_m(z_1, \ldots, z_n) z^{k-m}, \quad z \in D(2\pi/k),$$
$$z_1, \ldots, z_n \in \overline{D}(2\pi/k) \setminus \{\infty\}, \quad \sigma_0(z_1, \ldots, z_n) = 1.$$

Теорема 3. (A) *Пусть $n \geq 1$. Если хотя бы одна из конечных точек $z_0, \ldots, z_n$ принадлежит области $D(2\pi/(k+1))$, а остальные принадлежат замкнутой области $\overline{D}(2\pi/(k+1))$, то имеет место соотношение*

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) \neq 0. \tag{48}$$

.

(B) *Если все конечные точки $z_0, \ldots, z_n$ принадлежат $\overline{U}(2\pi/(k+1))$, то*

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) = 0$$

только в следующих случаях:

1) $n \geq 0$, $k \geq 0$ *и* $z_0 = \cdots = z_n = 0$,

2) $n = 1$, $k > 1$ *и*

$$z_0 = v e^{i\varphi}, \quad z_1 = v \exp\left(\varphi + \frac{2\pi}{k+1}\right) i, \quad v > 0, \tag{49}$$

3) $n \geq 2$, $k \geq 1$ *и среди чисел $z_0, \ldots, z_n$ есть два числа, скажем z_0 и z_1, которые имеют вид* (49), *а остальные равны нулю,*

4) $n \geq 1$, $k = 1$ *и множество точек $z_0, \ldots, z_n$ можно разбить на два подмножества вида* (32), (33), *где $\alpha = \pi$, такие, что $v_0 + \cdots + v_s = r_0 + \cdots + r_p$.*

(C) *При увеличении угла теорема перестает быть справедливой.*

Доказательство. Легко понять, что при $n = 0$ или $n = 1$ теорема справедлива. Пусть $n \geq 2$. Докажем п. (A) теоремы. По теореме 2 многочлен

$$P_{k+1}(z) = \sum_{m=0}^{k+1} \sigma_m(z_1, \ldots, z_{n-1}) z^{k+1-m}, \quad \sigma_0(z_1, \ldots, z_{n-1}) = 1,$$

является однолистной функцией в области $D(2\pi/(k+1))$ при любых фиксированных $z_1, \ldots, z_{n-1} \in \overline{D}(2\pi/(k+1))$. Кроме того,

$$\sigma_k(z_0, \ldots, z_n) = \frac{P_{k+1}(z_0) - P_{k+1}(z_n)}{z_0 - z_n}$$

при любых $z_0, z_n \in D(2\pi/(k+1))$. Так как многочлен $P_{k+1}(z)$ является в области $D(2\pi/(k+1))$ однолистной функцией, он не может принимать одно и то же значение в двух точках, из которых одна лежит в области $D(2\pi/(k+1))$, а другая принадлежит стороне угла $U(2\pi/(k+1))$. Значит, однородный симметрический многочлен $\sigma_k(z_0, \ldots, z_n)$ ненулевой, если $z_0 \in D(2\pi/(k+1))$ и $z_1, \ldots, z_n \in \overline{D}(2\pi/(k+1))$, что доказывает соотношение (48) и тем самым первую часть теоремы. (B) доказывается на основании леммы 7 и замечания 2. Изучив случаи 2–4, легко доказать и п. (C) теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чакалов Л.* Максимальные области однолистности некоторых классов аналитических функций // Укр. мат. журн. 1959. № 4. С. 326–331.
2. *Duren P. L.* Univalent functions. New York; Berlin; Heidenberg; Tokyo: Springer-Verl., 1983. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 259).
3. *Аксентьев Л. А.* К достаточным признакам однолистности регулярных функций // Изв. вузов. Математика. 1958. № 3. С. 3–7.
4. *Тодоров П. Г.* О полюсах и радиусе однолистности мероморфного класса функций // Докл. АН СССР. 1966. Т. 168, № 4. С. 532–534.
5. *Distler R. J.* The domain of univalence of certain classes of meromorphic functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15, N 6. P. 923–928.
6. *Кирьяцкий Э. Г.* Некоторые свойства функций с отличной от нуля разделенной разностью // Литовск. мат. сб. 1972. Т. 12, № 2. С. 43–55.
7. *Кирьяцкий Е. Э., Кирьяцкий Э. Г.* О максимальной K_n-области одного семейства рациональных функций // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 2. С. 196–204.
8. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз, 1963.
9. *Маркушевич И. А.* Теория аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1959.
10. *Александров И. А.* Теория функций комплексного переменного. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002.

Статья поступила 28 июля 2008 г.

Кирьяцкий Эдуард Григорьевич
Вильнюсский технический университет,
Саулетекио, 11, Вильнюс LT-10223, Литва (Lithuania)
eduard.kiriyatzkii@takas.lt