Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.554

О δ–ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯХ КЛАССИЧЕСКИХ СУПЕРАЛГЕБР ЛИ

И. Б. Кайгородов

Аннотация. Рассматриваются δ-дифференцирования на классических супералгебрах Ли и доказывается, что на классических супералгебрах Ли ненулевые δ-дифференцирования возможны только при $\delta = 0, \frac{1}{2}, 1$. Полностью описана структура $\frac{1}{2}$-дифференцирований классических супералгебр Ли.

Ключевые слова: δ-дифференцирование, супералгебра Ли.

Хопкинс [1] рассматривала антидифференцирования алгебр Ли. Антидифференцирование — это частный случай δ-дифференцирования, т. е. такого линейного отображения μ алгебры, что $\mu(xy) = \delta(\mu(x)y + x\mu(y))$, где δ — некоторый фиксированный элемент основного поля. Результаты Хопкинс были обобщены В. Т. Филипповым [2]. Было доказано, что любая первичная Φ-алгебра Ли с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой не имеет ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. В этой же работе дано описание $\frac{1}{2}$-дифференцирований произвольной первичной Φ-алгебры Ли A ($\frac{1}{6} \in \Phi$) с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой. Доказано, что линейное отображение $\phi : A \to A$ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\phi \in \Gamma(A)$, где $\Gamma(A)$ — центроид алгебры A. Отсюда следует, что если A — центральная простая алгебра Ли над полем характеристики $p \neq 2, 3$ с невырожденной симметрической инвариантной билинейной формой, то любое $\frac{1}{2}$-дифференцирование ϕ имеет вид $\phi(x) = \alpha x$, $\alpha \in \Phi$. В дальнейшем В. Т. Филиппов описал δ-дифференцирования первичных альтернативных и нелиевых мальцевских Φ-алгебр с некоторыми ограничениями на кольцо операторов Φ. Он доказал [3], что алгебры из этих классов не имеют ненулевого δ-дифференцирования, если $\delta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$.

В работе [4] рассматривается действие δ-дифференцирований на простых конечномерных йордановых супералгебрах над алгебраически замкнутым полем характеристики 0 и полупростых конечномерных йордановых алгебрах над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2. Доказано, что в данных классах алгебр и супералгебр возможны ненулевые δ-дифференцирования только при $\delta = 0, \frac{1}{2}, 1$. Для этих классов дано полное описание $\frac{1}{2}$-дифференцирований и показано, что ϕ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\phi(x) = \alpha x$ при некотором $\alpha \in F$.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.419), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00157–А), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1) и интеграционного проекта СО РАН № 97.

В настоящей работе дается описание нетривиальных δ-дифференцирований классических супералгебр Ли. Доказывается, что супералгебры данного класса имеют ненулевые δ-дифференцирования только при $\delta = 0, \frac{1}{2}, 1$. Для данного класса супералгебр дается полное описание $\frac{1}{2}$-дифференцирований и показывается, что ϕ является $\frac{1}{2}$-дифференцированием тогда и только тогда, когда $\phi(x) = \alpha x$ при некотором $\alpha \in F$.

§ 1. Основные факты и определения

Через $\mathrm{span}\langle a, b\rangle$ будем обозначать линейную оболочку элементов a и b. Пусть U — пространство, V — подпространство в U и $x \in U$. Тогда через $x|_V$ будем обозначать проекцию элемента x на V.

Пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. *Супералгеброй Ли* $G = G_0 + G_1$ назовем $\mathbb{Z}_2$-градуированную алгебру с супертождествами

$$[x, y] = -(-1)^{p(x)p(y)}[y, x], \quad [[x, y], z] - [x, [y, z]] - (-1)^{p(y)p(z)}[[x, z], y] = 0, \quad (1)$$

где $p(x) = i$, если $x \in G_i$. Второе тождество является обобщением тождества Якоби.

Конечномерная супералгебра Ли $G = G_0 + G_1$ называется *классической*, если G — простая супералгебра и представление G_0 на G_1 вполне приводимо. Кац в своей работе [5] дал полную классификацию классических супералгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 0.

Теорема 1 [5]. *Пусть A — классическая супералгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики* 0. *Тогда A является одной из супералгебр*

$$A(m, n),\ A(n, n),\ B(m, n),\ D(m, n),\ C(n),\ P(n),\ Q(n),\ D(2, 1; \beta),\ G(3),\ F(4).$$

Дадим описания упомянутых в теореме 1 супералгебр.

$A(m, n)$. Пусть $sl(m, n)$ соответствует подпространству в матричной супералгебре $M_{m+n,m+n}$:

$$(sl(m, n))_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in M_m(F), D \in M_n(F), \mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) \right\},$$

$$(sl(m, n))_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} : B \in M_{m,n}(F), C \in M_{n,m}(F) \right\}.$$

На $sl(m, n)$ структура супералгебры Ли задается с помощью введения нового умножения $[a, b] = ab - (-1)^{p(a)p(b)}ba$. Если $m = n$, то супералгебра содержит одномерный идеал $\langle E_{2n}\rangle$, состоящий из скалярных матриц вида $\lambda E_{2n}, \lambda \in F$. Супералгебра Ли $sl(1, 1)$ трехмерная и нильпотентная. Определим $A(m, n)$ как $sl(m + 1, n + 1)$ при $m \neq n$, $m, n \geq 0$ и $A(n, n)$ как $sl(n + 1, n + 1)/\langle E_{2n+2}\rangle$ при $n > 0$.

Супералгебры $B(m, n)$, $D(m, n)$, $C(n)$, $P(n)$, $Q(n)$ являются подсупералгебрами в $A(k, l)$.

$D(2, 1; \alpha)$, $\alpha \in F^* \backslash \{0, -1\}$. Это однопараметрическое семейство 17-мерных супералгебр Ли, состоящее из всех простых супералгебр Ли, для которых $(D(2, 1; \alpha))_0$ — алгебра Ли, изоморфная $G_1^1 \oplus G_1^2 \oplus G_1^3$ ($G_1^j \simeq A_1$), с представлением $sl_2 \otimes sl_2 \otimes sl_2$.

$F(4)$. Определим $F(4)$ как 40-мерную классическую супералгебру Ли у которой $(F(4))_0$ является алгеброй Ли, изоморфной $B_3 \oplus A_1$, с представлением $\mathrm{spin}_7 \otimes sl_2$.

$G(3)$. Определим $G(3)$ как 31-мерную классическую супералгебру Ли, у которой $(G(3))_0$ является алгеброй Ли, изоморфной $\mathbf{G}_2 \oplus A_1$, с представлением $G_2 \otimes sl_2$.

Классические супералгебры, отличные от $Q(n)$, $P(n)$, $A(1,1)$, в [5] названы *основными классическими супералгебрами Ли.* Мы будем придерживаться этой терминологии.

Приведем системы корней для основных классических супералгебр Ли, описанных в [5]. Через Δ_0 и Δ_1 обозначим систему четных и нечетных корней соответственно. Через Π будем обозначать приведенную систему корней. В этих случаях подалгебра Картана H будет подпространством в пространстве D диагональных матриц. Корни описываются в терминах стандартного базиса ϵ_i в дуальном пространстве D^* (более точно, это ограничение ϵ_i на H).

$A(m,n)$. Корневая система описывается через линейные функционалы $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m+1}, \delta_1 = \epsilon_{m+2}, \dots, \delta_{n+1} = \epsilon_{n+m+2}$:

$$\Delta_0 = \{\epsilon_i - \epsilon_j; \delta_i - \delta_j\},\ i \neq j; \quad \Delta_1 = \{\pm(\epsilon_i - \delta_j)\};$$
$$\Pi = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m+1} - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_n - \delta_{n+1}\}.$$

$B(m,n)$. Корневая система задается через $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \delta_1 = \epsilon_{2m+1}, \dots, \delta_n = \epsilon_{2m+n}$:

$$\Delta_0 = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm 2\delta_i; \pm\epsilon_i; \pm\delta_i \pm \delta_j\},\ i \neq j; \quad \Delta_1 = \{\pm\delta_i; \pm\epsilon_i \pm \delta_j\};$$
$$\Pi = \{\delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_n - \epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \epsilon_m\},\ m > 0,$$
$$\Pi = \{\delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n, \delta_n\},\ m = 0.$$

$C(n)$. Корневая система описывается через $\epsilon = \epsilon_1, \delta_1 = \epsilon_3, \dots, \delta_{n-1} = \epsilon_{n+1}$:

$$\Delta_0 = \{\pm 2\delta_i; \pm\delta_i \pm \delta_j\}; \quad \Delta_1 = \{\pm\epsilon \pm \delta_i\};$$
$$\Pi = \{\delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-2} - \delta_{n-1}, \delta_{n-1} - \epsilon, \delta_{n-1} + \epsilon\}.$$

$D(m,n)$. Корневая система описывается через $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \delta_1 = \epsilon_{2m+1}, \dots, \delta_n = \epsilon_{2m+n}$:

$$\Delta_0 = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm 2\delta_i; \pm\delta_i \pm \delta_j\},\ i \neq j; \quad \Delta_1 = \{\pm\epsilon_i \pm \delta_j\};$$
$$\Pi = \{\epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \epsilon_m - \delta_1, \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_{n-1} - \delta_n, 2\delta_n\}.$$

$D(2,1;\alpha)$. $\Delta_0 = \{\pm 2\epsilon_1, \pm 2\epsilon_2, \pm 2\epsilon_3\}$; $\Delta_1 = \{\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3\}$; $\Pi = \{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3, -2\epsilon_1, -2\epsilon_2\}$.

$F(4)$. Корневая система формируется с использованием $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, описывающих алгебру B_3, и δ, описывающего алгебру A_1:

$$\Delta_0 = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j; \pm\epsilon_i; \pm\delta\},\ i \neq j; \quad \Delta_1 = \{1/2(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \delta)\};$$
$$\Pi = \{1/2(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \delta), -\epsilon_1, \epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3\}.$$

$G(3)$. Корневая система задается через $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, описывающие алгебру $\mathbf{G}_2$, $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0$, и δ, описывающий алгебру A_1:

$$\Delta_0 = \{\epsilon_i - \epsilon_j; \pm\epsilon_i; \pm 2\delta\}; \quad \Delta_1 = \{\pm\epsilon_i \pm \delta; \pm\delta\}; \quad \Pi = \{\delta + \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 - \epsilon_2\}.$$

Далее под G_β будем подразумевать корневое подпространство для корня β, а под g_β — элемент этого подпространства.

Для основных классических супералгебр Ли справедлива

Теорема 2 [5]. *Пусть G — основная классическая супералгебра Ли и $G = \oplus G_\alpha$ — ее корневое разложение относительно подалгебры Картана H. Тогда*
(a) $G_0 = H$,
(b) $\dim(G_\alpha) = 1$ *для* $\alpha \neq 0$,
(c) $[G_\alpha, G_\beta] \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$.

Пусть $\delta \in F$. Линейное отображение ϕ супералгебры A будем называть *δ-дифференцированием*, если для произвольных элементов $x, y \in A$ выполняется

$$\phi(xy) = \delta(x\phi(y) + \phi(x)y). \tag{2}$$

Определение 1-дифференцирования совпадает с обычным определением дифференцирования; 0-*дифференцированием* является произвольный эндоморфизм ϕ супералгебры A такой, что $\phi(A^2) = 0$. *Нетривиальным δ-дифференцированием* назовем ненулевое δ-дифференцирование, которое не является ни 1-дифференцированием, ни 0-дифференцированием. Очевидно, что для любой супералгебры умножение на элемент из основного поля F является $\frac{1}{2}$-дифференцированием. Нас интересуют действия нетривиальных δ-дифференцирований классических супералгебр Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики 0.

§ 2. Основные леммы

В данном параграфе сформулируем и докажем основные леммы, которые будем использовать в дальнейшем изучении действий δ-дифференцирований классических супералгебр Ли.

Лемма 3. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры Ли G и $x \in G_1$. Тогда $\phi(x^2) \in G_0$.*

Доказательство. Пусть $\phi(x) = x_0 + x_1, x_i \in G_i$. Тогда

$$\phi(x^2) = \delta([\phi(x), x] + [x, \phi(x)]) = \delta([x_0 + x_1, x] + [x, x_0 + x_1]) = 2\delta[x_1, x] \in G_0.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование классической супералгебры Ли $G = G_0 + G_1$. Тогда $\phi(G_0) \subseteq G_0$.*

Доказательство. В [5] показано, что $[G_1, G_1] = G_0$. Тогда для произвольного $x \in G_0$ выполнено $x = \sum\limits_{i=1}^{n_x} y_i z_i$, где $y_i, z_i \in G_1$. Легко видеть, что $x = \sum\limits_{i=1}^{n_x} \big(\frac{1}{4}(y_i + z_i)^2 - \frac{1}{4}(y_i - z_i)^2\big)$. Ясно, что, используя лемму 3, получаем требуемое. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование простой алгебры Ли G и $\dim(G) \geq 3$ над полем F характеристики 0. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и существует $\alpha \in F$ такое, что $\phi(x) = \alpha x$ для любого $x \in G$ либо $\delta = -1$ и $G \cong A_1$.*

Доказательство. Требуемое следует теорем 3, 5, 6 в [2].

Представим алгебру Ли A_1 в виде алгебры столбцов размерности 3 с умножением, определенным следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx - cy \\ 2ay - 2bx \\ 2cx - 2az \end{bmatrix}, \quad \text{где} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Через $\mathrm{Antider}(A_1)$ обозначим пространство антидифференцирований алгебры A_1. Тогда справедлива

Лемма 6. $\operatorname{Antider}(A_1) = \left\{ \begin{bmatrix} -2a & b & c \\ 2c & a & d \\ 2b & e & a \end{bmatrix} : a, b, c, d, e \in F \right\}$.

Доказательство. Требуемое следует из [1].

Лемма 7. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование алгебры Ли $L = L_1 \oplus L_2$, где L_1 — полупростая алгебра Ли. Тогда $\phi(L_2) \subseteq L_2$.*

Доказательство. Пусть $x_i \in L_i$ и $\phi(x_i) = x_i^1 + x_i^2$, где $x_i^j \in L_j$. Тогда имеем

$$0 = \phi([x_1, x_2]) = \delta\big([x_1, x_2^1 + x_2^2] + [x_1^1 + x_1^2, x_2]\big) = \delta\big([x_1, x_2^1] + [x_1^2, x_2]\big),$$

откуда $[x_1, x_2^1] = 0$. Известно, что центр полупростой алгебры Ли равен нулю, поэтому $x_2^1 = 0$ и $\phi(L_2) \subseteq L_2$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $G = G_0 + G_1$ — основная классическая супералгебра Ли и ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры G. Тогда $\phi(G_1) \subseteq G_1$.*

Доказательство. Пусть H — подалгебра Картана супералгебры G. Пусть $g_\beta \in G_1 \cap G_\beta$, $h \in H$ и $\phi(g_\beta) = \sum\limits_{\gamma \in \Delta} k_\gamma^\beta g_\gamma$. Тогда

$$\sum_{\gamma \in \Delta} \beta(h) k_\gamma^\beta g_\gamma = \phi(\beta(h) g_\beta) = \phi(h g_\beta) = \delta(\phi(h) g_\beta + h \phi(g_\beta))$$
$$= \delta\Big(\phi(h) g_\beta + \sum_{\gamma \in \Delta} \gamma(h) k_\gamma^\beta g_\gamma\Big).$$

В силу $\phi(h) g_\beta \in G_1$ и произвольности $h \in H$ при $\gamma \in \Delta_0$ и $k_\gamma^\beta \neq 0$ имеем $\beta = \delta\gamma$. Ясно, что если $\delta \neq \frac{1}{2}$, то лемма доказана. Если $\delta = \frac{1}{2}$, то $\phi(g_\beta) = g_1^\beta + g_{2\beta}$ и $\phi(g_{-\beta}) = g_1^{-\beta} + g_{-2\beta}$, где $g_1^\beta, g_1^{-\beta} \in G_1$, $g_{2\beta}, g_{-2\beta} \in G_0$. Тогда $\frac{1}{2}\big(g_{2\beta} g_{-\beta} + g_1^\beta g_{-\beta} + g_\beta g_1^{-\beta} + g_\beta g_{-2\beta}\big) = \phi(g_\beta g_{-\beta}) \in G_0$, т. е. $g_{2\beta} = g_{-2\beta} = 0$. Отсюда $\phi(g_\beta) \in G_1$. Лемма доказана.

§ 3. δ-Дифференцирования классических супералгебр Ли

Большая часть параграфа описывает действие антидифференцирований на супералгебрах Ли, имеющих в четной части прямые слагаемые вида A_1 и F, где F — основное поле. В [1] показано, что A_1 — алгебра Ли, которая допускает нетривиальное антидифференцирование. Ясно, что поле относительно лиева умножения допускает нетривиальное антидифференцирование. На элементах поля оно действует следующим образом: $\phi(f) = \alpha f$, где $f, \alpha \in F$. Оставшаяся часть параграфа посвящена рассмотрению δ-дифференцирований классических супералгебр Ли, тривиальных на четной части данной супералгебры, и действию нетривиальных $\frac{1}{2}$-дифференцирований классических супералгебр Ли.

Лемма 9. *Пусть $G = G_0 + G_1$ — основная классическая супералгебра Ли, ϕ — δ-дифференцирование супералгебры G, удовлетворяющее условию $\phi(G_0) = 0$. Тогда ϕ тривиально.*

Доказательство. Пусть $G = \bigoplus\limits_{\beta \in \Delta} G_\beta$ — корневое разложение относительно подалгебры Картана H и h — произвольный элемент из H. Из $H \subseteq G_0$ ясно, что $\phi(h) = 0$. Тогда для $g_\alpha \in G_1 \cap G_\alpha$ выполнено $\alpha(h)\phi(g_\alpha) = \phi(h g_\alpha) =$

$\delta(\phi(h)g_\alpha + h\phi(g_\alpha)) = \delta h\phi(g_\alpha)$. В силу произвольности h получаем $\phi(g_\alpha) \in G_{\frac{\alpha}{\delta}}$, откуда в силу основного свойства корней $\delta = \pm 1, \pm\frac{1}{2}$.

Случай $\delta = 1$ дает обыкновенное дифференцирование, т. е. ϕ тривиально.

При $\delta = \frac{1}{2}$ имеем $\phi(g_\alpha) = g_{2\alpha}$, $\phi(g_{-\alpha}) = g_{-2\alpha}$. Таким образом, получаем $0 = \phi(g_\alpha g_{-\alpha}) = \frac{1}{2}(g_{2\alpha}g_{-\alpha} + g_\alpha g_{-2\alpha})$. Легко видеть, что $g_{2\alpha}g_{-\alpha} = 0$ и, следовательно, $\phi(g_\alpha) = 0$.

При $\delta = -\frac{1}{2}$ будет $\phi(g_\alpha) = g_{-2\alpha}$. В случае если 2α не является корнем, то сразу получаем $\phi(g_\alpha) = 0$. Если 2α — корень, то $\phi(g_{-\alpha}) = g^*_{2\alpha}$, $\phi(g_{2\alpha}) = 0$ и $\phi(g_\alpha) = \phi(g_{2\alpha}g_{-\alpha}) = -\frac{1}{2}(g_{2\alpha}g^*_{2\alpha}) = 0$, что дает $g^*_{2\alpha} = 0$ и тем самым $\phi(g_\alpha) = 0$.

При $\delta = -1$ необходимо рассмотреть случай каждой супералгебры отдельно. В этом случае для $g_\beta \in G_\beta$, $g_\beta \in G_1$ и некоторого $g_{-\beta} \in G_{-\beta}$ будет выполнено $\phi(g_\beta) = g_{-\beta}$. Достаточно показать, что $\phi(G_\beta) = 0$ для $\beta \in \Pi$.

Случай $A(m,n)$:

$$\phi(g_{\epsilon_{m+1}-\delta_1}) = \phi(g_{\epsilon_{m+1}-\delta_2}g_{\delta_2-\delta_1}) = -\phi(g_{\epsilon_{m+1}-\delta_2})g_{\delta_2-\delta_1} = -g_{-\epsilon_{m+1}+\delta_2}g_{\delta_2-\delta_1} = 0.$$

Остальные случаи разбираются аналогично. Отсюда с учетом свойства простой системы корней $\phi(G) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $G = G_0 + G_1$ — основная классическая супералгебра Ли, где $G_0 = G_s \oplus F$, ϕ — δ-дифференцирование супералгебры G, удовлетворяющее условию $\phi(G_s) = 0$. Тогда ϕ тривиально.*

Доказательство. Пусть $G = \bigoplus_{\beta\in\Delta} G_\beta$ — корневое разложение относительно подалгебры Картана H и h — произвольный элемент из H. Ясно, что $\phi(h) = \alpha h$ при $h \in F$. Тогда при $g_\beta \in G_1$, $g_\beta \in G_\beta$ и $\phi(g_\beta) = \sum_{\gamma\in\Delta} k_\gamma g_\gamma$ верно, что

$$\beta(h)\sum_{\gamma\in\Delta} k_\gamma g_\gamma = \phi(hg_\beta) = \delta(\phi(h)g_\beta + h\phi(g_\beta)) = \delta\Big(\alpha\beta(h)g_\beta + \sum_{\gamma\in\Delta} k_\gamma\gamma(h)g_\gamma\Big).$$

Отсюда $k_\gamma \neq 0$ при $\beta = \delta\gamma$ и $\alpha = \frac{1-\delta}{\delta}k_\beta$. Следовательно, $\phi(g_\beta) = k_\beta g_\beta + k_{\frac{\beta}{\delta}} g_{\frac{\beta}{\delta}}$. Тем самым при $\delta \neq -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ получаем $\phi(g_\beta) = k_\beta g_\beta$.

Если $\delta = \frac{1}{2}$, то $\phi(g_\beta) = k_\beta g_\beta + k_{2\beta}g_{2\beta}$, $\phi(g_{-\beta}) = k_{-\beta}g_{-\beta} + k_{-2\beta}g_{-2\beta}$, откуда $k_{2\beta}g_{2\beta}g_{-\beta} + k_{-2\beta}g_\beta g_{-2\beta} + k_\beta g_{-\beta}g_\beta + k_{-\beta}g_\beta g_{-\beta} = \phi(g_\beta g_{-\beta}) \in G_0$, т. е. $\phi(g_\beta) = k_\beta g_\beta$.

Если $\delta = -1, -\frac{1}{2}$, то $0 = \phi(g_\beta g_\beta) = -2(k_\beta g_\beta + k_{\frac{\beta}{\delta}} g_{\frac{\beta}{\delta}})g_\beta$, откуда $k_{\frac{\beta}{\delta}} = 0$.

Теперь ясно, что $\phi(g_\beta) = \frac{\delta}{1-\delta}\alpha g_\beta$. Для $x \in G_s$ имеем $x = \sum_{i=1}^{n_x} x_i y_i$, где $x_i, y_i \in G_1$. Тогда

$$0 = \phi(x) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n_x} x_i y_i\right) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n_x}(\phi(x_i)y_i + x_i\phi(y_i))\right) = \frac{2\delta^2\alpha}{1-\delta}\sum_{i=1}^{n_x} x_i y_i = \frac{2\delta^2\alpha}{1-\delta}x,$$

откуда $\alpha = 0$, т. е. получили тривиальность ϕ. Лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть $G = G_0 + G_1$ — основная классическая супералгебра Ли, ϕ — нетривиальное $\frac{1}{2}$-дифференцирование G. Тогда для произвольного $x \in G$ выполнено $\phi(x) = \alpha x$ при некотором $\alpha \in F$.*

Доказательство. Пусть ϕ — нетривиальное $\frac{1}{2}$-дифференцирование супералгебры G. Из теоремы 1 следует, что $G_0 = G^1 \oplus G^2 \oplus G^3$, где G^i — простая алгебра Ли (возможно, какие-то G^i равны нулю). По лемме 5 при $x \in G^i$ верно $\phi(x) = \alpha_i x$, $\alpha_i \in F$. В частности, для $h^i \in H \cap G^i$ выполнено $\phi(h^i) = \alpha_i h^i$. Тогда для $g_\beta \in G_\beta \cap G_1$ считаем $\phi(g_\beta) = \sum\limits_{\gamma \in \Delta_1} k_\gamma^\beta g_\gamma$. Отсюда

$$\sum_{\gamma \in \Delta_1} k_\gamma^\beta \beta(h^i) g_\gamma = \beta(h^i)\phi(g_\beta) = \phi(h^i g_\beta) = \frac{1}{2}(h^i \phi(g_\beta) + \phi(h^i) g_\beta)$$
$$= \frac{\alpha_i + k_\beta^\beta}{2} \beta(h^i) g_\beta + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Delta_1, \gamma \neq \beta} k_\gamma^\beta \gamma(h^i) g_\gamma,$$

т. е. $\alpha = \alpha_i = k_\beta^\beta$, $i = 1, 2, 3$. Подставляя в полученное равенство вместо h^i произвольный $h \in H$, получим, что $k_\gamma^\beta \neq 0$ при $\beta \neq \gamma$ только в случае $\gamma = 2\beta$, что невозможно, так как $g_{2\beta} = (\theta g_\beta)^2 \in G_0$, где θ — некоторый элемент из поля, что противоречит лемме 8. Таким образом, для произвольного $x \in G$ верно $\phi(x) = \alpha x, \alpha \in F$.

Лемма 12. *Супералгебра $A(m, 1)$ при $m \neq 1$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $A(m, 1)$, $m \neq 1$. Ясно, что $(A(m, 1))_0 = A_m \oplus A_1 \oplus F$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(A_1) \subseteq A_1$, $\phi(A_m) = 0$, $\phi((A(m, 1))_1) \subseteq (A(m, 1))_1$, $\phi(F) \subseteq F$. Ясно, что антидифференцирование поля F есть умножение на элемент поля F.

Пусть $m \geq 2$. Фиксируем базис

$$g_{\epsilon_i - \delta_1} = e_{i,n+1}, \quad g_{\epsilon_i - \delta_2} = e_{i,n+2}, \quad g_{-\epsilon_i + \delta_1} = e_{n+1,i}, \quad g_{-\epsilon_i + \delta_2} = e_{n+2,i}.$$

Стандартным базисом для A_1 будет являться набор $\{h, g_{\delta_1 - \delta_2}, g_{\delta_2 - \delta_1}\}$. Антидифференцирование ϕ на A_1 согласно лемме 6 выглядит следующим образом:

$$\phi(h) = -2ah + bg_{\delta_1 - \delta_2} + cg_{\delta_2 - \delta_1},$$
$$\phi(g_{\delta_1 - \delta_2}) = 2ch + ag_{\delta_1 - \delta_2} + dg_{\delta_2 - \delta_1}, \quad \phi(g_{\delta_2 - \delta_1}) = 2bh + eg_{\delta_1 - \delta_2} + ag_{\delta_2 - \delta_1}.$$

Пусть

$$\phi(g_{\epsilon_k - \delta_1}) = \sum_{j=1}^m \bigl(t_k^{\pm(\epsilon_j - \delta_1)} g_{\pm(\epsilon_j - \delta_1)} + t_k^{\pm(\epsilon_j - \delta_2)} g_{\pm(\epsilon_j - \delta_2)}\bigr).$$

Тогда

$$\phi(g_{\epsilon_i - \delta_1}) = \phi(g_{\epsilon_k - \delta_1} g_{\epsilon_i - \epsilon_k}) = -\sum_{j=1}^m \bigl(t_k^{\pm(\epsilon_j - \delta_1)} g_{\pm(\epsilon_j - \delta_1)} + t_k^{\pm(\epsilon_j - \delta_2)} g_{\pm(\epsilon_j - \delta_2)}\bigr) g_{\epsilon_i - \epsilon_k}$$
$$= -\bigl(t_k^{-\epsilon_i + \delta_1} g_{-\epsilon_i + \delta_1} g_{\epsilon_i - \epsilon_k} + t_k^{\epsilon_k - \delta_1} g_{\epsilon_k - \delta_1} g_{\epsilon_i - \epsilon_k}$$
$$+ t_k^{\epsilon_k - \delta_2} g_{\epsilon_k - \delta_2} g_{\epsilon_i - \epsilon_k} + t_k^{-\epsilon_i + \delta_2} g_{-\epsilon_i + \delta_2} g_{\epsilon_i - \epsilon_k}\bigr),$$

откуда в силу произвольности k следует, что

$$\phi(g_{\epsilon_i - \delta_1}) = t_i^{\epsilon_i - \delta_1} g_{\epsilon_i - \delta_1} + t_i^{\epsilon_i - \delta_2} g_{\epsilon_i - \delta_2}.$$

Аналогично

$$\phi(g_{\pm(\epsilon_i - \delta_l)}) = k^{\pm(\epsilon_i - \delta_l)} g_{\pm(\epsilon_i - \delta_l)} + t^{\pm(\epsilon_i - \delta_{l+1})} g_{\pm(\epsilon_i - \delta_{l+1})}.$$

Здесь и далее в лемме $l+1$ берется по модулю 2.

Пусть $(g_{\epsilon_i-\delta}g_{-\epsilon_i+\delta})|_F = f$ и $\phi(f) = \alpha f$ для некоторого $\alpha \in F$. Тогда

$$\alpha f = \phi(f) = \phi(g_{\epsilon_i-\delta_l}g_{-\epsilon_i+\delta_l}) = -(k^{\epsilon_i-\delta_l}g_{\epsilon_i-\delta_l} + t^{\epsilon_i-\delta_{l+1}}g_{\epsilon_i-\delta_{l+1}})g_{-\epsilon_i+\delta_l} - g_{\epsilon_i-\delta_l}(k^{-\epsilon_i+\delta_l}g_{-\epsilon_i+\delta_l} + t^{-\epsilon_i+\delta_{l+1}}g_{-\epsilon_i+\delta_{l+1}}).$$

Отсюда $t^{\pm(\epsilon_i-\delta_l)} = 0$ и $\phi(g_{\pm(\epsilon_i-\delta_l)}) = k^{\pm(\epsilon_i-\delta_l)}g_{\pm(\epsilon_i-\delta_l)}$, $\alpha = -(k^{\epsilon_i-\delta_l} + k^{-\epsilon_i+\delta_l})$.

Ясно, что подалгебра $B = \mathrm{span}\langle h, g_{\delta_1-\delta_2}, g_{\delta_2-\delta_1}, g_{\pm(\epsilon_1-\delta_1)}, g_{\pm(\epsilon_1-\delta_2)}\rangle$ инвариантна относительно антидифференцирования ϕ и является супералгеброй вида $A(0,1)$. Далее считаем $\epsilon = \epsilon_1$. Покажем тривиальность антидифференцирований на супералгебре вида $A(0,1)$.

Учитывая $g^2_{\pm(\epsilon-\delta_l)} = 0$ и используя $0 = \phi\big(g^2_{\pm(\epsilon-\delta_l)}\big) = -2g_{\pm(\epsilon-\delta_l)}\phi(g_{\pm(\epsilon-\delta_l)})$, можем легко получить $\phi(g_{\pm(\epsilon-\delta_l)}) = k^{\pm(\epsilon-\delta_l)}g_{\pm(\epsilon-\delta_l)} + l^{\pm(\epsilon-\delta_{l+1})}g_{\pm(\epsilon-\delta_{l+1})}$. Пусть $(g_{\epsilon-\delta_l}g_{-\epsilon+\delta_l})|_F = f_l$, тогда $\alpha f_l = \phi(f_l) = \phi(g_{\epsilon-\delta_l}g_{-\epsilon+\delta_l}) = -(k^{\epsilon-\delta_l} + k^{-\epsilon+\delta_l})f_l - l^{\epsilon-\delta_l}g_{\epsilon-\delta_{l+1}}g_{-\epsilon+\delta_l} - l^{-\epsilon+\delta_{l+1}}g_{\epsilon-\delta_l}g_{-\epsilon+\delta_{l+1}}$, откуда $\alpha = -(k^{\epsilon-\delta_l} + k^{-\epsilon+\delta_l}), l^{\pm(\epsilon-\delta_l)} = 0$.

Ввиду $g_{\delta_2-\delta_1} = g_{\epsilon-\delta_1}g_{-\epsilon+\delta_2}$ и леммы 6 имеем $2bh + eg_{\delta_1-\delta_2} + ag_{\delta_2-\delta_1} = \phi(g_{\delta_2-\delta_1}) = \phi(g_{\epsilon-\delta_1}g_{-\epsilon+\delta_2}) = -(k^{\epsilon-\delta_1} + k^{-\epsilon+\delta_2})g_{\epsilon-\delta_1}g_{-\epsilon+\delta_2}$. Аналогично $2ch + ag_{\delta_1-\delta_2} + dg_{\delta_2-\delta_1} = \phi(g_{\delta_1-\delta_2}) = \phi(g_{\epsilon-\delta_2}g_{-\epsilon+\delta_1}) = -(k^{\epsilon-\delta_2} + k^{-\epsilon+\delta_1})g_{\epsilon-\delta_2}g_{-\epsilon+\delta_1}$. Тем самым $b = c = e = d = 0$, $\alpha = a = -\frac{1}{2}k^{\pm(\epsilon-\delta_l)}$.

Заметим, что

$$-2ag_{-\epsilon+\delta_1} = \phi(g_{-\epsilon+\delta_1}) = \phi(hg_{-\epsilon+\delta_1}) = -\phi(h)g_{-\epsilon+\delta_1} - h\phi(g_{-\epsilon+\delta_1}) = 4ag_{-\epsilon+\delta_1},$$

т. е. $a = 0$. Отсюда вытекает тривиальность антидифференцирования на $A_1 \oplus F$, т. е. ϕ тривиально на $(A(m,1))_0$, $m \neq 1$. С учетом леммы 9 приходим к требуемому. Лемма доказана.

Лемма 13. *Супералгебра $B(m,1)$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $B(m,1)$. Ясно, что $(B(m,1))_0 = B_m \oplus A_1$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(A_1) \subseteq A_1, \phi(B_m) = 0$, $\phi((B(m,1))_1) \subseteq (B(m,1))_1$.

Пусть $m > 0$,

$$g_\delta = g_{\pm\epsilon_i+\delta}g_{\mp\epsilon_i}, \quad \phi(g_{\pm\epsilon_i+\delta}) = k^{\delta}_{i,\pm}g_\delta + k^{-\delta}_{i,\pm}g_{-\delta} + \sum_{j=1}^{m} k^{\pm\epsilon_j\pm\delta}_{i,\pm}g_{\pm\epsilon_j\pm\delta}.$$

Тогда

$$\phi(g_\delta) = \phi(g_{\pm\epsilon_i+\delta}g_{\mp\epsilon_i}) = -\left(k^{\delta}_{i,\pm}g_\delta + k^{-\delta}_{i,\pm}g_{-\delta} + \sum_{j=1}^{m} k^{\pm\epsilon_j\pm\delta}_{i,\pm}g_{\pm\epsilon_j\pm\delta}\right)g_{\mp\epsilon_i}.$$

Последовательно выбирая знак $+$ или $-$ в $g_{\pm\epsilon_i+\delta}$ и учитывая произвольность i, получаем $\phi(g_\delta) \in \mathrm{span}\langle g_\delta, g_{-\delta}\rangle$. Аналогично $\phi(g_{-\delta}) \in \mathrm{span}\langle g_\delta, g_{-\delta}\rangle$. Из приведенных включений, поскольку $\phi(A_1) \subseteq A_1$, заключаем, что подсупералгебра $B = \mathrm{span}\langle h, g_{-\delta}, g_\delta, g_{2\delta}, g_{-2\delta}\rangle$ в $B(m,1)$ является инвариантной относительно антидифференцирования ϕ. Ясно, что B является супералгеброй вида $B(0,1)$. Рассмотрим действие антидифференцирования ϕ на супералгебре $B(0,1)$ и покажем его тривиальность.

Выберем классический базис в B: $h = e_{22} - e_{33}$, $g_{-2\delta} = e_{32}$, $g_{2\delta} = e_{23}$, $g_{-\delta} = e_{12} - e_{31}$, $g_\delta = e_{13} + e_{21}$. Согласно лемме 6 имеем

$$\phi(h) = -2ah + bg_{2\delta} + cg_{-2\delta},\ \phi(g_{2\delta}) = 2ch + ag_{2\delta} + dg_{-2\delta},\ \phi(g_{-2\delta}) = 2bh + eg_{2\delta} + ag_{-2\delta}.$$

Пусть $\phi(g_\delta) = kg_\delta + lg_{-\delta}$, $\phi(g_{-\delta}) = k^* g_\delta + l^* g_{-\delta}$. Тогда

$$\begin{aligned} kg_\delta + lg_{-\delta} &= \phi(g_\delta) = \phi(hg_\delta) \\ &= -(-2ah + bg_{2\delta} + cg_{-2\delta})g_\delta - h(kg_\delta + lg_{-\delta}) = 2ag_\delta + cg_{-\delta} - kg_\delta + lg_{-\delta}, \end{aligned}$$

откуда $a = k$, $c = 0$. Аналогично

$$\begin{aligned} -k^* g_\delta - l^* g_{-\delta} &= -\phi(g_{-\delta}) = \phi(hg_{-\delta}) \\ &= -(-2ah + bg_{2\delta})g_{-\delta} - h(k^* g_\delta + l^* g_{-\delta}) = -2ag_{-\delta} + bg_\delta - k^* g_\delta + l^* g_{-\delta}, \end{aligned}$$

откуда $a = l^*, b = 0$.

Заметим, что

$$2(ag_{2\delta} + dg_{-2\delta}) = \phi(2g_{2\delta}) = \phi(g_\delta g_\delta) = -2g_\delta(ag_\delta + lg_{-\delta}) = -4ag_{2\delta} - 2lh.$$

Следовательно, $a = l = d = 0$. Осталось отметить, что $-2eg_{2\delta} = -2\phi(g_{-2\delta}) = \phi(g_{-\delta}g_{-\delta}) = -2g_{-\delta}\phi(g_{-\delta}) = -2k^* g_{-\delta}g_\delta = -2k^* h$, откуда $e = k^* = 0$. Таким образом, антидифференцирование ϕ тривиально на A_1, т. е. ϕ тривиально на $(B(m,1))_0$. По лемме 9 получаем искомое. Лемма доказана.

Лемма 14. *Супералгебра $C(n)$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $C(n)$. Ясно, что $(C(n))_0 = F \oplus C_{n-1}$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(F) \subseteq F$, $\phi(C_n) = 0$, $n \geq 2$, $\phi(C_1) \subseteq C_1 (C_1 = A_1)$, $\phi((C(n))_1) \subseteq (C(n))_1$.

Допустим, что $\phi(g_{\epsilon+\delta_i}) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} l_i^{\pm\epsilon\pm\delta_j} g_{\pm\epsilon\pm\delta_j}$. Тогда

$$0 = \phi\big(g_{\epsilon+\delta_i}^2\big) = -2\left(\sum_{j=1}^{n-1} l_i^{\pm\epsilon\pm\delta_j} g_{\pm\epsilon\pm\delta_j}\right) g_{\epsilon+\delta_i}.$$

Отсюда $\phi(g_{\epsilon+\delta_i}) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} l_i^{\epsilon\pm\delta_j} g_{\epsilon\pm\delta_j}$, аналогично $\phi(g_{-\epsilon-\delta_i}) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} m_i^{-\epsilon\pm\delta_j} g_{-\epsilon\pm\delta_j}$.

В случае $n \geq 3$ при $(g_{\epsilon+\delta_i} g_{-\epsilon-\delta_i})|_F = \alpha(e_{11} - e_{22})$, $\alpha \neq 0$ и $\phi(e_{11} - e_{22}) = k(e_{11} - e_{22})$ получаем

$$\begin{aligned} \alpha k(e_{11} - e_{22}) &= \alpha\phi(e_{11} - e_{22}) = \phi(g_{\epsilon+\delta_i} g_{-\epsilon-\delta_i}) \\ &= -\left(g_{\epsilon+\delta_i} \sum_{j=1}^{n-1} m_i^{-\epsilon\pm\delta_j} g_{-\epsilon\pm\delta_j} + \sum_{j=1}^{n-1} l_i^{\epsilon\pm\delta_j} g_{\epsilon\pm\delta_j} g_{-\epsilon-\delta_i}\right). \end{aligned}$$

В силу (1) легко заметить, что $(g_{\epsilon+\delta_i} g_{-\epsilon-\delta_i})|_{C_{n-1}} \neq 0$, откуда видим, что

$$\alpha k(e_{11} - e_{22}) = \big(m_i^{-\epsilon\pm\delta_i} + l_i^{\epsilon+\delta_i}\big) g_{\epsilon+\delta_i} g_{-\epsilon-\delta_i},$$

т. е. $k = 0$ и ϕ тривиально на четной части супералгебры $C(n)$ при $n \geq 3$.

Случай $n=2$ рассмотрим более детально. Далее считаем $\delta=\delta_1$ и $\phi(g_{\pm\epsilon\pm\delta}) = k^{\pm\epsilon\pm\delta}g_{\pm\epsilon\pm\delta}+l^{\pm\epsilon\pm\delta}g_{\pm\epsilon\mp\delta}$. Фиксируем конкретный базис

$$g_{\epsilon-\delta}=e_{13}-e_{42},\quad g_{\epsilon+\delta}=e_{14}+e_{32},\quad g_{-\epsilon+\delta}=e_{24}+e_{31},\quad g_{-\epsilon-\delta}=e_{23}-e_{41}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}4ch+2ag_{2\delta}+2dg_{-2\delta}&=\phi(2g_{2\delta})=\phi(g_{\epsilon+\delta}g_{-\epsilon+\delta})\\&=-(k^{\epsilon+\delta}g_{\epsilon+\delta}+l^{\epsilon+\delta}g_{\epsilon-\delta})g_{-\epsilon+\delta}-g_{\epsilon+\delta}(k^{-\epsilon+\delta}g_{-\epsilon+\delta}+l^{-\epsilon+\delta}g_{\epsilon+\delta})\\&=-2k^{\epsilon+\delta}g_{2\delta}-(l^{\epsilon+\delta}+l^{-\epsilon+\delta})h-2k^{-\epsilon+\delta}g_{2\delta},\end{aligned}$$

откуда $d=0$, $4c=-l^{\epsilon+\delta}-l^{-\epsilon+\delta}$.

Аналогично для $\phi(g_{-2\delta})$ получаем

$$\begin{aligned}-(4bh+2eg_{2\delta}+2ag_{-2\delta})&=-\phi(2g_{-2\delta})=\phi(g_{-\epsilon-\delta}g_{\epsilon-\delta})\\&=2k^{-\epsilon-\delta}g_{-2\delta}-(l^{-\epsilon-\delta}+l^{\epsilon-\delta})h+2k^{\epsilon-\delta}g_{-2\delta},\end{aligned}$$

откуда $d=0$, $2c=-l^{-\epsilon-\delta}-l^{\epsilon-\delta}$.

Теперь заметим, что для $\phi(h)$ выполнено

$$\begin{aligned}&-2ah+bg_{2\delta}+cg_{-2\delta}=\phi(h)=\phi(g_{\epsilon+\delta}g_{-\epsilon-\delta})=-(k^{\epsilon+\delta}g_{\epsilon+\delta}+l^{\epsilon+\delta}g_{\epsilon-\delta})g_{-\epsilon-\delta}\\&-g_{\epsilon+\delta}(k^{-\epsilon-\delta}g_{-\epsilon-\delta}+l^{-\epsilon-\delta}g_{-\epsilon+\delta})=-(k^{\epsilon+\delta}+k^{-\epsilon-\delta})g_{\epsilon+\delta}g_{-\epsilon-\delta}+2l^{\epsilon+\delta}g_{-2\delta}-2l^{-\epsilon-\delta}g_{2\delta}.\end{aligned}$$

Используя $(g_{\epsilon+\delta}g_{-\epsilon-\delta})|_F\neq 0$, получаем $a=0, b=-2l^{-\epsilon-\delta}, c=2l^{\epsilon+\delta}$. С другой стороны, ясно, что

$$\begin{aligned}bg_{2\delta}+cg_{-2\delta}&=\phi(h)=\phi(g_{-\epsilon+\delta}g_{\epsilon-\delta})=-(k^{-\epsilon+\delta}g_{-\epsilon+\delta}+l^{-\epsilon+\delta}g_{-\epsilon-\delta})g_{\epsilon-\delta}\\&-g_{-\epsilon+\delta}(k^{\epsilon-\delta}g_{\epsilon-\delta}+l^{\epsilon-\delta}g_{\epsilon+\delta})=2l^{-\epsilon+\delta}g_{-2\delta}-2l^{\epsilon-\delta}g_{2\delta},\end{aligned}$$

т. е. $c=2l^{-\epsilon+\delta}$, $b=-2l^{\epsilon-\delta}$.

Сопоставляя полученные результаты, имеем $4b=-l^{-\epsilon-\delta}-l^{\epsilon-\delta}=b$ и $4c=-l^{\epsilon+\delta}-l^{-\epsilon+\delta}=-c$, откуда $b=c=0$, т. е. ϕ тривиально на $(C(2))_0$. По лемме 9 получаем искомое. Лемма доказана.

Лемма 15. *Супералгебра $D(n,1)$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $D(n,1)$. Ясно, что $(D(n,1))_0=D_n\oplus A_1$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(A_1)\subseteq A_1$, $\phi(D_n)=0$, $\phi((D(n,1))_1)\subseteq(D(n,1))_1$, причем ϕ на A_1 действует стандартно, т. е.

$$\phi(h)=-2ah+bg_{2\delta}+cg_{-2\delta},\ \phi(g_{2\delta})=2ch+ag_{2\delta}+dg_{-2\delta},\ \phi(g_{-2\delta})=2bh+eg_{2\delta}+ag_{-2\delta}.$$

Пусть $\phi(g_{\epsilon_j+\delta})=\sum\limits_{i=1}^{n}l_j^{\pm\epsilon_i\pm\delta}g_{\pm\epsilon_i\pm\delta}$. Тогда

$$\phi(g_{\epsilon_j+\delta})=\phi(g_{\epsilon_i+\delta}g_{\epsilon_j-\epsilon_i})=-\sum_{k=1}^{m}l_i^{\pm\epsilon_k\pm\delta}g_{\pm\epsilon_k\pm\delta}g_{\epsilon_j-\epsilon_i}=l_j^{\epsilon_j\pm\delta}g_{\epsilon_j\pm\delta}+l_j^{-\epsilon_i\pm\delta}g_{-\epsilon_i\pm\delta}.$$

Нетрудно получить $\phi(g_{-\epsilon_i-\delta})=l_{-i}^{-\epsilon_i\pm\delta}g_{-\epsilon_i\pm\delta}+l_{-i}^{\epsilon_j\pm\delta}g_{\epsilon_j\pm\delta}$.

Заметим, что в силу (1) $(g_{\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i-\delta})D_n \neq 0$. Если $(g_{\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i-\delta})|_{A_1} = \alpha h$, $\alpha \in F$, то

$$\begin{aligned}\alpha\phi(h) &= \phi(g_{\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i-\delta})\\ &= -\big(l_i^{\epsilon_j\pm\delta}g_{\epsilon_j\pm\delta} + l_i^{-\epsilon_i\pm\delta}g_{\epsilon_i\pm\delta}\big)g_{-\epsilon_i-\delta} - g_{\epsilon_i+\delta}\big(l_{-i}^{-\epsilon_i\pm\delta}g_{-\epsilon_i\pm\delta} + l_{-i}^{\epsilon_j\pm\delta}g_{\epsilon_j\pm\delta}\big).\end{aligned}$$

Отсюда в силу инвариантности ϕ на A_1 вытекает, что $a = 0$ и $l_i^{-\epsilon_j+\delta} = 0$.

Так как $g^2_{\epsilon_i+\delta} = 0$, то $0 = \phi\big(g^2_{\epsilon_i+\delta}\big) = -2l_i^{-\epsilon_j-\delta}g_{\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_j-\delta}$. Тем самым $l_i^{-\epsilon_j-\delta} = 0$, т. е. $\phi(g_{\epsilon_i+\delta}) = l_i^{\epsilon_i\pm\delta}g_{\epsilon_i\pm\delta}$. Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$$\phi(g_{-\epsilon_i+\delta}) = k_i^{-\epsilon_i\pm\delta}g_{-\epsilon_i\pm\delta}, \quad \phi(g_{-\epsilon_i-\delta}) = m_i^{-\epsilon_i\pm\delta}g_{-\epsilon_i\pm\delta}, \quad \phi(g_{\epsilon_i-\delta}) = p_i^{\epsilon_i\pm\delta}g_{\epsilon_i\pm\delta}.$$

Докажем, что $b = c = d = e = 0$. Зафиксируем элементы базиса

$$g_{\epsilon_i-\delta} = e_{i,2n+1} - e_{2n+2,n+i}, \quad g_{\epsilon_i+\delta} = e_{i,2n+2} + e_{2n+1,n+i},$$

$$g_{-\epsilon_i-\delta} = e_{n+i,2n+1} - e_{2n+2,i}, \quad g_{-\epsilon_i-\delta} = e_{n+i,2n+2} + e_{2n+1,i}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}bg_{2\delta} + cg_{-2\delta} &= \phi(h) = \phi(g_{\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i-\delta})\\ &= -\big(l_i^{\epsilon_i+\delta}g_{\epsilon_i+\delta} + l_i^{\epsilon_i-\delta}g_{\epsilon_i-\delta}\big)g_{-\epsilon_i-\delta} - g_{\epsilon_i+\delta}\big(m_i^{-\epsilon_i-\delta}g_{-\epsilon_i-\delta} + m_i^{-\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i+\delta}\big)\\ &= -\big(l_i^{\epsilon_i+\delta} + m_i^{-\epsilon_i-\delta}\big)h + 2l_i^{\epsilon_i-\delta}g_{-2\delta} - 2m_i^{-\epsilon_i+\delta}g_{2\delta},\end{aligned}$$

откуда $b = -2m_i^{\epsilon_i+\delta}$, $c = 2l_i^{\epsilon_i-\delta}$.

Аналогично

$$\begin{aligned}bg_{2\delta} + cg_{-2\delta} = \phi(h) = \phi(g_{-\epsilon_i+\delta}g_{\epsilon_i-\delta}) &= -\big(k_i^{-\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i+\delta} + k_i^{-\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i-\delta}\big)g_{\epsilon_i-\delta}\\ &- g_{-\epsilon_i+\delta}\big(p_i^{\epsilon_i-\delta}g_{\epsilon_i-\delta} + p_i^{\epsilon_i+\delta}g_{\epsilon_i+\delta}\big)\\ &= -\big(k_i^{-\epsilon_i+\delta} + p_i^{\epsilon_i-\delta}\big)h + 2k_i^{-\epsilon_i-\delta}g_{-2\delta} - 2p_i^{\epsilon_i+\delta}g_{2\delta},\end{aligned}$$

откуда $b = -2p_i^{\epsilon_i+\delta}$, $c = 2k_i^{-\epsilon_i-\delta}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned}4ch + 2eg_{-2\delta} &= \phi(2g_{2\delta}) = \phi(g_{\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i+\delta}) = -\big(l_i^{\epsilon_i+\delta}g_{\epsilon_i+\delta} + l_i^{\epsilon_i-\delta}g_{\epsilon_i-\delta}\big)g_{-\epsilon_i+\delta}\\ &-g_{\epsilon_i+\delta}\big(k_i^{-\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i+\delta}+k_i^{-\epsilon_i-\delta}g_{-\epsilon_i-\delta}\big) = -\big(2l_i^{\epsilon_i+\delta}+2k_i^{-\epsilon_i+\delta}\big)g_{2\delta}-\big(l_i^{\epsilon_i-\delta}+k_i^{-\epsilon_i-\delta}\big)h.\end{aligned}$$

Итак, $4c = -\big(l_i^{\epsilon_i-\delta} + k_i^{-\epsilon_i-\delta}\big)$ и $e = 0$, что дает $4c = -\big(l_i^{\epsilon_i-\delta} + k_i^{-\epsilon_i-\delta}\big) = -c$, т. е. $c = 0$.

Осталось заметить, что

$$\begin{aligned}-4bh - dg_{2\delta} &= -2\phi(g_{-2\delta}) = \phi(g_{-\epsilon_i-\delta}g_{-\epsilon_i-\delta})\\ &= -\big(p_i^{\epsilon_i-\delta}g_{\epsilon_i-\delta} + p_i^{\epsilon_i+\delta}g_{\epsilon_i+\delta}\big)g_{-\epsilon_i-\delta} - g_{\epsilon_i-\delta}\big(m_i^{-\epsilon_i-\delta}g_{-\epsilon_i-\delta} + m_i^{-\epsilon_i+\delta}g_{-\epsilon_i+\delta}\big)\\ &= 2p_i^{\epsilon_i-\delta}g_{-2\delta} - \big(p_i^{\epsilon_i+\delta} + m_i^{-\epsilon_i+\delta}\big)h + 2m_i^{-\epsilon_i-\delta}g_{-2\delta},\end{aligned}$$

откуда получаем $4b = p_i^{\epsilon_i+\delta} + m_i^{-\epsilon_i+\delta}$ и $d = 0$, что дает $4b = p_i^{\epsilon_i+\delta} + m_i^{-\epsilon_i+\delta} = -b$, т. е. $b = 0$.

Ясно, что ϕ тривиально на $(D(n,1))_0$. По лемме 9 получаем искомое. Лемма доказана.

Лемма 16. *Супералгебра $D(2,1;\alpha)$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $D(2,1;\alpha)$. Ясно, что $(D(2,1;\alpha))_1 = A_1^1 \oplus A_1^2 \oplus A_1^3, A_1^j \cong A_1$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(A_1^j) \subseteq A_1^j, \phi((D(2,1;\alpha))_1) \subseteq (D(2,1;\alpha))_1$.

Фиксируем базис $\{h_i, g_{2\epsilon_i}, g_{-2\epsilon_i}\}$ у A_1^i. Базис нечетной части будет выглядеть следующим образом:

$$g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} = (1,0)\otimes(1,0)\otimes(1,0), \quad g_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} = (0,1)\otimes(1,0)\otimes(1,0),$$

$$g_{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3} = (1,0)\otimes(0,1)\otimes(1,0), \quad g_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3} = (1,0)\otimes(1,0)\otimes(0,1),$$

$$g_{-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3} = (0,1)\otimes(0,1)\otimes(1,0), \quad g_{-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3} = (0,1)\otimes(1,0)\otimes(0,1),$$

$$g_{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3} = (1,0)\otimes(0,1)\otimes(0,1), \quad g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3} = (0,1)\otimes(0,1)\otimes(0,1).$$

Отсюда видим, что $h_i g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} = g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}$, $g_{-2\epsilon_i} g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} = g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-2\epsilon_i}$.

Так как $g^2_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} = 0$, имеем $0 = \phi\big(g^2_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}\big) = -2\phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3})g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}$, поэтому

$$\phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) = kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + lg_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + ng_{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3} + mg_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3}.$$

Легко заметить, что

$$\begin{aligned}\phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) &= \phi(h_1 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3})\\ &= -h_1(kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + lg_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + ng_{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3} + mg_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3})\\ &\quad - (-2a^1h_1 + b^1 g_{2\epsilon_1} + cg_{-2\epsilon_1})g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}\\ &= -kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + lg_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - ng_{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3} - mg_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3} + 2a^1 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - c^1 g_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3},\end{aligned}$$

т. е. $k = 2a^1 - k$, $l = l - c^1$, $n = m = 0$ и $a^1 = k$, $c^1 = 0$.

Аналогично

$$\begin{aligned}\phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) &= \phi(h^2 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) = -h^2(kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + lg_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3})\\ &\quad - (-2a^2h^2 + b^2 g_{2\epsilon_2} + c^2 g_{-2\epsilon_2})g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}\\ &= -kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - lg_{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + 2a^2 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - c^2 g_{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3}.\end{aligned}$$

Отсюда $k = a^2$, $c^2 = l = 0$. Проведя аналогичные выкладки для элемента $\phi(h_3 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3})$, получим

$$\begin{aligned}\phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) &= \phi(h_3 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3})\\ &= -h_3(kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) - (-2a^3h_3 + b^2 g_{2\epsilon_3} + c^2 g_{-2\epsilon_3})g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}\\ &= -kg_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + 2a^3 g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + c^3 g_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3},\end{aligned}$$

откуда $a^3 = k$, $c^3 = 0$.

Аналогичные рассуждения для элемента $g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}$ дают $b^1 = b^2 = b^3 = 0$, $\phi(g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}) = ag_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}$, где $a = a^i$, $i = 1,2,3$.

Теперь покажем равенство нулю элементов d^i и e^i. Это вытекает из равенств

$$\begin{aligned}\lambda^i(ag_{2\epsilon_i} + d^i g_{-2\epsilon_i}) &= \lambda^i\phi(g_{2\epsilon_i}) = \phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+2\epsilon_i})\\ &= -ag_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+2\epsilon_i} - g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}\phi(g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+2\epsilon_i}).\end{aligned}$$

Ясно, что правая часть равенства не содержит членов вида $g_{-2\epsilon_i}$. Аналогично из

$$\mu^i(e^i g_{2\epsilon_i} + ag_{-2\epsilon_i}) = \mu^i\phi(g_{-2\epsilon_i}) = \phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-2\epsilon_i} g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}) \\ = -ag_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-2\epsilon_i} g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3} - \phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-2\epsilon_i}) g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3},$$

где правая часть равенств не содержит элементов вида $g_{2\epsilon_i}$, выводим $e^i = 0$.

Теперь имеем

$$\phi(g_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3}) = \phi(g_{-2\epsilon_3} g_{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3}) = -2ag_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3},$$

$$\phi(g_{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}) = \phi(g_{-2\epsilon_2} g_{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3}) = ag_{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3},$$

$$\phi(g_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}) = \phi(g_{-2\epsilon_1} g_{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3}) = -2ag_{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3},$$

что влечет $a = 0$, т. е. ϕ тривиально на $(D(2,1;\alpha))_0$. По лемме 9 получаем искомое. Лемма доказана.

Лемма 17. *Супералгебра $F(4)$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $F(4)$. Ясно, что $(F(4))_0 = A_1 \oplus B_3$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(A_1) \subseteq A_1$, $\phi(B_3) = 0$, $\phi((F(4))_1) \subseteq (F(4))_1$. Считаем, что на алгебре A_1 антидифференцирование действует стандартным образом, т. е. $\phi(h) = -2ah + bg_\delta + cg_{-\delta}$, $\phi(g_\delta) = 2ch + ag_\delta + dg_{-\delta}$, $\phi(g_{-\delta}) = 2bh + eg_\delta + ag_{-\delta}$.

Легко заметить, что

$$0 = \phi\big(g^2_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}\big) = -2g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}),$$

откуда

$$\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}) = l^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} + l^{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} \\ + l^{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} + l^{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} + l^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} \\ + l^{-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} + l^{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} \\ + l^{-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)}.$$

Аналогично можем получить

$$\phi(g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)}) = k^{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} + k^{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} \\ + k^{-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} + k^{-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\ + k^{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} + k^{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\ + k^{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} + k^{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)}.$$

В силу супертождества (1) $(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)})|_{B_3} \neq 0$. Тогда если $(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)})|_{A_1} = \alpha h$, где $\alpha \neq 0$ (по (1)), то

$$\alpha(-2ah + bg_\delta + cg_{-\delta}) = \alpha\phi(h) = \phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)}) \\ = -l^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\ - l^{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\ - l^{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)}$$

$$
\begin{aligned}
&- l^{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- l^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- l^{-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- l^{-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- l^{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- k^{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- k^{\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- k^{-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- k^{-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} \\
&- k^{-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} \\
&- k^{\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} \\
&- k^{\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} \\
&\qquad - k^{-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)}.
\end{aligned}
$$

Отсюда $a = 0$ и

$$\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}) = k^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} + k^{\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta} g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)}.$$

Пользуясь аналогичными соображениями, получаем, что

$$
\begin{aligned}
\phi(g_{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\pm\delta)}) = k^{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\pm\delta)} & g_{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\pm\delta)} \\
& + l^{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\mp\delta)} g_{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1\pm\epsilon_2\pm\epsilon_3\mp\delta)}.
\end{aligned}
$$

Если $g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} = \beta g_\delta$, $\beta \in F$, то

$$
\begin{aligned}
\beta(2ch + dg_{-\delta}) &= \beta\phi(g_\delta) = \phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)}) \\
&= -\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}) g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} - g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} \phi(g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)}).
\end{aligned}
$$

Ясно, что правая часть равенства не содержит членов вида $g_{-\delta}$, тем самым $d = 0$. Аналогично если $g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} = \gamma g_{-\delta}$, $\gamma \in F$, то, рассматривая

$$
\begin{aligned}
\gamma(2bh + eg_\delta) &= \gamma\phi(g_{-\delta}) = \phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)}) \\
&= -\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)}) g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} - g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} \phi(g_{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)}),
\end{aligned}
$$

имеем $e = 0$.

Заметим, что если $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_1$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 \in \Delta_0$, то $k^{\alpha_1} + k^{\alpha_2} = 0$. Это легко вытекает из рассмотрения коэффициентов при $g_{\alpha_1+\alpha_2}$ в $\phi(g_{\alpha_1})g_{\alpha_2} + g_{\alpha_1}\phi(g_{\alpha_2})$ и $\phi(g_{\alpha_1+\alpha_2})$. Отметим, что в случае $\phi(g_{\alpha_1+\alpha_2})$ данный коэффициент равен нулю. Тогда

$$k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} = -k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} = k^{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} = -k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)},$$

$$k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} = -k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3+\delta)} = k^{\frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2-\epsilon_3-\delta)} = -k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)},$$

т. е. $k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} = k^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)} = 0$.

Теперь можем получить следующие равенства:

$$\begin{aligned}\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}) &= \phi(hg_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}) = -h\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}) - \phi(h)g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}\\ &= l^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} - (bg_\delta + cg_{-\delta})g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)}) &= -\phi(hg_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)}) = \phi(h)g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} + h\phi(g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)})\\ &= (bg_\delta + cg_{-\delta})g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3-\delta)} + l^{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)}g_{\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\delta)},\end{aligned}$$

откуда $b = c = 0$.

Таким образом, ϕ тривиально на $(F(4))_0$. По лемме 9 получаем искомое. Лемма доказана.

Лемма 18. *Супералгебра $G(3)$ не имеет ненулевых антидифференцирований.*

Доказательство. Предположим, что ϕ — нетривиальное антидифференцирование супералгебры $G(3)$. Ясно, что $(G(3))_0 = A_1 \oplus \mathbf{G}_2$. Тогда в силу лемм 4–7 имеем $\phi(A_1) \subseteq A_1$, $\phi(\mathbf{G}_2) = 0$, $\phi((G(3))_1) \subseteq (G(3))_1$. Считаем, что ϕ на A_1 действует стандартно, т. е.

$$\phi(h) = -2ah+bg_{2\delta}+cg_{-2\delta},\ \phi(g_{2\delta}) = 2ch+ag_{2\delta}+dg_{-2\delta},\ \phi(g_{-2\delta}) = 2bh+eg_{2\delta}+ag_{-2\delta}.$$

Пусть

$$\phi(g_{\epsilon_i+(-1)^l\delta}) = k_{i,l}^{\delta}g_\delta + k_{i,l}^{-\delta}g_{-\delta} + \sum_{j=1}^{3} k_{i,l}^{\pm\epsilon_j\pm\delta}g_{\pm\epsilon_j\pm\delta}, \quad l = 1, 2.$$

Тогда если $g_{\epsilon_i+(-1)^l\delta}g_{-\epsilon_i} = \beta_{i,l}g_{(-1)^l\delta}$, $\beta_{i,l} \in F$, $l = 1, 2$, то

$$\begin{aligned}\beta_{i,l}\phi(g_{(-1)^l\delta}) &= \phi(g_{\epsilon_i+(-1)^l\delta}g_{-\epsilon_i}) = -\left(k_{i,l}^{\delta}g_\delta + k_{i,l}^{-\delta}g_{-\delta} + \sum_{j=1}^{3} k_{i,l}^{\pm\epsilon_j\pm\delta}g_{\pm\epsilon_j\pm\delta}\right)g_{-\epsilon_i}\\ &= -\left(k_{i,l}^{\delta}g_\delta g_{-\epsilon_i} + k_{i,l}^{-\delta}g_{-\delta}g_{-\epsilon_i} + k_{i,l}^{\epsilon_i\pm\delta}g_{\epsilon_i\pm\delta}g_{-\epsilon_i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{3} k_{i,l}^{-\epsilon_j\pm\delta}g_{-\epsilon_j\pm\delta}g_{-\epsilon_i}\right).\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности i и условия $\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3 = 0$ получаем, что $\phi(g_{\pm\delta}) \in \operatorname{span}\langle g_\delta, g_{-\delta}\rangle$.

Рассмотрим подсупералгебру $B = A_1 \oplus sl_2$ в супералгебре $G(3)$. Подсупералгебра B является основной классической супералгеброй Ли вида $B(0,1)$. Как показано выше, супералгебра B инвариантна относительно ϕ. Таким образом, из леммы 13 имеем тривиальность ϕ на алгебре B и, в частности, на A_1, что влечет тривиальность ϕ на $(G(3))_0$. По лемме 9 получаем искомое. Лемма доказана.

Осталось рассмотреть случаи нетривиальных классических супералгебр Ли. Они не удовлетворяют условию теоремы 2, поэтому их будем рассматривать из общих соображений.

Лемма 19. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры $A(1,1)$. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(x) = \alpha x$, $\alpha \in F$.*

Доказательство. Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры $A(1,1)$. Достаточно рассмотреть случаи $\delta = -1$, $\delta = \frac{1}{2}$ и $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$.

Пусть $\delta = -1$, тогда считаем, что для $e_{ij} \in (A(1,1))_1$ выполнено $\phi(e_{ij}) = \sum\limits_{k,l=1}^{4} \gamma_{kl}^{ij} e_{kl}$ и для четных элементов имеем

$$\phi(e_{12}) = 2c(e_{11} - e_{22}) + ae_{12} + de_{21}, \quad \phi(e_{21}) = 2b(e_{11} - e_{22}) + ee_{12} + ae_{21},$$

$\phi(e_{11} - e_{22}) = -2a(e_{11} - e_{22}) + be_{12} + ce_{21}$, $\phi(e_{34}) = 2c^*(e_{33} - e_{44}) + a^* e_{34} + d^* e_{43}$, $\phi(e_{43}) = 2b^*(e_{33} - e_{44}) + e^* e_{34} + a^* e_{43}$, $\phi(e_{33} - e_{44}) = -2a^*(e_{33} - e_{44}) + b^* e_{34} + c^* e_{43}$. Также имеем

$$\begin{aligned}\phi(e_{13}) &= \phi((e_{11} - e_{22})e_{13}) \\ &= -\left((-2a(e_{11} - e_{22}) + be_{12} + ce_{21})e_{13} + (e_{11} - e_{22}) \sum_{k,l=1}^{4} e_{kl} \gamma_{kl}^{13} e_{kl}\right) \\ &= 2ae_{13} - ce_{23} - (e_{11} - e_{22}) \sum_{k,l=1}^{4} e_{kl} \gamma_{kl}^{13} e_{kl}.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\phi(e_{13}) &= \phi(e_{13}(e_{33} - e_{44})) \\ &= -\left(\sum_{k,l=1}^{4} \gamma_{kl}^{13} e_{kl}(e_{33} - e_{44}) + e_{13}(-2a^*(e_{33} - e_{44}) + b^* e_{34} + c^* e_{43})\right) \\ &= (e_{33} - e_{44}) \sum_{k,l=1}^{4} \gamma_{kl}^{13} e_{kl} + 2a^* e_{13} - b^* e_{14}.\end{aligned}$$

Отсюда легко получаем $a = a^* = \gamma_{13}^{13}$, $b^* = c = 0$, $\phi(e_{13}) = ae_{13} + \gamma_{31}^{13} e_{31} + \gamma_{24}^{13} e_{24}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\phi(e_{23}) = \phi(e_{21}e_{13}) = -\big((2c(e_{11} - e_{22}) + ee_{12} + ae_{21})e_{13} \\ + e_{21}\big(ae_{13} + \gamma_{31}^{13} e_{31} + \gamma_{24}^{13} e_{24}\big)\big) = -2ce_{13} - 2ae_{23},\end{aligned}$$

что дает $\phi(e_{13}) = \phi(e_{12}e_{23}) = -((ae_{12} + de_{21})e_{23} + e_{12}(-2ce_{13} - 2ae_{23})) = ae_{13}$.

Проделав аналогичные выкладки для $\phi(e_{31})$, получим

$$\phi(e_{31}) = \phi(e_{31}(e_{11} - e_{22})) = (e_{11} - e_{22}) \sum_{k,l=1}^{4} \gamma_{kl}^{31} e_{kl} + 2ae_{31} - be_{32},$$

$$\phi(e_{31}) = \phi((e_{33} - e_{44})e_{31}) = 2ae_{31} - c^* e_{41} - (e_{33} - e_{44}) \sum_{k,l=1}^{4} \gamma_{kl}^{31} e_{kl}.$$

Эти соотношения дают $b = c^* = 0$, $\phi(e_{31}) = ae_{31} + \gamma_{13}^{31} e_{13} + \gamma_{42}^{31} e_{42}$, откуда вытекают $\phi(e_{41}) = \phi(e_{43}e_{31}) = -2ae_{41}$ и $\phi(e_{31}) = \phi(e_{34}e_{41}) = ae_{31}$. Далее, $\phi(e_{34}) = \phi(e_{31}e_{14}) = ae_{34}$ и $\phi(e_{43}) = \phi(e_{41}e_{13}) = ae_{43}$, т. е. $d^* = e^* = 0$.

Из $\phi(e_{23}) = \phi(e_{23}(e_{33} - e_{44})) = 4ae_{23}$ получаем, что $a = 0$ и $\phi(e_{23}) = 0$. Аналогичным образом можем вывести равенства $\phi(e_{14}) = \phi(e_{24}) = \phi(e_{42}) = \phi(e_{32}) = 0$.

Равенства $d = e = 0$ вытекают из $\phi(e_{13}) = 0$, $\phi(e_{32}) = 0$ и

$$\phi(e_{12}) = -\phi(e_{13})e_{32} - e_{13}\phi(e_{32}) = 0, \quad \phi(e_{21}) = -\phi(e_{23})e_{31} - e_{23}\phi(e_{31}) = 0.$$

Поэтому ϕ тривиально.

Пусть $\delta = \frac{1}{2}$, тогда $\phi(e_{11} - e_{22}) = \alpha(e_{11} - e_{22})$, $\phi(e_{21}) = \alpha e_{21}$, $\phi(e_{21}) = \alpha e_{21}$, $\phi(e_{33} - e_{44}) = \beta(e_{33} - e_{44})$, $\phi(e_{34}) = \beta e_{34}$, $\phi(e_{43}) = \beta e_{43}$. Заметим, что

$$\phi(e_{13}) = \phi((e_{11} - e_{22})e_{13}) = \frac{1}{2}(\alpha(e_{11} - e_{22})e_{13} + (e_{11} - e_{22})\phi(e_{13})),$$

откуда $\phi(e_{13}) = \alpha e_{13}$. С другой стороны, $\phi(e_{13}) = \phi(e_{13}(e_{33} - e_{44})) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)e_{13}$, что влечет $\alpha = \beta$. Ясно, что $\phi(e_{23}) = \phi(e_{21}e_{13}) = \alpha e_{23}$, $\phi(e_{14}) = \phi(e_{13}e_{34}) = \alpha e_{14}$, $\phi(e_{24}) = \phi(e_{21}e_{14}) = e_{24}$. Аналогично можно получить, что $\phi(e_{41}) = \alpha e_{41}$, $\phi(e_{42}) = \alpha e_{42}$, $\phi(e_{31}) = \alpha e_{31}$, $\phi(e_{32}) = \alpha e_{32}$, т. е. $\phi(x) = \alpha x$ для произвольного $x \in A(1,1)$.

Пусть $\delta \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1$. В этом случае при $x \in (A(1,1))_0$ верно $\phi(x) = 0$. Ясно, что при $e_{ij} \in (A(1,1))_1$ имеем $\phi(e_{ij}) = \pm\phi((e_{11} - e_{22})e_{ij}) = \pm\delta(e_{11} - e_{22})\phi(e_{ij})$, откуда $\phi(e_{ij}) = 0$, т. е. ϕ тривиально. Лемма доказана.

В силу того, что $(P(n))_0$ и $(Q(n))_0$ не содержат простых алгебр размерности $d \leq 3$ в качестве прямых слагаемых, мы можем заключить, что нетривиальные δ-дифференцирования супералгебр $P(n)$ и $Q(n)$ при $\delta \neq \frac{1}{2}$ действуют нулевым образом соответственно на $(P(n))_0$ и $(Q(n))_0$.

Лемма 20. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры $Q(n)$. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(x) = \alpha x, \alpha \in F$.*

Доказательство. Пусть $t = 2n + 2$, $a_{i,j} = e_{i,j} + e_{n+1+i,n+1+j} + E$, $b_{i,j} = e_{i,n+1+j} + e_{n+1+i,j} + E$, $c_{i,j} = e_{i,n+1+i} + e_{n+1+i,i} - e_{j,n+1+j} - e_{n+1+j,j}$ и $\phi(b_{i,j}) = \sum\limits_{k,l=1}^{t} \lambda_{k,l}^{i,j} e_{k,l} + E$. Ясно, что если $\delta \neq \frac{1}{2}$, то $\phi((Q(n))_0) = 0$. Из

$$a_{i,i}b_{i,j} = b_{i,j}, \quad b_{i,j}a_{j,j} = b_{i,j} \tag{3}$$

легко вытекает, что $\phi(b_{i,j}) = \delta a_{i,i}\phi(b_{i,j})$ и $\phi(b_{i,j}) = \delta\phi(b_{i,j})a_{j,j}$, откуда

$$\phi(b_{i,j}) = \delta\left(\sum_{l=1}^{t} \lambda_{i,l}^{i,j} e_{i,l} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_{k,i}^{i,j} e_{k,i} + \sum_{l=1}^{t} \lambda_{n+1+i,l}^{i,j} e_{n+1+i,l} - \sum_{k=1}^{t} \lambda_{k,n+1+i}^{i,j} e_{k,n+1+i} + E\right),$$

т. е. $\phi(b_{i,j}) = \sum\limits_{k=1}^{t} \lambda_{k,i}^{i,j} e_{k,i} + \sum\limits_{k=1}^{t} \lambda_{k,n+1+i}^{i,j} e_{k,n+1+i} + E$. Это влечет

$$\phi(b_{i,j}) = \lambda_{j,i}^{i,j} e_{j,i} + \lambda_{j,n+1+i}^{i,j} e_{j,n+1+i} + \lambda_{n+1+j,i}^{i,j} e_{n+1+j,i} + \lambda_{n+1+j,n+1+i}^{i,j} e_{n+1+j,n+1+i} + E.$$

Отсюда $\phi(b_{k,j}) = \phi(a_{k,i}b_{i,j}) = \delta a_{k,i}\phi(b_{i,j}) = 0$. Таким образом, $\phi(c_{k,i}) = \phi(b_{k,i}a_{i,k}) = 0$, т. е. по линейности ϕ имеем $\phi = 0$.

Из леммы 5 при $\delta = \frac{1}{2}$ будет $\phi(x) = \alpha x$, $\alpha \in F$, $x \in (Q(n))_0$. Отсюда, используя (3), имеем

$$\phi(b_{i,j}) = \phi(b_{i,j}a_{j,j}) = \frac{1}{2}\left(\alpha b_{i,j} + \sum_{k=1}^{t} \lambda_{k,j}^{i,j} e_{k,j} - \sum_{l=1}^{t} \lambda_{j,l}^{i,j} e_{j,l} \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{t} \lambda_{k,n+1+j}^{i,j} e_{k,n+1+j} - \sum_{l=1}^{t} \lambda_{n+1+j,l}^{i,j} e_{n+1+j,l} + E\right),$$

что влечет $\phi(b_{i,j}) = \alpha b_{i,j}$, откуда $\phi(c_{k,i}) = \phi(b_{k,i}a_{i,k}) = \alpha c_{k,i}$. Тем самым $\phi(x) = \alpha x$, $x \in Q(n)$. Лемма доказана.

Лемма 21. *Пусть ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры $P(n)$. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(x) = \alpha x$, $\alpha \in F$.*

Доказательство. Пусть $t = 2n+2$, $a_{i,j} = e_{i,j} - e_{n+1+j,n+1+i}$, $a^{i,j} = e_{i,i} - e_{j,j} + e_{n+1+j,n+1+j} - e_{n+1+i,n+1+i}$, $b_{i,j} = e_{i,n+1+j} + e_{j,n+1+i}$, $c_{i,j} = e_{n+1+i,j} - e_{n+1+j,i}$, $\phi(b_{i,i}) = \sum\limits_{q,l=1}^{t} \nu_{q,l}^{i,i} e_{q,l}$, $\phi(c_{i,j}) = \sum\limits_{q,l=1}^{t} \lambda_{q,l}^{i,j} e_{q,l}$. Учитывая лемму 5, при $\delta \neq \frac{1}{2}$ имеем $\phi(P(n)_0) = 0$. Из соотношения $\phi(2b_{i,i}) = \phi(a^{i,k} b_{i,i}) = \delta a^{i,k} \phi(b_{i,i})$ получаем

$$\phi(b_{i,i}) = \frac{\delta}{2}\Bigg(\sum_{l=1}^{t} \nu_{i,l}^{i,i} e_{i,l} - \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,i}^{i,i} e_{q,i} - \sum_{l=1}^{t} \nu_{k,l}^{i,i} e_{k,l} + \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,k}^{i,i} e_{q,k}$$
$$+ \sum_{l=1}^{t} \nu_{n+1+k,l}^{i,i} e_{n+1+k,l} - \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,n+1+k}^{i,i} e_{q,n+1+k}$$
$$- \sum_{l=1}^{t} \nu_{n+1+i,l}^{i,i} e_{n+1+i,l} + \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,n+1+i}^{i,i} e_{q,n+1+i}\Bigg),$$

откуда $\phi(b_{i,i}) = 0$. Следовательно,

$$\phi(b_{j,i}) = \frac{1}{2}\phi(a_{j,i} b_{i,i}) = \frac{\delta}{2}(\phi(a_{j,i}) b_{i,i} + a_{j,i}\phi(b_{i,i})) = 0.$$

Для $c_{i,j}$ результат $\phi(c_{i,j}) = 0$ легко получаем, учитывая

$$c_{i,j} = c_{i,j} a^{j,k} = a^{i,k} c_{i,j}. \tag{4}$$

Теперь видим

$$\phi(c_{i,j}) = \phi(c_{i,j} a^{j,k}) = \delta \sum_{q,l=1}^{t} \lambda_{q,l}^{i,j} e_{q,l}(e_{j,j} - e_{k,k} - e_{n+1+j,n+1+j} + e_{n+1+k,n+1+k})$$
$$= \delta \sum_{l=1}^{t} \big(\lambda_{l,j}^{i,j} e_{l,j} - \lambda_{j,l}^{i,j} e_{j,l} - \lambda_{l,k}^{i,j} e_{l,k} + \lambda_{k,l}^{i,j} e_{k,l}$$
$$- \lambda_{l,n+1+j}^{i,j} e_{l,n+1+j} + \lambda_{n+1+j,l}^{i,j} e_{n+1+j,l} + \lambda_{l,n+1+k}^{i,j} e_{l,n+1+k} - \lambda_{n+1+k,l}^{i,j} e_{n+1+k,l}\big).$$

Поскольку $\delta \neq \frac{1}{2}, 1$, то $\phi(c_{i,j}) = \lambda_{j,n+1+j}^{i,j} e_{j,n+1+j}$. Таким образом, $\phi(c_{i,k}) = \phi(c_{i,j} a_{j,k}) = \delta\phi(c_{i,j}) a_{j,k} = 0$. Следовательно, ϕ тривиально.

Из леммы 5 при $\delta = \frac{1}{2}$ имеем $\phi(a_{i,j}) = \alpha a_{i,j}$ и $\phi(a^{i,j}) = \alpha a^{i,j}$. Учитывая $\phi(2b_{i,i}) = \phi(a^{i,k} b_{i,i})$, приходим к равенству

$$\phi(b_{i,i}) = \frac{1}{4}\Bigg(2\alpha b_{i,i} + \sum_{l=1}^{t} \nu_{i,l}^{i,i} e_{i,l} - \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,i}^{i,i} e_{q,i} - \sum_{l=1}^{t} \nu_{k,l}^{i,i} e_{k,l} + \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,k}^{i,i} e_{q,k}$$
$$+ \sum_{l=1}^{t} \nu_{n+1+k,l}^{i,i} e_{n+1+k,l} - \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,n+1+k}^{i,i} e_{q,n+1+k}$$
$$- \sum_{l=1}^{t} \nu_{n+1+i,l}^{i,i} e_{n+1+i,l} + \sum_{q=1}^{t} \nu_{q,n+1+i}^{i,i} e_{q,n+1+i}\Bigg),$$

откуда $\phi(b_{i,i}) = \alpha b_{i,i}$. Следовательно,

$$\phi(b_{j,i}) = \frac{1}{2}\phi(a_{j,i} b_{i,i}) = \frac{1}{4}(\phi(a_{j,i}) b_{i,i} + a_{j,i}\phi(b_{i,i})) = \alpha b_{j,i}.$$

Для $c_{i,j}$ результат $\phi(c_{i,j}) = \alpha c_{i,j}$ получаем аналогично, принимая во внимание (4). Отсюда $\phi(x) = \alpha x$, $x \in P(n)$. Лемма доказана.

Теорема 22. *Пусть A — классическая супералгебра Ли, ϕ — нетривиальное δ-дифференцирование супералгебры A. Тогда $\delta = \frac{1}{2}$ и $\phi(x) = \alpha x$ для некоторого $\alpha \in F$ и произвольного $x \in A$.*

Доказательство следует из теоремы 1 и лемм 9–21.

Автор выражает глубокую признательность А. П. Пожидаеву и В. Н. Желябину за неоценимую помощь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopkins N. C.* Generalizes derivations of nonassociative algebras // Nova J. Math. Game Theory Algebra. 1996. V. 5, N 3. P. 215–224.

2. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1409–1422.

3. *Филиппов В. Т.* О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 618–625.

4. *Кайгородов И. Б.* О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых алгебр и супералгебр // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 585–605.

5. *Kac V. G.* Lie superalgebras // Adv. Math. 1977. V. 26. P. 8–96.

Статья поступила 5 марта 2008 г.

Кайгородов Иван Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Kaygorodov.Ivan@gmail.com