Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 517.54

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ИСКАЖЕНИЕМ В НОРМЕ СОБОЛЕВА НА ОБЛАСТЯХ ДЖОНА ГРУПП ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. В. Исангулова

Аннотация. Работа является заключительной в цикле работ автора, посвященном устойчивости в теореме типа Лиувилля на группе Гейзенберга. Показано, что всякое отображение с ограниченным искажением на области Джона группы Гейзенберга приближается конформным отображением с порядком близости $\sqrt{K-1}$ в равномерной норме и с порядком близости $K-1$ в норме Соболева L_p^1 для всех $p < \frac{C}{K-1}$. Построено два примера, показывающие асимптотическую точность полученных результатов.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, отображение с ограниченным искажением, область Джона, мёбиусово преобразование.

§ 1. Введение

Работа является продолжением работ автора [1, 2], где установлена локальная теорема устойчивости отображений с ограниченным искажением в норме Соболева на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$. Цель данной работы — установить теорему устойчивости на областях Джона групп Гейзенберга. В евклидовом случае эти области ввел Джон при исследовании устойчивости изометрических отображений [3]. Области Джона можно рассматривать как естественное расширение класса липшицевых областей и областей, удовлетворяющих условию конуса. Оказалось [4], что геометрия этих областей в $\mathbb{R}^n$ позволяет построить в них интегральные представления и доказать теоремы вложения типа Соболева. На областях Джона справедлива также теорема устойчивости конформных отображений в норме Соболева [5]. Определение области Джона легко переносится на случай метрических пространств с внутренней метрикой (см., например, [6]).

На группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ установлен аналог теоремы Лиувилля и известна группа мёбиусовых преобразований M_n. Теория отображений с ограниченным искажением на группах Гейзенберга развита в работах [7–13]. В настоящей работе мы будем следовать всем определениям и обозначениям работ [1, 2].

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 06–01–00735), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российский ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1).

Определение 1. Пусть U — открытое множество группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $f : U \to \mathbb{H}^n$ — непостоянное отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{H}^n)$. Мы называем f *отображением с ограниченным искажением*, если существует постоянная $K \geq 1$ такая, что неравенство $|D_h f(x)|^\nu \leq KJ(x, f)$ выполняется почти всюду в U.

Наименьшая постоянная K в этом неравенстве называется *внешним коэффициентом искажения* отображения f и обозначается через $K_O(f)$. Число $K_O(f)^{\frac{1}{n+1}}$ называется (*линейным*) *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается символом $K(f)$.

Группа мёбиусовых преобразований M_n является объединением $M_n^+ \cup M_n^-$, где всякий элемент группы M_n^+ является комбинацией следующих отображений [8, с. 35]:

1) левый сдвиг $\pi_a(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{H}^n$,
2) растяжение $\delta_s x = (sz, s^2 t)$, $s > 0$,
3) поворот $\varphi_A(x) = (Az, t)$, $A \in U(n)$,
4) инверсия $j(x) = \left(\frac{z}{|z|^2 - it}, \frac{-t}{\rho(x)^4}\right)$,

и $M_n^- = \begin{cases} \iota M_n^+ & \text{при нечетных } n, \\ \varnothing & \text{при четных } n, \end{cases}$ $\iota(z, t) = (\overline{z}, -t)$ — отражение (см. обозначения в § 2).

Имеет место следующий аналог теоремы Лиувилля.

Предложение 1 (теорема типа Лиувилля [12, теорема 12], см. также [10]). *Если φ — отображение с ограниченным искажением связной области $U \subset \mathbb{H}^n$ и $K(\varphi) = 1$, то φ равно сужению на U действия элемента группы M_n.*

Для C^4-гладких квазиконформных отображений теорема типа Лиувилля доказана в [7], а для произвольных квазиконформных отображений — в [9].

Определение 2. Область (открытое связное множество) $U \subset \mathbb{H}^n$ называется *областью Джона с внутренним радиусом α и внешним радиусом β*, или *областью класса $J(\alpha, \beta)$*, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, если существует выделенная точка $p_0 \in U$ такая, что любая другая точка $p \in U$ может быть соединена в U с точкой p_0 спрямляемой кривой $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq l \leq \beta$, где s — длина дуги, для которой $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = p_0$ и

$$\operatorname{dist}[\gamma(s), \partial U] \geq \frac{\alpha}{l} s \quad \text{для всех } s \in [0, l]. \tag{1}$$

Главным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть U — область класса $J(\alpha, \beta)$ на группе Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n > 1$. Тогда существуют числа $D_1, D_2, D_3 > 0$ такие, что для всякого отображения с ограниченным искажением $f : U \to \mathbb{H}^n$ существует мёбиусово отображение φ, для которого верны следующие утверждения:*

1) *если $K(f) < 1 + D_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$, то*

$$\rho(\varphi^{-1} \circ f(x), x) \leq C_1 \frac{\beta^2}{\alpha} \sqrt{K(f) - 1} \quad \text{для всех } x \in U;$$

2) *если $K(f) < 1 + D_2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu+3}$ и $p \in \left[1, \frac{D_3}{K(f)-1} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu+3}\right)$, то*

$$\int_U |D_h(\varphi^{-1} \circ f)(x) - I|^p \, dx \leq C_2 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{(1+\nu)p+2\nu} (K(f) - 1)^p |U|.$$

Константа C_1 зависит только от n. Константа C_2 зависит от n и p.

Отметим основное отличие теоремы 1 от результата Ю. Г. Решетняка в евклидовом пространстве [5, гл. 4, теорема 4.1]. В работе [5] установлена близость отображения с ограниченным искажением к мёбиусову в норме L_p^1 на области Джона, но нет асимптотики зависимости показателя суммируемости p от $K(f)-1$. Применяя схему доказательства теоремы 1, можно показать, что в евклидовом случае можно взять $p < C(\frac{\alpha}{\beta})^{n+3}\frac{1}{K(f)-1}$.

На областях Джона группы $\mathbb{H}^1$ верна следующая

Теорема 2. *Пусть U — область класса $J(\alpha,\beta)$ в $\mathbb{H}^1$. Тогда существуют $\varepsilon=\varepsilon(\beta/\alpha)>0$ и функция $\lambda:[0,\varepsilon)\to[0,\infty)$, $\lambda(t)\to 0$ при $t\to 0$, такие, что для всякого отображения с ограниченным искажением $f:U\to\mathbb{H}^1$, $K(f)<1+\varepsilon$, существует мёбиусово отображение φ, удовлетворяющее следующим соотношениям:*

$$\rho(\varphi^{-1}\circ f(x),x)\le C_1\frac{\beta^2}{\alpha}\sqrt{\lambda(K(f)-1)}\quad \text{для всех } x\in U,$$
$$\int\limits_U |D_h(\varphi^{-1}\circ f)(x)-I|^p dx \le C_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^{5p+8}(\lambda(K(f)-1))^p|U|$$

для всех $p\in\big[1,\frac{1}{\lambda(K(f)-1)}(\frac{\alpha}{\beta})^7\big)$. Константа C_1 не зависит от α, β и f. Константа C_2 зависит только от p.

Оценка вида $\rho(\varphi^{-1}\circ f(x),x)\le\frac{\beta^2}{\alpha}\mu(K-1)$ для всех $x\in U$, где $\mu(K-1)\to 0$ при $K\to 1$, на областях Джона групп Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n\ge 1$, получена Н. С. Даирбековым [11].

Доказательство теорем 1 и 2 развивает метод Ю. Г. Решетняка, разработанный в евклидовом случае [5]. Переход от локальных оценок устойчивости к глобальным основан на использовании свойств близких к тождественному мёбиусовых преобразований и свойствах областей Джона.

Кратко опишем структуру работы. В § 2 приведены необходимые определения. В § 3 исследуются близкие к тождественному мёбиусовы преобразования, в § 4 даны доказательства теорем 1 и 2. В § 5 построено два примера. Первый пример показывает, что близость отображения с ограниченным искажением к конформному в равномерной норме в теореме 1 не может быть улучшена. Второй пример показывает асимптотическую точность показателя суммируемости частных производных отображения с ограниченным искажением.

Основные результаты работы сформулированы в работах автора [14, 15].

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. С. К. Водопьянову за постоянное внимание и помощь в работе.

§ 2. Группа Гейзенберга

Точки группы Гейзенберга $\mathbb{H}^n$, $n\ge 1$, отождествляются с точками пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$. Левоинвариантные векторные поля

$$X_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+2x_{i+n}\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}},\quad X_{i+n}=\frac{\partial}{\partial x_{i+n}}-2x_i\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}},\quad i=1,\dots,n,$$

образуют базис горизонтального подрасслоения V_1 касательного пространства. Вместе с векторным полем $X_{2n+1}=\frac{\partial}{\partial x_{2n+1}}=-\frac14[X_j,X_{j+n}]$, $j=1,\dots,n$, они образуют стандартный базис алгебры Ли V.

Точку $x\in\mathbb{H}^n$ можно рассматривать как (z,t), где $z=(x_1+ix_{n+1},\dots,x_n+ix_{2n})\in\mathbb{C}^n$, $t=x_{2n+1}\in\mathbb{R}$. В комплексной форме записи векторные поля

$$Z_j=\frac{1}{2}(X_j-i\,X_{j+n})=\frac{\partial}{\partial z_j}+i\overline{z}_j\frac{\partial}{\partial t},\quad \overline{Z}_j=\frac{1}{2}(X_j+i\,X_{j+n})=\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}-i\,z_j\frac{\partial}{\partial t},$$

$$T=X_{2n+1}=\frac{\partial}{\partial t},$$

$j=1,\dots,n$, образуют левоинвариантный базис алгебры Ли V.

Для точек $(z,t),(w,p)\in\mathbb{H}^n$, $z,w\in\mathbb{C}^n$, $t,p\in\mathbb{R}$, групповая операция задается соотношением

$$(z,t)\cdot(w,p)=(z+w,t+p+2\operatorname{Im}\langle z,w\rangle).$$

Растяжение δ_s, $s>0$, действует на группе Гейзенберга по правилу $\delta_s(z,t)=(sz,s^2t)$ и является гомоморфизмом группы Гейзенберга. *Однородная норма* $\rho(z,t)=(|z|^4+t^2)^{1/4}$ определяет *метрику Гейзенберга* ρ: $\rho(x,y)=\rho(x^{-1}\cdot y)$, $x,y\in\mathbb{H}^n$. Отметим, что метрика Гейзенберга является метрикой, а не квазиметрикой, т. е. $\rho(x\cdot y)\le\rho(x)+\rho(y)$ для всех точек $x,y\in\mathbb{H}^n$ (см., например, [1]). Мы будем иногда писать $|x|$ вместо $\rho(x)$ для элемента $x\in\mathbb{H}^n$.

Мера Лебега на $\mathbb{R}^{2n+1}$ является биинвариантной мерой Хаара. Для шара $B(x,r)=\{y\in\mathbb{H}^n:\rho(x,y)<r\}$ имеем $|B(x,r)|=r^\nu|B(0,1)|$, где $\nu=2n+2$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{H}^n$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{H}^n$, отображение $f\colon\Omega\to\mathbb{H}^n$ принадлежит классу Соболева (определение пространства Соболева приведено, например, в работах [16, 17]). Тогда $X_jf(x)\in V_1(f(x))$ для всех $j=1,\dots,2n$ (см., например, [16]), поэтому матрица $D_hf(x)=(X_if_j(x))_{i,j=1,\dots,2n}$ определяет линейное отображение горизонтального пространства $V_1(x)$ в $V_1(f(x))$ для почти всех $x\in\Omega$, называемое *аппроксимативным горизонтальным дифференциалом.* В свою очередь, D_hf почти всюду определяет сохраняющий градуировку гомоморфизм алгебр Ли $Df:V\to V$ [17, 10]. Определитель матрицы $Df(x)$ называется (*формальным*) *якобианом* отображения f и обозначается символом $J(x,f)$.

Отображение $f:\mathbb{H}^n\to\mathbb{H}^n$ можно рассматривать также и в комплексной форме записи. Тогда определены две $n\times n$ матрицы $Zf(x)$ и $\overline{Z}f(x)$.

§ 3. Свойства мёбиусовых преобразований групп Гейзенберга

В данном параграфе исследуем мёбиусовы преобразования. Мы покажем, что равномерная близость мёбиусова преобразования φ к тождественному на шаре с порядком близости ε влечет близость φ к тождественному на большем шаре с тем же порядком близости (лемма 4) и близость $D_h\varphi$ к тождественной матрице с порядком близости ε^2 (лемма 5).

Предложение 2 [1, предложение 1]. *Пусть* $\varphi\in M_n$. *Тогда* $\varphi=\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau\circ j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j$, *если* $\varphi\in M_n^+$, *и* $\varphi=\iota\circ\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau\circ j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j$, *если* $\varphi\in M_n^-$, *где* $\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{H}^n$, $A\in U(n)$, $\tau\in(0,\infty)$.

Заметим, что если $\varphi\in M_n$ и $\varphi(\infty)=\infty$, то $\varphi=(\iota\circ)\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau$ (т. е. $\mathbf{b}=0$).

Лемма 1. *Пусть* $\varphi=j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j$, $\mathbf{b}=(b,\beta)\in\mathbb{H}^n$, $|b|<\varepsilon^2$, $|\beta|<\varepsilon^2$ *и* $\varepsilon<1/4$. *Тогда*

$$\rho(\varphi(x),x)<5\varepsilon\quad\textit{и}\quad|D_h\varphi(x)-I|<14\varepsilon^2\quad\textit{для всех } x\in B(0,1).$$

Доказательство. Прежде всего проверим, что $\varphi(x) \neq \infty$ при $x \in B(0,1)$. Последнее возможно, только если $\mathbf{b} \cdot j(x) = 0$. Следовательно, $\varepsilon(1+\varepsilon^4)^{1/4} > |\mathbf{b}| = |j(x)| = \frac{1}{|x|} > 1$, что невозможно при $\varepsilon < 1/4$.

Рассмотрим $x = (z,t) \in B(0,1)$ и положим $(w,p) = j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j(x)$. Имеем

$$\rho(\varphi(x), x) = |(w-z, p-t-2\operatorname{Im}\langle z,w\rangle)| \leq |w-z| + \sqrt{|p-t-2\operatorname{Im}\langle z,w\rangle|}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\begin{gathered} w = \frac{b(|z|^2-it)+z}{\sigma}, \quad p = \frac{t-\beta|x|^4 - 2\operatorname{Im}\langle b, z(|z|^2+it)\rangle}{|\sigma|^2}, \\ \sigma = 1 + 2\langle z,b\rangle + (|b|^2 - i\beta)(|z|^2-it). \end{gathered} \tag{2}$$

Для $\varepsilon < 1/4$

$$|\mathbf{b}| < \varepsilon(1+1/4^4)^{1/4}, \quad |1-|\sigma|^2| < 4|b|^2 + |\mathbf{b}|^4 + 4|b| + 2|\mathbf{b}|^2 + 4|b|\,|\mathbf{b}|^2,$$

$$|\operatorname{Im}\sigma| \leq |1-\sigma| < 2|b| + |\mathbf{b}|^2, \quad |\sigma| > 1 - 2|b| - |\mathbf{b}|^2 > 0.8124.$$

Получаем

$$|w-z| = \frac{|b(|z|^2-it) + z(1-\sigma)|}{|\sigma|} \leq \frac{|b| + |1-\sigma|}{|\sigma|} \leq \frac{3|b| + |\mathbf{b}|^2}{|\sigma|} < 1.3\varepsilon,$$

$$\begin{aligned} |p-t-2\operatorname{Im}\langle z,w\rangle| &= \frac{|t(1-|\sigma|^2) - \beta|x|^4 + 2\operatorname{Im}\langle z, b(|z|^2-it)(1-\overline{\sigma}) - z\overline{\sigma}\rangle|}{|\sigma|^2} \\ &\leq \frac{|1-|\sigma|^2| + |\beta| + 2|b||1-\overline{\sigma}| + 2|\operatorname{Im}\sigma|}{|\sigma|^2} \leq 21.8\varepsilon^2 \end{aligned}$$

и, следовательно, $\rho(\varphi(x), x) < 5\varepsilon$.

Поскольку $\overline{Z}j \equiv 0$, то $|D_h j - I| = |Zj - I|$. Для всех векторов $h \in \mathbb{C}^n$ имеем

$$(Zj)h = \frac{1}{|z|^2-it}\left(h - \frac{2}{|z|^2-it}\langle h,z\rangle z\right).$$

Возьмем $x = (z,t) \in B(0,1)$ и $y = \mathbf{b} \cdot j(x) = (v,q)$. Тогда

$$\begin{aligned} Z\varphi(x)h &= Zj(\mathbf{b}\cdot j(x))Zj(x)h = \frac{1}{|z|^2-it} Zj(y)\left(h - \frac{2}{|z|^2-it}\langle h,z\rangle z\right) \\ &= \frac{1}{(|z|^2-it)(|v|^2-iq)}\left(h - \frac{2z\langle h,z\rangle}{|z|^2-it} - \frac{2v\langle h,v\rangle}{|v|^2-iq} + \frac{4v\langle z,v\rangle\langle h,z\rangle}{(|z|^2-it)(|v|^2-iq)}\right) \end{aligned}$$

и

$$v = b + \frac{z}{|z|^2-it}, \quad q = \beta - \frac{t}{|x|^4} + 2\operatorname{Im}\left\langle b, \frac{z}{|z|^2-it}\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |v|^2 - iq &= |b|^2 + \frac{|z|^2}{|x|^4} + 2\operatorname{Re}\left\langle b, \frac{z}{|z|^2-it}\right\rangle - i\beta + \frac{it}{|x|^4} - 2i\operatorname{Im}\left\langle b, \frac{z}{|z|^2-it}\right\rangle \\ &= |b|^2 - i\beta + \frac{|z|^2+it}{|x|^4} + \frac{2\langle z,b\rangle}{|z|^2-it}. \end{aligned}$$

Так же, как и в (2), обозначим

$$\sigma = (|z|^2-it)(|v|^2-iq) = (|z|^2-it)(|b|^2-i\beta) + 1 + 2\langle z,b\rangle.$$

Имеем

$$(Z\varphi(x)-I)h=\frac{1}{\sigma}\biggl((1-\sigma)h-\frac{2z\langle h,z\rangle}{|z|^2-it}-\frac{2(b(|z|^2-it)+z)}{\sigma}\Bigl\langle h,b+\frac{z}{|z|^2-it}\Bigr\rangle$$
$$+\frac{4\langle h,z\rangle}{\sigma}\Bigl\langle z,b+\frac{z}{|z|^2-it}\Bigr\rangle\Bigl(b+\frac{z}{|z|^2-it}\Bigr)\biggr)=Ah+Bb+Cz,$$

где

$$A=\frac{1-\sigma}{\sigma},\quad |A|<\frac{2|b|+|\mathbf{b}|^2}{|\sigma|}<3.7\varepsilon^2;$$

$$|B|=\left|\frac{2}{\sigma^2}\Bigl(2\langle h,z\rangle\langle z,b\rangle+\frac{2\langle h,z\rangle|z|^2}{|z|^2+it}-(|z|^2-it)\langle h,b\rangle-\frac{|z|^2-it}{|z|^2+it}\langle h,z\rangle\Bigr)\right|$$
$$=\frac{2}{|\sigma|^2}|\langle h,z\rangle(1+2\langle z,b\rangle)-(|z|^2-it)\langle h,b\rangle|<\frac{2}{|\sigma|^2}(1+3|b|)<3.6;$$

$$|C|=\left|\frac{2}{\sigma^2}\Bigl(\frac{2\langle h,z\rangle\langle z,b\rangle}{|z|^2-it}+\frac{2\langle h,z\rangle|z|^2}{|x|^4}-\frac{\langle h,z\rangle\sigma}{|z|^2-it}-\langle h,b\rangle-\frac{\langle h,z\rangle}{|z|^2+it}\Bigr)\right|$$
$$=\frac{2|\langle h,z\rangle(|b|^2-i\beta)+\langle h,b\rangle|}{|\sigma|^2}<\frac{2|b|+2|\mathbf{b}|^2}{|\sigma|^2}<6.3\varepsilon^2.$$

Отсюда $|D_h\varphi(x)-I|=\sup\limits_{|h|\le 1}|Z\varphi(x)h-h|\le|A|+|B|\,|b|+|C|\le 14\varepsilon^2$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $\varphi\in M_n$, $\varphi(\infty)=\infty$ и $\rho(\varphi(x),x)<\varepsilon<3/8$ для всех $x\in B(0,1)$. Тогда*

$$\varphi=\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau,$$

где $|1-\tau^2|<2\varepsilon^2$, $|A-I|<10\varepsilon^2$, $\mathbf{c}=(c,\gamma)\in\mathbb{H}^n$, $c\in\mathbb{C}^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$, и $|c|<2\varepsilon^2$, $|\gamma|<\varepsilon^2$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\varphi\in M_n^+$. Предположим обратное: $\varphi\in M_n^-$. Тогда по предложению 2 $\varphi=\iota\circ\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau$, $A\in U(n)$, $\tau>0$, $\mathbf{c}=(c,\gamma)\in\mathbb{H}^n$. Для $x=(0,t)$ имеем

$$|x^{-1}\cdot\varphi(x)|=|(\overline{c},-t(1+\tau^2)-\gamma|<\varepsilon.$$

Полагая $t=0$, получаем $|\gamma|<\varepsilon^2$. Рассмотрим $t=1$. Тогда

$$1\le|1+\tau^2|\le|1+\tau^2+\gamma|+|\gamma|\le 2\varepsilon^2;$$

противоречие с тем, что $\varepsilon<3/8$. Следовательно, $\varphi\in M_n^+$ и $\varphi=\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau$.

Фиксируем $x=(z,t)\in B(0,1)$. Имеем $|\mathbf{c}|=\rho(\varphi(0),0)<\varepsilon$, $|\gamma|<\varepsilon^2$ и

$$\varphi(x)=(c+\tau Az,\gamma+\tau^2t+2\operatorname{Im}\langle c,\tau Az\rangle),$$

$$|x^{-1}\cdot\varphi(x)|=|(c+\tau Az-z,\gamma+\tau^2t+2\operatorname{Im}\langle c,\tau Az\rangle-t-2\operatorname{Im}\langle z,\tau Az+c\rangle)|.$$

Отсюда

$$|\tau Az-z|\le|c+\tau Az-z|+|c|\le 2\varepsilon\quad\Longrightarrow\quad|\tau A-I|<2\varepsilon.$$

Полагая $z=0$, $t=1$ в неравенстве

$$|\gamma+\tau^2t+2\operatorname{Im}\langle c,\tau Az\rangle-t-2\operatorname{Im}\langle z,\tau Az+c\rangle|<\varepsilon^2,$$

получаем $|\tau^2-1|\le|\gamma+\tau^2-1|+|\gamma|<2\varepsilon^2$.

При $t=0$ имеем

$$2|\operatorname{Im}\langle 2c+\tau Az,z\rangle| \le |\gamma+2\operatorname{Im}\langle c,\tau Az\rangle-2\operatorname{Im}\langle z,\tau Az+c\rangle| \\ +|\gamma|+2|\operatorname{Im}\langle c,\tau Az-z+c\rangle|<4\varepsilon^2 \quad \text{для всех } z\in\mathbb{C}^n,\ |z|\le 1.$$

Пусть $\tau Ac=\xi c+d$, $\langle d,c\rangle=0$, $\xi\in\mathbb{C}$, $d\in\mathbb{C}^n$. Положим $z=\alpha c$, $|z|\le 1$. Тогда

$$|\operatorname{Im}\langle 2c+\tau Az,z\rangle| = |\operatorname{Im}\langle 2c+\alpha(\xi c+d),\alpha c\rangle| = |c|^2|\operatorname{Im}(2\bar\alpha+\xi|\alpha|^2)|<2\varepsilon^2.$$

Пусть $c\ne 0$. Для $\alpha=\frac{1}{|c|}$ выводим $|\operatorname{Im}\langle 2c+\tau Az,z\rangle|=|\operatorname{Im}\xi|<2\varepsilon^2$. Для $\alpha=\frac{-i}{|c|}$ получаем

$$2|c|\le |c|^2\bigl|\operatorname{Im}\bigl(2\bar\alpha+\xi|\alpha|^2\bigr)\bigr|+|\operatorname{Im}\xi|<4\varepsilon^2.$$

Следовательно,

$$|\operatorname{Im}\langle Az,z\rangle|=\frac{|\operatorname{Im}\langle\tau Az,z\rangle|}{\tau}\le\frac{|\operatorname{Im}\langle 2c+\tau Az,z\rangle|+|\operatorname{Im}\langle 2c,z\rangle|}{\tau}<\frac{6\varepsilon^2}{\sqrt{1-2\varepsilon^2}}.$$

Рассмотрим собственные значения λ_k линейного отображения A и соответствующие им собственные векторы z^k: $Az^k=\lambda_k z^k$, $|z^k|=1$. Поскольку $A^*A=I$, имеем $|\lambda_k|=1$. Подставляя $z=z^k$, получаем $|\operatorname{Im}\langle Az^k,z^k\rangle|=|\operatorname{Im}\lambda_k|<\frac{6\varepsilon^2}{\sqrt{1-2\varepsilon^2}}<1$ при условии, что $\varepsilon<3/8$. Отсюда $|1-(\operatorname{Re}\lambda_k)^2|=|\operatorname{Im}\lambda_k|^2<\frac{36\varepsilon^4}{1-2\varepsilon^2}$.

Напомним, что $|A-I|\le|\tau A-I|+|\tau-1|<2\varepsilon\bigl(1+\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-2\varepsilon^2}}\bigr)<1$ при $\varepsilon<3/8$. Следовательно, $|1-\operatorname{Re}\lambda_k|\le|\lambda_k-1|\le|A-I|<1$ и $0<\operatorname{Re}\lambda_k\le 1$. Более того, можно оценить $1+\operatorname{Re}\lambda_k>1+\sqrt{1-\frac{36\varepsilon^4}{1-2\varepsilon^2}}>1.0975$.

Таким образом,

$$|A-I|^2=\sup_i\{|\lambda_i-1|^2\}=\sup_i\{|1-\operatorname{Re}\lambda_i|^2+|\operatorname{Im}\lambda_i|^2\} \\ =\sup_i\{2(1-\operatorname{Re}\lambda_i)\}=\sup_i\left\{\frac{2|1-(\operatorname{Re}\lambda_i)^2|}{1+\operatorname{Re}\lambda_i}\right\}$$

и $|A-I|<10\varepsilon^2$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\varphi\in M_n$, $\varphi(\infty)\ne\infty$ и $\rho(\varphi(x),x)<\varepsilon<1/169$ для всех $x\in B(0,1)$. Тогда*

$$\varphi=\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau\circ j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j,$$

где $|1-\tau^2|<(5\varepsilon)^2$, $|A-I|<(55\varepsilon)^2$, $A\in U(n)$, $\mathbf{c}=(c,\gamma)\in\mathbb{H}^n$, $|c|<(25\varepsilon)^2$, $|\gamma|<\varepsilon^2$, $|\mathbf{c}|<\varepsilon$, $\mathbf{b}=(b,\beta)\in\mathbb{H}^n$, $|b|<(14\varepsilon)^2$, $|\beta|<(5\varepsilon)^2$, $|\mathbf{b}|<5\varepsilon$.

Доказательство. (i) В силу предложения 2 имеем $\varphi=\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau\circ j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j$, если $\varphi\in M_n^+$, и $\varphi=\iota\circ\pi_{\mathbf{c}}\circ\varphi_A\circ\delta_\tau\circ j\circ\pi_{\mathbf{b}}\circ j$, если $\varphi\in M_n^-$. Здесь $A\in U(n)$, $\tau>0$, $\mathbf{c}=(c,\gamma)\in\mathbb{H}^n$ и $\mathbf{b}=(b,\beta)\in\mathbb{H}^n\setminus\{(0,0)\}$.

Используя $|\iota(x)|=|x|$ для всех $x\in\mathbb{H}^n$, получаем $|\mathbf{c}|=\rho(\varphi(0),0)<\varepsilon$ и, следовательно, $|\gamma|<\varepsilon^2$, $|c|<\varepsilon$.

Имеем $\varphi(x)\ne\infty$ для всех $x\in B(0,1)$. Это означает, что

$$\mathbf{b}\notin-(j(B(0,1))=\mathbb{H}^n\setminus B(0,1)\quad\Longleftrightarrow\quad|\mathbf{b}|<1.$$

Оценим τ и $\mathbf{b}$.

Случай $\tau\le 1$. Положим $x=j(\delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b})\in S(0,1)=\partial B(0,1)$. Очевидно, $|\mathbf{b}\cdot j(x)|=|\mathbf{b}\cdot\delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b}|=\left|\left(b\left(1+\frac{1}{|\mathbf{b}|}\right),\beta\left(1+\frac{1}{|\mathbf{b}|^2}\right)\right)\right|\ge\sqrt{1+|\mathbf{b}|^2}$ и

$$|\varphi(x)|\le\varepsilon+\tau|j(\mathbf{b}\cdot\delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b})|=\varepsilon+\frac{\tau}{|\mathbf{b}\cdot\delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b}|}\le\varepsilon+\frac{\tau}{\sqrt{1+|\mathbf{b}|^2}}.$$

Если $|\varphi(x)| \geq 1$, то $1-\tau \leq \varepsilon$, $|\mathbf{b}| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}}{1-\varepsilon}$. Если $|\varphi(x)| < 1$, то

$$\varepsilon > \rho(\varphi(x), x) \geq 1 - \varepsilon - \frac{\tau}{\sqrt{1+|\mathbf{b}|^2}}.$$

Следовательно, $1-\tau < 2\varepsilon$ и $|\mathbf{b}| < \frac{2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{1-2\varepsilon}$.

Случай $\tau > 1$. Положим $x = j(\delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b}^{-1}) \in S(0,1) = \partial B(0,1)$. Очевидно, $|\mathbf{b}\cdot j(x)| = \left|\mathbf{b}\cdot \delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b}^{-1}\right| = \left|\left(b\left(1-\frac{1}{|\mathbf{b}|}\right), \beta\left(1-\frac{1}{|\mathbf{b}|^2}\right)\right)\right| < \sqrt{1-|\mathbf{b}|^2}$ и

$$\begin{aligned}|\varphi(x)| = |\pi_{\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j(x)| &\geq \tau |j(\mathbf{b}\cdot \delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b}^{-1})| - \varepsilon \\ &= \frac{\tau}{\left|\mathbf{b}\cdot\delta_{1/|\mathbf{b}|}\mathbf{b}^{-1}\right|} - \varepsilon > \frac{\tau}{\sqrt{1-|\mathbf{b}|^2}} - \varepsilon.\end{aligned}$$

Если $|\varphi(x)| \leq 1$, то $\tau - 1 \leq \varepsilon$, $|\mathbf{b}| \leq \frac{\sqrt{\varepsilon(2+\varepsilon)}}{1+\varepsilon}$. В случае $|\varphi(x)| > 1$ выводим

$$\varepsilon > \rho(\varphi(x), x) > \frac{\tau}{\sqrt{1-|\mathbf{b}|^2}} - \varepsilon - 1.$$

Значит, $\tau - 1 < 2\varepsilon$ и $|\mathbf{b}| < \frac{2\sqrt{\varepsilon(1+\varepsilon)}}{1+2\varepsilon}$.

Окончательно получаем

$$|\tau - 1| < 2\varepsilon, \quad |\mathbf{b}| < \frac{2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}}{1-2\varepsilon}.$$

Рассмотрим $\varepsilon < 1/169$. Тогда $|\mathbf{b}| < \frac{52}{167}\sqrt{42\varepsilon} < \frac{4\sqrt{42}}{167} < \frac{1}{6}$ и $\frac{167}{169} < \tau < \frac{171}{169}$.

(ii) Покажем, что $\varphi \in M_n^+$. Предположим противное: $\varphi = \iota \circ \pi_{\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j \in M_n^-$. Рассмотрим $z = 0$, $t = 1$. Положим $j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j(z,t) = (w,p)$. Тогда

$$\varepsilon > |x^{-1}\cdot\varphi(x)| = |(\overline{\tau A w + c}, -\tau^2 p - \gamma - 1 - 2\operatorname{Im}\langle c, \tau A w\rangle)|.$$

Легко проверить, что

$$w = \frac{b}{|b|^2 - i(\beta-1)}, \quad p = \frac{1-\beta}{|b|^4 + (\beta-1)^2}.$$

При этом $||b|^2 - i(\beta-1)| \geq 1 - |\mathbf{b}|^2 > \frac{9}{10}$ и $|w| < \frac{1}{2}$ при $\varepsilon < \frac{1}{169}$. Очевидно, $|\tau A w| < 2\varepsilon$, $|\operatorname{Im}\langle c, \tau A w\rangle| \leq |c||\tau A w| \leq 2\varepsilon^2$ и $|\tau^2 p + 1| < \varepsilon^2 + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^2 < 1$. Поскольку $|\beta| \leq |\mathbf{b}|^2 < \frac{1}{36}$, получаем $p > 0$ и $|\tau^2 p + 1| > 1$; противоречие. Следовательно, $\varphi \in M_n^+$.

(iii) Положим $j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j(x) = (w,p)$. Тогда w и p вычисляются по формуле (2) и

$$\varepsilon > |x^{-1}\cdot\varphi(x)| = |(\tau A w + c - z, \tau^2 p + \gamma - t + 2\operatorname{Im}\langle c, \tau A w\rangle - 2\operatorname{Im}\langle z, \tau A w + c\rangle)|.$$

Тем самым

$$|\tau A w + c - z| < \varepsilon, \quad |\tau^2 p + \gamma - t + 2\operatorname{Im}\langle c, \tau A w\rangle - 2\operatorname{Im}\langle z, \tau A w + c\rangle| < \varepsilon^2.$$

Используя $|c| \leq |\mathbf{c}| < \varepsilon$, получаем $|\tau A w - z| \leq |\tau A w + c - z| + |c| < 2\varepsilon$.

Рассмотрим $z = 0$, $t = 1$. Тогда $w = \frac{-ib}{\sigma}$, $\sigma = 1 - \beta - i|b|^2$, $|\sigma| < 1 + |\mathbf{b}|^2$. Следовательно,

$$|\tau A w| < 2\varepsilon \implies \tau|b| < 2\varepsilon|\sigma| \implies |b| < 2.073\varepsilon.$$

Рассмотрим произвольную точку $x = (z,t) \in B(0,1)$. Тогда, $|\sigma| \le 1 + 2|b| + |\mathbf{b}|^2 < 1.049$, $|1-\sigma| < 2|b| + |\mathbf{b}|^2 < 8.22\varepsilon$,

$$|\tau A w - z| = \frac{|\tau A(b(|z|^2 - it) + z) - \sigma z|}{|\sigma|} < 2\varepsilon$$

и

$$|\tau A z - z| < 2\varepsilon|\sigma| + \tau|b| + |1-\sigma| < 12.416\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |\tau A - I| < 12.416\varepsilon.$$

В силу $|\gamma| < \varepsilon^2$ и $|\operatorname{Im}\langle c, \tau A w - z + c\rangle| < \varepsilon^2$ получаем

$$|\tau^2 p - t + 4\operatorname{Im}\langle c, z\rangle - 2\operatorname{Im}\langle z, \tau A w\rangle| < 4\varepsilon^2.$$

(IV) Оценим τ, β. Рассмотрим $z = 0$, $|t| = 1$. Тогда $p = \frac{t - \beta t^2}{|\sigma|^2}$, $\sigma = 1 - it(|b|^2 - i\beta)$, $|\sigma|^2 = (1-\beta t)^2 + |b|^4 t^2 = 1 - 2\beta t + |\mathbf{b}|^4$ и

$$4\varepsilon^2 > |\tau^2 p - t| = \frac{|\tau^2(1 - t\beta) - (1 - 2t\beta + |\mathbf{b}|^4)|}{|\sigma|^2} = \frac{|(\tau^2 - 1)(1 - t\beta) + t\beta - |\mathbf{b}|^4|}{|\sigma|^2}.$$

Следовательно,

$$|(\tau^2 - 1)(1 - t\beta) + t\beta| < 4\varepsilon^2|\sigma|^2 + |\mathbf{b}|^4.$$

Если $\beta = 0$, то $|\tau^2 - 1| < 4.1\varepsilon^2$.

Положим $t = \operatorname{sign}\beta$, если $\tau > 1$ и $\beta \ne 0$. Тогда $t\beta = |\beta|$, $1 - t\beta \ge 1 - |\mathbf{b}|^2 > 0$, $|\sigma|^2 < 1 + |\mathbf{b}|^4$ и двойное неравенство

$$|(\tau^2 - 1)(1 - t\beta)| < |(\tau^2 - 1)(1 - t\beta) + t\beta| < 4\varepsilon^2|\sigma|^2 + |\mathbf{b}|^4$$

влечет $|\tau^2 - 1| < 21.1\varepsilon^2$, $|\beta| < 20.585\varepsilon^2$.

При $\tau \le 1$ и $\beta \ne 0$ положим $t = -\operatorname{sign}\beta$. Тогда $t\beta = -|\beta|$, $1 - t\beta = 1 + |\beta| > 1$, $|\sigma|^2 < (1 + |\mathbf{b}|^2)^2$ и из двойного неравенства

$$|(\tau^2 - 1)(1 - t\beta)| < |(\tau^2 - 1)(1 - t\beta) + t\beta| < 4\varepsilon^2|\sigma|^2 + |\mathbf{b}|^4$$

получаем $|\tau^2 - 1| < 20.778\varepsilon^2$, $|\beta| < 20.778\varepsilon^2$.

Таким образом, $|\mathbf{b}| < 4.607\varepsilon$, $|\beta| < 20.778\varepsilon^2$, $|1 - \tau^2| < 21.1\varepsilon^2$, $0.99963 < \tau < 1.00037$.

(V) Для оценки $|b|$ приведем вспомогательное вычисление. Имеем

$$\begin{aligned}\tau^2 p - t &= \tau^2 \frac{t - \beta|x|^4 - 2\operatorname{Im}\langle b(|z|^2 - it), z\rangle}{|\sigma|^2} - t \\ &= \frac{t(\tau^2 - |\sigma|^2) - 2\operatorname{Im}\langle b(|z|^2 - it), z\rangle - \beta|x|^4}{|\sigma|^2} \\ &= \frac{-4t\operatorname{Re}\langle z, b\rangle - 2\operatorname{Im}\langle b(|z|^2 - it), z\rangle - \beta|x|^4}{|\sigma|^2} + t\frac{\tau^2 - |\sigma|^2 + 4\operatorname{Re}\langle z, b\rangle}{|\sigma|^2}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\langle z, \tau A w\rangle &= \operatorname{Im}\left\langle \tau A^* z, \frac{b(|z|^2 - it) + z}{\sigma}\right\rangle = \frac{\operatorname{Im}\langle \sigma\tau A^* z, b(|z|^2 - it) + z\rangle}{|\sigma|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Im}\langle \tau A^* z, b(|z|^2 - it) + z\rangle + 2\operatorname{Im}(\langle \tau A^* z, z\rangle\langle z, b\rangle)}{|\sigma|^2} \\ &\quad + \frac{\operatorname{Im}\langle \tau A^* z(\sigma - 1), b(|z|^2 - it)\rangle + \operatorname{Im}\langle \tau A^* z(\sigma - 1 - 2\langle z, b\rangle), z\rangle}{|\sigma|^2},\end{aligned}$$

где число σ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$|\sigma|^2 = 1 + 4|\langle z, b\rangle|^2 + |\mathbf{b}|^4|x|^4 + 4\operatorname{Re}\langle z, b\rangle + 2\operatorname{Re}((|b|^2 - i\beta)(|z|^2 - it)) + 4\operatorname{Re}(\langle z, b\rangle(|b|^2 + i\beta)(|z|^2 + it)) = 1 + 4\operatorname{Re}\langle z, b\rangle + O(\varepsilon^2),$$

$$||\sigma|^2 - 1 - 4\operatorname{Re}\langle z, b\rangle| < 60.7\varepsilon^2,$$

$$|\sigma|^2 < (1 + 2|b| + |\mathbf{b}|^2)^2 < 1.0512, \quad ||\sigma|^2 - 1| < 8.652\varepsilon, \quad |1 - \sigma| < 4.272\varepsilon.$$

Поэтому

$$| -4t\operatorname{Re}\langle z, b\rangle - 2\operatorname{Im}(\langle b(|z|^2 - it), z\rangle - 2\langle c, z\rangle + \langle \tau A^* z, b(|z|^2 - it) + z\rangle + 2\langle \tau A^* z, z\rangle\langle z, b\rangle)| < 4\varepsilon^2|\sigma|^2 + |\beta| + |\tau^2 - 1| + ||\sigma|^2 - 1 - 4\operatorname{Re}\langle z, b\rangle| + 2\tau|\sigma - 1|\,|b| + 2\tau|\mathbf{b}|^2 + 4|c|\,||\sigma|^2 - 1| < 202\varepsilon^2.$$

Отсюда

$$| -4t\operatorname{Re}\langle z, b\rangle + 4\operatorname{Im}\langle c, z\rangle - 2\operatorname{Im}\langle \tau A^* z, z\rangle - 4\operatorname{Im}(\langle \tau A^* z, z\rangle\langle z, b\rangle)| < 202\varepsilon^2 + 2|\operatorname{Im}\langle b(|z|^2 - it), \tau A^* z - z\rangle| < 202\varepsilon^2 + 2|b|\,|\tau A - I|.$$

Более того,

$$|\operatorname{Im}(\langle \tau A^* z, z\rangle\langle z, b\rangle)| = |\operatorname{Im}\langle \tau A^* z, z\rangle\operatorname{Re}\langle z, b\rangle + \operatorname{Re}\langle \tau A^* z, z\rangle\operatorname{Im}\langle z, b\rangle| \le |\operatorname{Re}\langle \tau A^* z, z\rangle\operatorname{Im}\langle z, b\rangle| + |\tau A^* - I||b|,$$

и, следовательно,

$$| -4t\operatorname{Re}\langle z, b\rangle + 4\operatorname{Im}\langle c, z\rangle - 2\operatorname{Im}\langle z, \tau A z\rangle - 4\operatorname{Im}\langle z, b\rangle\operatorname{Re}\langle z, \tau A z\rangle| = 4|\operatorname{Im}\langle z, b(\operatorname{Re}\langle z, \tau A z\rangle - it) + c + \tau A z/2\rangle| < 202\varepsilon^2 + 6|\tau A - I||b| < 357\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что

$$|\operatorname{Im}\langle z, b(\operatorname{Re}\langle z, \tau A z\rangle - it) + c + \tau A z/2\rangle| < 90\varepsilon^2$$

для всех $x = (z, t) \in B(0, 1)$.

(vi) Оценим $|b|$. Предположим $b \neq 0$, $c = \xi b + d$ и $\tau A b = \eta b + e$, где $\langle d, b\rangle = \langle e, b\rangle = 0$, $\xi = \rho e^{i\theta}$. Пусть $z = e^{i\alpha}\frac{\zeta b}{|b|}$. Тогда

$$|\operatorname{Im}\langle z, b(\operatorname{Re}\langle z, \tau A z\rangle - it) + c + \tau A z/2\rangle| = ||b|\operatorname{Im}(e^{i\alpha}\zeta(|\zeta|^2\operatorname{Re}\eta + it + \bar{\xi})) + |\zeta|^2\operatorname{Im}\bar{\eta}/2|.$$

Оценим η. Напомним, что $|\tau A - I| < 12.416\varepsilon$. Отсюда

$$(12.416\varepsilon)^2 \ge \left|(\tau A - I)\frac{b}{|b|}\right| = |\eta - 1|^2 + \frac{|e|^2}{|b|^2} \implies |\eta - 1| < 12.416\varepsilon.$$

Получаем $\operatorname{Re}\eta > 1 - 12.416\varepsilon$. В случае $\cos\theta \ge 0$ положим $|\zeta| = 1$, $\zeta \in \mathbb{R}$, $t = 0$. Тогда $|\operatorname{Re}\eta + \bar{\xi}| \ge \operatorname{Re}\eta > 1 - 12.416\varepsilon > 0.926$. Существует такое число α, что $e^{i\alpha}(\operatorname{Re}\eta + \bar{\xi}) = i|\operatorname{Re}\eta + \bar{\xi}|$. Отсюда

$$90\varepsilon^2 > \big||b|\zeta|\operatorname{Re}\eta + \bar{\xi}| + \operatorname{Im}\bar{\eta}/2\big| \ge 0.926|b| + |\operatorname{Im}\bar{\eta}|/2,$$

если мы положим $\zeta = 1$ при $\operatorname{Im}\bar{\eta} > 0$ и $\zeta = -1$ при $\operatorname{Im}\bar{\eta} \le 0$.

В случае $\cos\theta < 0$ положим

$$|\zeta|^2\operatorname{Re}\eta + it = \begin{cases} R(1/4 + i\sqrt{15}/4), & \text{если } \sin\theta < 0, \\ R(1/4 - i\sqrt{15}/4), & \text{если } \sin\theta \ge 0, \end{cases}$$

где $R = 0.994$. Проверим, что $|z|^4 + t^2 < 1$. Действительно, $|z|^4 + t^2 = |\zeta|^4 + |t|^2 = R^2\big(\frac{1}{16(\operatorname{Re}\eta)^2} + \frac{15}{16}\big) < 1$, так как $\operatorname{Re}\eta > 0.926$. Тогда $||\zeta|^2 \operatorname{Re}\eta + it + \bar{\xi}| \geq |t| = \frac{R\sqrt{15}}{4}$. Существует такое число α, что $e^{i\alpha}(|\zeta|^2 \operatorname{Re}\eta + it + \bar{\xi}) = ||\zeta|^2 \operatorname{Re}\eta + it + \bar{\xi}|$. Таким образом,

$$90\varepsilon^2 > |(\operatorname{Im}\zeta)|b|\,||\zeta|^2 \operatorname{Re}\eta + it + \bar{\xi}| + |\zeta|^2 \operatorname{Im}\bar{\eta}/2| \geq |b|\frac{R\sqrt{15}|\zeta|}{4} + |\zeta|^2 |\operatorname{Im}\bar{\eta}|/2,$$

если мы положим $\operatorname{Im}\zeta = |\zeta|$ при $\operatorname{Im}\bar{\eta} \geq 0$ и $\operatorname{Im}\zeta = -|\zeta|$ при $\operatorname{Im}\bar{\eta} < 0$.

Окончательно получаем $|b| < 195\varepsilon^2 < (14\varepsilon)^2$.

(vii) Осталось оценить c и A. Имеем

$$|\operatorname{Im}\langle z, c + \tau Az/2\rangle| < 90\varepsilon^2 + (||z|^2 - it| + |\tau Az - z|)|b| < (17.34\varepsilon)^2 = \epsilon^2, \quad \epsilon < 3/8.$$

Следовательно, аналогичные вычисления, как и в лемме 2, влекут

$$|c| < 2\epsilon^2 < (25\varepsilon)^2, \quad |A - I| < 10\epsilon^2 < (55\varepsilon)^2. \qquad \square$$

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in M_n$, $\rho(\varphi(x), x) < \varepsilon r$ для всех $x \in B(a, r)$, $\varepsilon < 1/169$ и $1 < s < \frac{1}{5\varepsilon}$. Тогда существует функция $L(s)$ такая, что*

$$\rho(\varphi(x), x) < L(s)\varepsilon r \quad \text{для всех } x \in B(a, sr).$$

Замечание. Лемма 4 является полным аналогом евклидова случая [5]. На группах Гейзенберга Н. С. Даирбеков [11, лемма 2.2] доказал более слабое утверждение: $\rho(\varphi(x), x) < \mu(\varepsilon, s)r$, где $\mu(\varepsilon, s) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. (i) Пусть $\varphi(\infty) = \infty$, $B(a, r) = B(0, 1)$. Тогда по лемме 2 $\varphi = \pi_{\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau$, $A \in U(n)$, $\tau > 0$, $\mathbf{c} = (c, \gamma) \in \mathbb{H}^n$. Более того, $|\tau^2 - 1| < 2\varepsilon^2$, $|I - A| < 10\varepsilon^2$, $|c| < 2\varepsilon^2$, $|\gamma| < \varepsilon^2$, $|\mathbf{c}| < \varepsilon$.

Пусть $y = \delta_s(x) \in B(0, s)$, $x \in B(0, 1)$. Тогда

$$\rho(\varphi(y), y) = s\rho(\pi_{\delta_{1/s}\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau(x), x) \leq s\rho(\delta_{1/s}\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^{-1} \cdot x, x) + s\rho(\varphi(x), x) < 5s\varepsilon,$$

так как

$$\begin{aligned}|x^{-1} \cdot \delta_{1/s}\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^{-1} \cdot x| &= |(c(1/s - 1), \gamma(1/s^2 - 1) + 4(1/s - 1)\operatorname{Im}\langle c, z\rangle)| \\ &< |\mathbf{c}|\left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{1/2} + 2|c|^{1/2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)^{1/2} < 4\varepsilon.\end{aligned}$$

(ii) Пусть $\varphi(\infty) \neq \infty$, $B(a, r) = B(0, 1)$ и $\varepsilon < 1/169$. В силу леммы 3 $\varphi = \pi_{\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j$, где $A \in U(n)$, $\tau > 0$, $\mathbf{c} = (c, \gamma) \in \mathbb{H}^n$ и $\mathbf{b} = (b, \beta) \in \mathbb{H}^n$. При этом $|1 - \tau^2| < (5\varepsilon)^2$, $|A - I| < (55\varepsilon)^2$, $|c| < (25\varepsilon)^2$, $|\gamma| < \varepsilon^2$, $|\mathbf{c}| < \varepsilon$, $|b| < (14\varepsilon)^2$, $|\beta| < (5\varepsilon)^2$, $|\mathbf{b}| < 5\varepsilon$.

Прежде всего проверим, будет ли $\varphi(x) = \infty$ для некоторого $x \in B(0, s)$. Это возможно только в случае $\mathbf{b} \cdot j(x) = 0$. Следовательно, $5\varepsilon > |\mathbf{b}| = |j(x)| = \frac{1}{|x|} > \frac{1}{s}$, что невозможно при $s < \frac{1}{5\varepsilon}$.

Фиксируем $y \in B(0, s)$. Тогда $x = \delta_{1/s}(y) \in B(0, 1)$. Имеем

$$\begin{aligned}\rho(\varphi(y), y) &= s\rho(\pi_{\delta_{1/s}\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_{\delta_{1/s}\mathbf{b}} \circ j(x), x) \\ &\leq s\rho(\pi_{\delta_{1/s}\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau(x), x) + s\tau\rho(j \circ \pi_{\delta_{1/s}\mathbf{b}} \circ j(x), x) \\ &\leq s\rho(\pi_{\delta_{1/s}\mathbf{c}}(x), x) + s\rho(\varphi_A \circ \delta_\tau(x), x) + s\tau\rho(j \circ \pi_{\delta_{1/s}\mathbf{b}} \circ j(x), x).\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое отдельно:

$$\rho(\pi_{\delta_{1/s}\mathbf{c}}(x), x) = |(c/s, \gamma/s^2 + 4\operatorname{Im}\langle c/s, z\rangle| < |\mathbf{c}|/s + 2|c/s|^{1/2} < \varepsilon/s + 50\varepsilon/s^{1/2};$$

$$\begin{aligned}\rho(\varphi_A \circ \delta_\tau(x), x) &= |(\tau A z - z, t(\tau^2 - 1) - 2\operatorname{Im}\langle z, \tau A z\rangle)| \\ &< |\tau A - I| + |\tau^2 - 1|^{1/2} + |2(\tau A - I)|^{1/2} < 102\varepsilon;\end{aligned}$$

$$\rho(j \circ \pi_{\delta_{1/s}\mathbf{b}} \circ j(x), x) < 5\max\{\sqrt{|b|/s}, \sqrt{|\beta|}/s\} < 70\varepsilon/s^{1/2}.$$

В последнем соотношении мы использовали лемму 1 и неравенство $j \circ \pi_{\delta_{1/s}\mathbf{b}} \circ j(x) \neq \infty$ для всех $x \in B(0,1)$, т. е. то, что $|\mathbf{b}| < s$. Это выполнено при $|\mathbf{b}| < 5\varepsilon < 1 < s$.

Окончательно $\rho(\varphi(y), y) < \varepsilon(1 + 120\sqrt{s} + 102s) = L(s)\varepsilon < 223s\varepsilon$.

(III) Пусть $B = B(a, r)$. Определим $\psi = \delta_{1/r} \circ \pi_{-a} \circ \varphi \circ \pi_a \circ \delta_r$. Тогда для всех $x \in B(0,1)$ имеем

$$\rho(\psi(x), x) = \rho(\delta_{1/r} \circ \pi_{-a} \circ \varphi(y), \delta_{1/r} \circ \pi_{-a}(y)) = \frac{1}{r}\rho(\varphi(y), y) < \varepsilon,$$

где $y = \pi_a \circ \delta_r(x) \in B(a, r)$. Следовательно, из пп. (I) и (II) получаем

$$\rho(\psi(x), x) < L(s)\varepsilon \quad \text{для всех } x \in B(0, s).$$

Возьмем $y \in B(a, sr)$. Тогда $x = \delta_{1/r} \circ \pi_{-a}(y) \in B(0, s)$ и

$$\rho(\varphi(y), y) = \rho(\varphi(a \cdot \delta_r x), a \cdot \delta_r x) = r\rho(\psi(x), x) < rL(s)\varepsilon. \qquad \square$$

Лемма 5. *Пусть $\varphi \in M_n$, $\varepsilon < 1/169$, $\rho(\varphi(x), x) < \varepsilon r$ для всех $x \in B(a, r)$. Тогда*

$$|D_h\varphi(x) - I| < (N\varepsilon)^2 \quad \text{для всех } x \in B(a, r).$$

Константа N не зависит от φ и $B(a, r)$.

Доказательство. (I) Пусть $\varphi(\infty) = \infty$ и $B(a, r) = B(0, 1)$. По лемме 2 $\varphi = \pi_\mathbf{c} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau$, $A \in U(n)$, $\tau > 0$, $|A - I| < 10\varepsilon^2$, $|\tau^2 - 1| < 2\varepsilon^2$. Рассмотрим $x \in B(0, 1)$. Тогда $|D_h\varphi(x) - I| = |\tau A - I| < |A - I| + |\tau - 1| < 12\varepsilon^2$.

(II) Пусть $\varphi(\infty) \neq \infty$ и $B(a, r) = B(0, 1)$. В силу леммы 3 $\varphi = \pi_\mathbf{c} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_\mathbf{b} \circ j$, где $\tau > 0$, $A \in U(n)$, $\mathbf{c} = (c, \gamma) \in \mathbb{H}^n$, $\mathbf{b} = (b, \beta) \in \mathbb{H}^n$. При этом $|1 - \tau^2| < (5\varepsilon)^2$, $|A - I| < (55\varepsilon)^2$, $|c| < (25\varepsilon)^2$, $|\gamma| < \varepsilon^2$, $|\mathbf{c}| < \varepsilon$, $|b| < (14\varepsilon)^2$, $|\beta| < (5\varepsilon)^2$, $|\mathbf{b}| < 5\varepsilon$.

Применяя лемму 1, получаем $|D_h(j \circ \pi_\mathbf{b} \circ j)(x) - I| \leq 14 \cdot (14\varepsilon)^2$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|D_h\varphi(x) - I| &= |\tau A D_h(j \circ \pi_\mathbf{b} \circ j)(x) - I| \\ &= \tau\,|D_h(j \circ \pi_\mathbf{b} \circ j)(x) - I| + |A - I| + |\tau - 1| < (76\varepsilon)^2\end{aligned}$$

для всех $x \in B(0, 1)$.

(III) Рассмотрим произвольный шар $B(a, r)$. Тогда $\varphi = \pi_a \circ \delta_r \circ \psi \circ \delta_{1/r} \circ \pi_{-a}$, где $\rho(\psi(x), x) < \varepsilon$ для всех $x \in B(0, 1)$. Следовательно, как и в пп. (I) и (II), имеем $|D_h\psi(x) - I| < (N\varepsilon)^2$ для всех $x \in B(0, 1)$.

Рассмотрим точку $y \in B(a, r)$. Тогда $x = \delta_{1/r}(a^{-1} \cdot y) \in B(0, 1)$ и $|D_h\varphi(y) - I| = |D_h\psi(x) - I| < (N\varepsilon)^2$. $\square$

Расстояние d (внутренняя метрика Карно — Каратеодори) между точками $x, y \in \mathbb{H}^n$ определяется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых, соединяющих точки x, y, и является неримановым (кусочно-гладкая кривая γ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(t) \in V_1(\gamma(t))$). Будем обозначать символом $B_c(x, r)$ шар в метрике Карно — Каратеодори радиуса r с центром в точке x. Можно показать, что $d(x, y)$ всегда является конечной левоинвариантной метрикой, причем расстояния $d(x, y)$ и $\rho(x, y)$ эквивалентны.

Следствие. *Существуют $\varepsilon_0, s_0 > 0$ такие, что если $d(\varphi(x), x) < \varepsilon r$ для всех $x \in B_c(a, r)$, где $\varphi \in M_n$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, то для всех $s < \frac{s_0}{\varepsilon}$ имеют место неравенства*

$$d(\varphi(x), x) < L_1(s)\varepsilon r \quad \text{для всех } x \in B_c(a, sr)$$

и

$$|D_h\varphi(x) - I| < (N_1\varepsilon)^2 \quad \text{для всех } x \in B_c(a, r).$$

Функция $L_1(s)$ и константа N_1 не зависят от φ и ε.

§ 4. Доказательство основных результатов

Области Джона и области с равномерным внутренним условием спирали. Нам понадобится следующая лемма о покрытии (см., например, [6]).

Лемма 6. *Из всякого семейства шаров $\mathfrak{B}$, радиусы которых равномерно ограничены, можно выделить не более чем счетное дизъюнктное подсемейство $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$ такое, что $\bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}} B \subset \bigcup\limits_{B \in \mathfrak{B}'} 5B$.*

Определение 4. Открытое множество $U \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет *условию внутренней спирали* в точке $x_0 \in \partial U$, если существуют числа $0 < c \leq 1$ и $R_0 > 0$ такие, что для любого $0 < r < R_0$ можно найти такую точку $A_r(x_0) \in U$, что

$$rc < \rho(A_r(x_0), x_0) \leq r, \quad \operatorname{dist}(A_r(x_0), \partial U) > rc.$$

Если для любой точки $x_0 \in \partial U$ выполнено условие внутренней спирали с одними и теми же константами c и R_0, то U удовлетворяет *равномерному условию внутренней спирали*, что обозначается как $U \in A(c)$.

Так же, как и в [18], верно следующее утверждение.

Предложение 3. 1. *Если $U \in J(\alpha, \beta)$, то любую точку $x \in \partial U$ можно соединить с p_0 спрямляемой кривой $\gamma(s)$, удовлетворяющей неравенству* (1).

2. *Если $U \in J(\alpha, \beta)$, то $U \in A(c)$ с константами $R_0 = \beta$ и $c = \frac{\alpha}{\beta}$.*

3. *Если $U \in A(c)$, то для любых числа $r < R_0$ и точки $x \in \partial U$ найдется точка $y \in U$ такая, что $\rho(x, y) \leq r$ и $\operatorname{dist}(y, \partial U) = cr$.*

Следующее предложение обобщает теорему 1 работы [18], доказанную в евклидовом пространстве.

Предложение 4. *Пусть ограниченное открытое множество $U \subset \mathbb{H}^n$ удовлетворяет равномерному условию внутренней спирали, $U \in A(c)$. Тогда существует число $\gamma > 0$, зависящее только от c и n, такое, что*

$$\int\limits_U \frac{dx}{\operatorname{dist}(x, \partial U)^\gamma} < \infty.$$

Если $U \in J(\alpha,\beta)$, то

$$\int\limits_U \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} < C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2\nu}\frac{|U|}{\alpha^\gamma},$$

где $\gamma < \widetilde{C}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$. Константы C и $\widetilde{C}$ зависят только от n.

Доказательство. (i) Пусть $\varkappa \in \mathbb{N}$ и $\varkappa$ больше 4. В каждой точке $x \in U$ построим шар $B\big(x, \frac{\operatorname{dist}(x,\partial U)}{\varkappa}\big) \subset U$. По лемме 6 из этих шаров можно выбрать последовательность $\{B_i = B(x_i, r_i)\}$ такую, что $U \subset \bigcup\limits_i B_i$ и шары $\left\{\frac{1}{5}B_i\right\}$ попарно не пересекаются.

Определим $R = \sup\limits_i r_i$ и положим $V_j = \bigcup\limits_{\frac{R}{2^{j+1}} < r_i \le \frac{R}{2^j}} B_i$, $j = 0, 1, \dots$. Рассмотрим шар $B_i \subset V_j$ и точку $x \in B_i$. Тогда

$$\rho(y,x) \ge \rho(x_i,y) - \rho(x_i,x) \ge \operatorname{dist}(x_i,\partial U) - r_i = (\varkappa-1)r_i > \frac{(\varkappa-1)R}{2^{j+1}}$$

для всех $y \in \partial U$. Так как $\operatorname{dist}(x_i,\partial U) = \varkappa r_i$, то $\rho(x_i,y) = \varkappa r_i$ для некоторой точки $y \in \partial U$. Имеем

$$\rho(x,y) \le \rho(x_i,y) + \rho(x_i,x) < (\varkappa+1)r_i \le \frac{(\varkappa+1)R}{2^j}.$$

Следовательно, $\frac{(\varkappa-1)R}{2^{j+1}} < \operatorname{dist}(x,\partial U) < \frac{(\varkappa+1)R}{2^j}$. Кроме того, $V_j \subset U\big(\frac{(\varkappa+1)R}{2^j}\big)$, где $U(h) = \{x \in U : \operatorname{dist}(x,\partial U) < h\}$, $h > 0$.

С другой стороны, пусть $\frac{(\varkappa+1)R}{2^{j+1}} \le \operatorname{dist}(x,\partial U) \le \frac{(\varkappa-1)R}{2^j}$ для некоторой точки $x \in U$. Тогда $x \in V_j$.

Пусть $l \ge m$ и два шара $B_i \subset V_l$ и $B_j \subset V_m$ пересекаются. Для всякой точки $x \in B_i \cap B_j$ имеем $\frac{(\varkappa-1)R}{2^{m+1}} < \operatorname{dist}(x,\partial U) < \frac{(\varkappa+1)R}{2^l}$. Отсюда $1 \le 2^{l-m} < 2\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}$, что возможно только при $l = m+1$ или $l = m$. Следовательно, $V_m \cap V_l = \varnothing$ при $|l-m| > 1$.

(ii) Рассмотрим n_0 такое, что $\frac{(\varkappa-1)R}{c2^{n_0}} < R_0$ и $\frac{(\varkappa-1)R}{c2^{n_0-1}} \ge R_0$.

Фиксируем $j \ge n_0$, $r = \frac{(\varkappa-1)R}{c2^j} < R_0$ и точку $z \in U(cr)$. Поскольку $\operatorname{dist}(z,\partial U) < cr$, существует точка $x \in \partial U$ такая, что $\rho(x,z) < cr$. Сопоставим точке x точку $y \in U$ такую, что $\rho(x,y) \le r$ и $\operatorname{dist}(y,\partial U) = cr = \frac{(\varkappa-1)R}{2^j}$. Следовательно, $y \in V_j$. Значит, найдется шар $B_i \subset V_j$ такой, что $y \in B_i$. Имеем

$$\rho(z,x_i) \le \rho(x_i,y) + \rho(y,x) + \rho(x,z) < r_i + r + rc < r_i\left(2\varkappa - 1 + 2\frac{\varkappa-1}{c}\right) = kr_i,$$

так как $r = \frac{(\varkappa-1)}{c2^j}R < \frac{2(\varkappa-1)}{c}r_i$. В силу произвольности выбора точки $z \in U(cr)$ получаем

$$U\left(\frac{(\varkappa-1)R}{2^j}\right) \subset \widetilde{V}_j = \bigcup_{\frac{R}{2^{j+1}} < r_i \le \frac{R}{2^j}} kB_i.$$

Оценим $|\widetilde{V}_j|$. Имеем

$$|\widetilde{V}_j| \le \sum_{\frac{R}{2^{j+1}} < r_i \le \frac{R}{2^j}} |kB_i| = (5k)^\nu \sum_{\frac{R}{2^{j+1}} < r_i \le \frac{R}{2^j}} \left|\frac{1}{5}B_i\right| \le (5k)^\nu |V_j|,$$

так как шары $\left\{\frac{1}{5}B_i\right\}$ попарно не пересекаются.

(iii) Вспомним, что $V_m \subset U\left(\frac{(\varkappa+1)R}{2^m}\right) \subset U\left(\frac{(\varkappa-1)R}{2^{m-1}}\right)$. Отсюда $V_m \subset \widetilde{V}_j$ для всех $m > j$. Включение $V_j \subset \widetilde{V}_j$ очевидно. Обозначим $W_m = V_m \cup V_{m+2} \cup V_{m+4} \cup \dots$. Тогда $|W_m| = \sum\limits_{r=0}^{\infty} |V_{m+2r}|$, так как $V_i \cap V_{i+2} = \varnothing$ для всех i. Имеем

$$|V_j| + |W_{j+2}| = |W_j| \le |\widetilde{V}_j| \le (5k)^\nu |V_j| \quad \Longrightarrow \quad |W_{j+2}| \le \frac{1}{\lambda}|V_j|$$

для всех $j \ge n_0$, где $\lambda = \frac{1}{(5k)^\nu - 1}$.

Покажем по индукции, что $|W_{j+2l+2}| \le \frac{|V_j|}{\lambda(1+\lambda)^l}$ для всех $j \ge n_0$, $l \ge 0$. При $l = 0$ неравенство, очевидно, имеет место. Пусть оно выполнено для некоторого l. Тогда

$$|W_{j+2l+2}| = |W_{j+2l+4}| + |V_{j+2l+2}| \ge (1+\lambda)|W_{j+2l+4}|$$

и, следовательно, $|W_{j+2l+4}| \le \frac{|W_{j+2l+2}|}{1+\lambda} \le \frac{|V_j|}{\lambda(1+\lambda)^{l+1}}$, что и требовалось показать.

Поскольку $\operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{\varkappa-1}{2^{j+1}}R \ge \frac{R}{2^{j-1}}$ при $x \in V_j$, $\varkappa > 4$, то

$$\int\limits_U \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} \le \int\limits_{U\setminus(W_{n_0+2}\cup W_{n_0+3})} \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} + \int\limits_{W_{n_0+2}} \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma}$$
$$+ \int\limits_{W_{n_0+3}} \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} \le |U \setminus (W_{n_0+2} \cup W_{n_0+3})| \left(\frac{2^{n_0}}{R}\right)^\gamma$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} |V_{n_0+2l}| \left(\frac{2^{n_0+2l-1}}{R}\right)^\gamma + \sum_{l=1}^{\infty} |V_{n_0+2l+1}| \left(\frac{2^{n_0+2l}}{R}\right)^\gamma.$$

В силу $|V_{j+2+2l}| \le |W_{j+2+2l}| \le \frac{|V_j|}{\lambda(1+\lambda)^l}$ имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} |V_{n_0+2l}| \left(\frac{2^{n_0+2l-1}}{R}\right)^\gamma \le |V_{n_0}| \left(\frac{2^{n_0+1}}{R}\right)^\gamma \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{2l\gamma}}{\lambda(1+\lambda)^l} = \frac{|V_{n_0}|}{\lambda} \left(\frac{2^{n_0+1}}{R}\right)^\gamma \frac{1}{1 - \frac{4^\gamma}{1+\lambda}}$$

при условии $\frac{4^\gamma}{1+\lambda} < 1$, что эквивалентно $\gamma < \log_4(1+\lambda)$. Последнее слагаемое оценивается аналогично. Таким образом, $\int\limits_U \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} < \infty$ для $\gamma < \log_4(1+\lambda)$.

(iv) Рассмотрим теперь $U \in J(\alpha, \beta)$. Оценим $\dfrac{2^{n_0}}{R}$. Имеем $R_0 = \beta$, $c = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha \le \varkappa R \le \beta$. Поэтому условие $\frac{R_0}{2} \le \frac{(\varkappa-1)R}{c 2^{n_0}} < R_0$ эквивалентно условию $2^{n_0-1}\alpha \le (\varkappa-1)R < 2^{n_0}\alpha$. Следовательно, $\frac{\varkappa-1}{\alpha} < \frac{2^{n_0}}{R} \le 2\frac{\varkappa-1}{\alpha}$ и $2^{n_0} \le 2\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{\beta}{\alpha}$, $n_0 \ge 0$.

Очевидно, что $\frac{1}{c_1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu < \lambda < \left(\frac{\alpha}{c_2\beta}\right)^\nu \le \frac{1}{c_2^\nu} \le \frac{1}{c_2^4}$, где $c_1 = (5(4\varkappa-3))^\nu$, $c_2 = 10(\varkappa-1)$, влечет $\log_4(1+\lambda) = \frac{\ln(1+\lambda)}{\ln 4} > \frac{0.99\lambda}{\ln 4} > \frac{0.99\alpha^\nu}{c_1\beta^\nu \ln 4}$. Таким образом, достаточно рассмотреть $\gamma \le \frac{0.99\alpha^\nu}{c_1\beta^\nu \ln 4}$. Положим $2\gamma \le \frac{0.99\alpha^\nu}{c_1\beta^\nu \ln 4}$. Тогда

$$\frac{1}{1 - \frac{4^\gamma}{1+\lambda}} < \frac{1}{1 - (1+\lambda)^{-1/2}} = \frac{(1+\lambda)^{1/2}((1+\lambda)^{1/2}+1)}{\lambda} < \frac{3}{\lambda}.$$

Окончательно

$$\int\limits_U \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} \le \left(\frac{2^{n_0}}{R}\right)^\gamma \frac{C|U|}{\lambda^2} \le C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2\nu} \frac{|U|}{\alpha^\gamma}. \qquad \square$$

Области Джона и Бомана. Фиксируем натуральное число $\varkappa > 3$.

Лемма 7. *Пусть $U \in J(\alpha,\beta)$. Тогда существует выделенный шар B_0, $\varkappa B_0 \subset U$, такой, что для любого шара $B \subset U$, $\varkappa B \subset U$, существует цепь шаров $B_0, B_1, \dots, B_{k-1}, B_k$ ($B_k = B$) такая, что*

1) $\varkappa B_j \subset U$, $r(B_j) = \frac{\sigma^j \alpha}{\varkappa}$ *для всех* $j = 0,\dots,k-1$, *где* $\sigma = 1 - \frac{\alpha}{3\varkappa\beta}$;

2) *для каждого* $j = 1,\dots,k$ *существует шар* $G_j \subset \frac{2}{3}B_j \cap \frac{2}{3}B_{j-1}$ *такой, что* $r(G_j) = \frac{\sigma^j\alpha}{3\varkappa}$;

3) *существует число* $h > 0$ *такое, что* $B \subset hG_j$ *для всех* $j = 1,\dots,k$.

Замечание. Если в заданной области существует выделенный шар, для которого выполнены условия леммы 7, то такая область называется *областью Бомана*. Лемма 7 показывает, что область Джона всегда является областью Бомана (ср. с [19]). Обратное утверждение не всегда верно [19].

Доказательство. Пусть p_0 — выделенная точка U. Из определения области Джона следует, что $B(p_0,\alpha) \subset U \subset B(p_0,\beta)$. Фиксируем шар $B = B(p,r) \subset U$, $\varkappa B \subset U$. Рассмотрим кривую $\gamma(s)$, $0 \le s \le l \le \beta$, соединяющую p и p_0 и удовлетворяющую всем условиям из определения области Джона.

Возьмем $\sigma = 1 - \frac{\alpha}{3\varkappa\beta} \ge 1 - \frac{1}{3\varkappa} \ge \frac{11}{12}$ и обозначим $B_m = B(p_m, r_m)$, где

$$p_m = \gamma(s_m), \quad s_m = \sigma^m l, \quad r_m = \frac{\sigma^m\alpha}{\varkappa}, \quad m = 0,1,2,\dots.$$

Легко видеть, что $\varkappa B_m \subset U$. Действительно,

$$\operatorname{dist}(p_m,\partial U) = \operatorname{dist}(\gamma(s_m),\partial U) \ge \frac{\alpha}{l}s_m = \alpha\sigma^m = \varkappa r_m$$

для всех $m = 0,1,2,\dots$. Также легко видеть, что для всех $m = 0,1,2,\dots$ выполнено

$$\rho(p_m,p_{m-1}) \le s_{m-1} - s_m = l\sigma^{m-1}(1-\sigma) \le \beta\sigma^{m-1}\frac{\alpha}{3\varkappa\beta} = \frac{r_{m-1}}{3}.$$

Рассмотрим целое число m_0 такое, что $\sigma^{m_0} \le \frac{2\varkappa r}{(2+3\varkappa)\beta}$ и $\sigma^{m_0-1} > \frac{2\varkappa r}{(2+3\varkappa)\beta}$, здесь r — радиус шара B. Поскольку $\varkappa B \subset U \subset B(p_0,\beta)$, имеем $\frac{2\varkappa r}{(2+3\varkappa)\beta} < \frac{2}{2+3\varkappa}$ и $m_0 > 1$. Очевидно, что $\ln\frac{1}{\sigma} > 1 - \sigma$ и

$$m_0 < 1 + \frac{\ln\frac{(2+3\varkappa)\beta}{2\varkappa r}}{\ln\frac{1}{\sigma}} < 1 + \frac{\ln\frac{(2+3\varkappa)\beta}{2\varkappa r}}{1-\sigma} = 1 + \frac{3\varkappa\beta}{\alpha}\ln\frac{(2+3\varkappa)\beta}{2\varkappa r}.$$

Кроме того, $\frac{2}{3}B_{m_0} \subset \frac{2}{3}B$. Действительно, если $x \in \frac{2}{3}B_{m_0}$, то

$$\rho(x,p) \le \rho(x,p_{m_0}) + \rho(p_{m_0},p) < \frac{2}{3}r_{m_0} + s_{m_0} < \left(\frac{2}{3\varkappa} + 1\right)\sigma^{m_0}\beta \le \frac{2}{3}r.$$

Положим $G_m = B(y_m,\rho_m)$, $m = 1,\dots,m_0$, где $y_m = p_m\delta_{1/2}\big(p_m^{-1}p_{m-1}\big)$, $\rho_m = \frac{r_m}{3}$. Заметим, что

$$\rho(y_m,p_m) = \rho\big(p_m\delta_{1/2}\big(p_m^{-1}p_{m-1}\big),p_m\big) = \frac{1}{2}\rho(p_m,p_{m-1}) \le \frac{r_{m-1}}{6},$$

$$\rho(y_m,p_{m-1}) = \rho\big(\delta_{1/2}\big(p_m^{-1}p_{m-1}\big),p_m^{-1}p_{m-1}\big) \le \frac{\sqrt{3}}{2}\rho(p_m,p_{m-1}) \le \frac{\sqrt{3}r_{m-1}}{6}$$

для всех $m = 1, \dots, m_0$. Отсюда легко вывести п. 2 леммы 7. Пусть $y \in G_m$. Тогда

$$\rho(y,p_m) \le \rho(y,y_m) + \rho(y_m,p_m) < \rho_m + \frac{r_{m-1}}{6} = \frac{r_m}{3} + \frac{r_m}{6\sigma} < \frac{2}{3}r_m,$$

$$\rho(y,p_{m-1}) \le \rho(y,y_m) + \rho(y_m,p_{m-1}) < \rho_m + \frac{\sqrt{3}r_{m-1}}{6} = \frac{\sigma r_{m-1}}{3} + \frac{\sqrt{3}r_{m-1}}{6} < \frac{2}{3}r_{m-1}.$$

В частности, $G_{m_0} \subset \frac{2}{3}B_{m_0} \subset \frac{2}{3}B$.

Осталось найти число h из п. 3 леммы 7. Возьмем $x \in B$, тогда

$$\begin{aligned}\rho(x,y_m) \le \rho(x,p) + \rho(p,p_m) + \rho(p_m,y_m) &< r + \sigma^m l + \frac{r_{m-1}}{6} \\ &< \frac{2+3\varkappa}{2\varkappa}\beta\sigma^m + \sigma^m\beta + \frac{\rho_m}{2\sigma} < h\rho_m\end{aligned}$$

для всех $m = 1, \dots, m_0 - 1$ и

$$\rho(x,y_{m_0}) \le \rho(x,p) + \rho(p,y_{m_0}) < \frac{5}{3}r < \frac{5(2+3\varkappa)}{6\varkappa}\beta\sigma^{m_0-1} = \beta\frac{5+7.5\varkappa}{\alpha\sigma}\rho_{m_0} < h\rho_{m_0},$$

где $h = (9\varkappa + 6)\frac{\beta}{\alpha}$.

Переобозначим $B_{m_0} = B = B(p,r) = B(p_{m_0}, r_{m_0})$. Построенная цепь $B_0, B_1, \dots, B_{m_0}$ удовлетворяет всем условиям леммы. $\square$

Доказательство теоремы 1. (i) Пусть $f : U \to \mathbb{H}^n$ — отображение с ограниченным искажением, $K(f) - 1 < \varepsilon_0$ и U — область Джона $J(\alpha,\beta)$.

Рассмотрим шар $B_0 = B(p_0, \frac{\alpha}{\varkappa})$, $\varkappa = 9$. Поскольку $9B_0 \subset U$, по теореме 1 работы [2] существует $\varphi_0 \in M_n$, $\varphi_0 \ne \infty$ на $4.5B_0$, такое, что

$$\big\|D_h(\varphi_0^{-1} \circ f) - I\big\|_{q,B_0} < \upsilon r_0^{q/\nu}, \quad \rho\big(\varphi_0^{-1} \circ f(x), x\big) < \omega r_0 \quad \text{для всех } x \in B_0,$$

где $\upsilon = C_1(K(f) - 1)$, $\omega = C_2\sqrt{K(f)-1}$, $q \in \big[\nu, \frac{C_0(1-\delta)}{K(f)-1}\big)$. Оценим близость f к φ_0 на всей области U, а не только в шаре B_0.

(ii) Рассмотрим произвольный шар $B = B(p,r) \subset U$ такой, что $9B \subset U$. По лемме 7 существуют число $m_0 > 1$ и цепь $B_0, B_1, \dots, B_{m_0} = B$ такие, что выполнены условия 1–3 леммы. По теореме 1 работы [2] для каждого $m = 0, \dots, m_0$ существует $\varphi_m \in M_n$ такое, что

$$\big\|D_h(\varphi_m^{-1} \circ f) - I\big\|_{q,B_m} < \upsilon r_m^{q/\nu}, \qquad \rho\big(\varphi_m^{-1} \circ f(x), x\big) < \omega r_m$$

для всех $x \in B_m$. Положим $\varphi_m^{-1} \circ f = g_m$, $m = 0, \dots, m_0$, и $\psi_m = \varphi_{m-1}^{-1} \circ \varphi_m$, $m = 1, \dots, m_0$. Тогда $\psi_m \circ g_m = g_{m-1}$, $m = 1, \dots, m_0$.

(iii) Покажем, что при достаточно малых ω

$$\rho(\psi_m(z), z) < C_3\omega\rho_m \quad \text{для почти всех } z \in G_m, \quad m = 0, \dots, m_0.$$

Действительно, рассмотрим точку $z \in G_m$, $m = 1, \dots, m_0$. Пусть $y \in \partial V$, где

$$V = B(p_{m-1}, r_{m-1}) \cap B(p_m, r_m) \supset B(p_{m-1}, 2r_{m-1}/3) \cap B(p_m, 2r_m/3) \supset G_m.$$

Тогда $\rho(g_m(y), y) < \omega r_m$ и $\rho(g_{m-1}(y), y) < \omega r_{m-1}$. Очевидно, что y принадлежит одной из сфер $S(p_{m-1}, r_{m-1})$ или $S(p_m, r_m)$. Если $y \in S(p_{m-1}, r_{m-1})$, то $\rho(z,y) > r_{m-1} - \frac{2}{3}r_{m-1} = \frac{1}{3}r_{m-1}$. Если $y \in S(p_m, r_m)$, то $\rho(z,y) > r_m - \frac{2}{3}r_m = \frac{1}{3}r_m$.

Пусть $\omega < \frac{1}{3}$. Тогда $\rho(g_m(y), y) < \frac{1}{3} r_m \le \max\{r_m, r_{m-1}\} < \rho(z, y)$. Поэтому в силу [11, лемма 3.3] существует точка $z' \in V$ такая, что $g_m(z') = z$. Имеем

$$\begin{aligned}\rho(\psi_m(z), z) \le \rho(\psi_m(z), z') + \rho(z', z) = \rho(\psi_m(g_m(z')), z') + \rho(g_m(z'), z')\\ = \rho(g_{m-1}(z'), z') + \rho(g_m(z'), z') < \omega(r_{m-1} + r_m) = C_3\omega\rho_m,\end{aligned}$$

где $C_3 = 3\big(\frac{1}{\sigma} + 1\big)$. В силу лемм 4 и 5 из доказанного неравенства вытекает, что

$$\rho(\psi_m(x), x) \le L(\Delta) C_3 \omega \rho_m \quad \text{и} \quad |D_h\psi_m(x) - I| \le (NL(\Delta)C_3\omega)^2$$

для всех $x \in \Delta G_m$ при условии, что $C_3\omega < 1/169$, $\Delta < \frac{1}{5C_3\omega}$ и $L(\Delta)\frac{C_3\omega}{\Delta} < 1/169$.

(iv) Покажем, что $g_m(x) \in 2hG_m$ для всех $x \in B$ и $m = 1, \dots, m_0$. Оценим по индукции $\rho(g_k(x), x)$ для $k \le m_0$. Предположим, что $\rho(g_k(x), x) \le A_k\rho_k$ для всех $x \in B$, $k \le m_0$, причем $A_k < h$. Отсюда немедленно следует, что $g_k(x) \in 2hG_k$, так как $B \subset hG_k$.

Проверим, что это предположение выполняется для $k = m_0$. Рассмотрим $x \in B \subset hG_{m_0}$, тогда

$$\rho(g_{m_0}(x), x) < \omega r < \omega\frac{(3\varkappa + 2)\beta}{2\varkappa}\sigma^{m_0 - 1} = \omega\frac{3(3\varkappa + 2)\beta}{2\alpha\sigma}\rho_{m_0} = A_{m_0}\rho_{m_0}.$$

Следовательно, $A_{m_0} < h$ при достаточно малых ω и $g_{m_0}(x) \in 2hG_{m_0}$ для всех $x \in B$.

Достаточно показать, что из верности нашего предположения при k следует его верность и при $k-1$. Имеем

$$\begin{aligned}\rho(g_{k-1}(x), x) = \rho(\psi_k(g_k(x)), x) \le \rho(\psi_k(g_k(x)), g_k(x)) + \rho(g_k(x), x)\\ \le L(2h)C_3\omega\rho_k + A_k\rho_k = (L(2h)C_3\omega + A_k)\sigma\rho_{k-1} = A_{k-1}\rho_{k-1}.\end{aligned}$$

Отсюда $g_{k-1}(x) \in 2hG_{k-1}$, если $A_{k-1} = \sigma(L(2h)C_3\omega + A_k) < h$. Последнее выполнено при $\omega < C\frac{\alpha}{\beta}$, так как $A_k < h$.

В частности, $\rho(g_0(p), p) \le A_0\rho_0$, где $\rho_0 = \frac{\alpha}{\varkappa}$, а

$$A_0 = (L(2h)C_3\omega + A_1)\sigma = L(2h)C_3\omega(\sigma + \sigma^2 + \dots + \sigma^{m_0}) + A_{m_0}\sigma^{m_0} \le C\omega\beta^2/\alpha^2.$$

Таким образом,

$$\rho(g_0(p), p) \le C\frac{\beta^2}{\alpha}\sqrt{K(f) - 1} \quad \text{для всех } p \in U, \quad \text{если } K(f) - 1 < C\alpha^2/\beta^2.$$

(v) Оценим норму Соболева. Рассмотрим $m = 1, \dots, m_0$, $x \in B$. Имеем $g_m(x) \in 2hG_m$, поэтому $|D_h\psi_m(g_m(x)) - I| < D\omega^2$, где $D = (NL(2h)C_3)^2$. Отсюда

$$\begin{aligned}|D_hg_{m-1}(x) - I| = |D_h\psi_m(g_m(x))D_hg_m(x) - I| \le |D_h\psi_m(g_m(x))|\,|D_hg_m(x) - I|\\ + |D_h\psi_m(g_m(x)) - I| < (1 + D\omega^2)|D_hg_m(x) - I| + D\omega^2\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}|D_hg_0(x) - I| \le (1 + D\omega^2)^{m_0}|D_hg_{m_0}(x) - I| + D\omega^2(1 + (1 + D\omega^2) + \dots + (1 + D\omega^2)^{m_0 - 1})\\ \le (1 + D\omega^2)^{m_0}|D_hg_{m_0}(x) - I| + m_0D\omega^2(1 + D\omega^2)^{m_0 - 1}.\end{aligned}$$

Напомним, что $m_0 < 1 + \frac{3\varkappa\beta}{\alpha}\ln\frac{c\beta}{r}$, $c = \frac{3\varkappa + 2}{2\varkappa}$, и $1 + a < e^a$ для всех $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$$(1 + D\omega^2)^{m_0 - 1} < \exp\left\{D\omega^2\frac{3\varkappa\beta}{\alpha}\ln\frac{c\beta}{r}\right\} = \left(\frac{c\beta}{r}\right)^{\frac{3\varkappa\beta D}{\alpha}\omega^2}$$

и

$$\|D_h g_0 - I\|_{q,B} \le 2\left(\frac{c\beta}{r}\right)^{\frac{3\varkappa\beta D}{\alpha}\omega^2} \upsilon r^{\frac{\nu}{q}} + \left(1 + \frac{3\varkappa\beta}{\alpha}\ln\frac{c\beta}{r}\right) r^{\frac{\nu}{q}} \left(\frac{c\beta}{r}\right)^{\frac{3\varkappa\beta D}{\alpha}\omega^2} D\omega^2$$

$$\le 2\upsilon r^{\frac{\nu}{q}} \left(\frac{c\beta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{2q}} + CD\omega^2 r^{\frac{\nu}{q}} \frac{\beta}{\alpha}\ln\frac{c\beta}{r}\left(\frac{c\beta}{r}\right)^{\frac{\gamma}{2q}} \le C\upsilon\frac{\beta}{\gamma\alpha}\beta^{\frac{\gamma}{q}} r^{\frac{\nu-\gamma}{q}},$$

если $D\omega^2 < 1$ и $\frac{3\varkappa\beta D}{\alpha}\omega^2 < \frac{\gamma}{2q}$ (число γ из предложения 4). Здесь мы воспользовались тем, что $\omega^2 \le C\upsilon$.

(VI) Как и в доказательстве предложения 4, рассмотрим покрытие области U шарами B_i: $U \subset \bigcup\limits_i B_i$, $r(B_i) = \frac{\operatorname{dist}(x(B_i), \partial U)}{\varkappa}$, $\frac{1}{5}B_j \cap \frac{1}{5}B_i = \varnothing$ для всех $i \ne j$. Тогда по п. (V)

$$\|D_h g_0 - I\|_{q,B_i} \le C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1+\nu} \beta^{\frac{\gamma}{q}} \upsilon r_i^{\frac{\nu-\gamma}{q}}.$$

По предложению 4

$$\sum_i r_i^{\nu-\gamma} \le C\sum_i \int\limits_{\frac{1}{5}B_i} \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} \le C\int\limits_U \frac{dx}{\operatorname{dist}(x,\partial U)^\gamma} \le C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2\nu}\frac{|U|}{\alpha^\gamma}.$$

Отсюда

$$\int\limits_U |D_h g_0(x) - I|^q dx \le \sum_i \int\limits_{B_i} |D_h g_0(x) - I|^q dx$$

$$\le C\upsilon^q\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{(1+\nu)q} \beta^\gamma \sum_i r_i^{\nu-\gamma} \le C\upsilon^q \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{q+2\nu+\nu q} |U|,$$

так как $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\gamma \le \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{C(\frac{\alpha}{\beta})^\nu} \le C$. Оценим q. Имеем $q < \frac{C_0(1-\delta)}{K(f)-1}$ и $D\omega^2\frac{3\varkappa\beta}{\alpha} < \frac{\gamma}{2q} < \frac{C}{2q}(\frac{\alpha}{\beta})^\nu$, где $D = C\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$. Поэтому мы можем рассматривать q такие, что $(K(f)-1)q < C(\frac{\alpha}{\beta})^{\nu+3}$. $\square$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. Отличие состоит в том, что неизвестен явный вид величин υ и ω в зависимости от $K(f)-1$. В силу теоремы 2 работы [1] известно только, что $\upsilon = C_1\lambda(K(f)-1)$ и $\omega = C_2\sqrt{\lambda(K(f)-1)}$, где λ — неубывающая неотрицательная функция, $\lambda(t) \to 0$ при $t \to 0$. $\square$

§ 5. Примеры

Пример 1. Первый пример показывает, что порядок близости отображения с ограниченным искажением к мёбиусову в равномерной норме не может быть улучшен. Рассмотрим отображение f_c из § 5 работы [2]:

$$f_c(z,t) = (z + ic\operatorname{Re} z_1 e_1, t), \quad e_1 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{C}^n, \quad c \in (0,1).$$

Нетрудно проверить, что f_c принадлежит $W_p^1(B(0,1), \mathbb{H}^n)$ для всех $p \in [1,\infty)$ и является отображением с ограниченным искажением с коэффициентом искажения $K_c = K(f_c) = 1 + c + c^2/2$. При этом f_c близко к тождественному отображению:

$$|D_h f_c(x) - I| = c \le K_c - 1 \quad \text{и} \quad |\operatorname{Re} z_1|\sqrt{K_c - 1} \le \rho(f_c(x), x) \le \sqrt{2}\sqrt{K_c - 1}$$

для всех $x \in B(0,1)$.

Покажем, что не найдется такого $\varphi_c \in M_n$, чтобы выполнялось

$$\sup_{x\in B} \rho(\varphi_c \circ f_c(x), x) = o(\sqrt{K_c - 1}). \tag{3}$$

Проведем доказательство от противного. Пусть такое φ_c существует. Тогда $\rho(\varphi_c(x), x) = O(\sqrt{K_c - 1})$ для всех $x \in B(0,1)$. По леммам 2 и 3 $\varphi_c = \pi_{\mathbf{c}} \circ \varphi_A \circ \delta_\tau \circ j \circ \pi_{\mathbf{b}} \circ j$, где $\tau > 0$, $A = (a_{ij})_{ij=1}^n \in U(n)$, $\mathbf{c} = (a,\gamma) \in \mathbb{H}^n$, $\mathbf{b} = (b,\beta) \in \mathbb{H}^n$, причем $|1-\tau^2|$, $|A - I|$, $|a|$, $|\gamma|$, $|b|$ и $|\beta|$ равны $O(K_c - 1)$.

Поскольку $f_c(0) = 0$, то $\rho(\varphi_c(f_c(0)), 0) = |\mathbf{c}| = o(\sqrt{K_c - 1})$ и $|\gamma| = o(K_c - 1)$. Подставляя в (3) точки $x = (0,1)$ и $x = (0,-1)$, оценим $|\beta|$ и $|\tau^2 - 1|$ как $o(K_c - 1)$.

Рассмотрим $x = (z, 0)$. Из (3) и оценок для β, γ и τ вытекает следующее соотношение:

$$\operatorname{Im}\langle z, 2a + Az + 2b|z|^2 + ic \operatorname{Re} z_1 e_1\rangle = o(K_c - 1).$$

Отсюда для $z = ie_1$ и $z = -ie_1$ выводим $\operatorname{Im} a_{11} = o(K_c - 1)$ и $\operatorname{Re}(a_1 + b_1) = o(K_c - 1)$. Наконец, для $z = e_1$ и $z = -e_1$ получаем

$$-2\operatorname{Im}(a_1 + b_1) - \operatorname{Im} a_{11} - c = o(K_c - 1) \quad \text{и} \quad 2\operatorname{Im}(a_1 + b_1) - \operatorname{Im} a_{11} - c = o(K_c - 1)$$

и, следовательно, $c = o(K_c - 1)$. Противоречие, так как $c = O(K_c - 1)$.

Пример 2. Второй пример показывает, что показатель степени суммируемости частных производных отображения с ограниченным искажением является асимптотически точным. Пусть

$$f(z,t) = \left(z\,t^{-\alpha}, \frac{t^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right) : U \to \mathbb{H}^n, \quad \alpha \in (0, 1/2),$$

где U — область Джона такая, что $U \cap \{(z,t) \mid t \in (0,1/2)\} = \{(z,t) \mid 0 < |z|^2 < t < 1/2\}$ и $U \subset \{(z,t) \mid 0 < |z|^2 < t < 1\}$. Легко проверить, что

$$Zf(z,t) = t^{-\alpha} I - i\alpha t^{-\alpha-1} z \cdot \overline{z}^t, \qquad \overline{Z}f(z,t) = i\alpha t^{-\alpha-1} z \cdot z^t.$$

Имеем

$$i\langle Z_k(z\,t^{-\alpha}), z\,t^{-\alpha}\rangle - i\langle z\,t^{-\alpha}, \overline{Z}_k(z\,t^{-\alpha})\rangle = it^{-2\alpha}\overline{z}_k + \alpha t^{-2\alpha-1}|z|^2\overline{z}_k$$
$$- \alpha t^{-2\alpha-1}|z|^2\overline{z}_k = it^{-2\alpha}\overline{z}_k = Z_k \frac{t^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \qquad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, f — (слабо) контактное отображение в силу условия контактности (см., например, [2]).

Таким образом,

1) $f : U \to f(U)$ — гомеоморфизм;
2) $D_h f \in L_p(U)$ для всех $1 \le p < \frac{\nu}{2\alpha}$, $D_h f \notin L_p(U)$ для всех $p \ge \frac{\nu}{2\alpha}$;
3) f — (слабо) контактное отображение.

Следовательно, $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(U)$ для всех $p < \frac{\nu}{2\alpha}$. Поскольку $\alpha < 1/2$, то f принадлежит $W^1_p(U)$ для некоторого $p > \nu$. Отсюда немедленно следует [20], что f $\mathscr{P}$-дифференцируемо почти всюду в U. По следствию предложения 12 из [8, с. 49] отображение f будет квазиконформным с коэффициентом искажения

$$K = \frac{1 + \|A\|_{C(U)}}{1 - \|A\|_{C(U)}},$$

где матрица $A = (Zf)^{-1}\overline{Z}f = \frac{i\alpha z\cdot z^t}{t - i\alpha|z|^2}$ — комплексное колебание из системы Бельтрами (см. [8]). Нетрудно проверить, что $\|z \cdot z^t\| = |z|^2$. Тем самым получаем, что $\|A\|_{C(U)} = \sup\limits_{(z,t)\in U} \frac{\alpha|z|^2}{|t - i\alpha|z|^2|} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$. Окончательно выводим $K = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}+\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}-\alpha}$ и $\alpha = \frac{K-1}{2\sqrt{K}}$. Следовательно, $f \in W^1_p(U)$ только для $1 \le p < \frac{\nu\sqrt{K}}{K-1}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исангулова Д. В.* Класс отображений с ограниченным удельным колебанием и интегрируемость отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 313–334.
2. *Исангулова Д. В.* Локальная устойчивость отображений с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1228–1245.
3. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
4. *Решетняк Ю. Г.* Интегральные представления дифференцируемых функций в областях с негладкой границей // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 6. С. 108–116.
5. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
6. *Haj_lasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré: Memoirs of the AMS 688. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.
7. *Korányi A., Reimann H. M.* Quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Invent. Math. 1985. V. 80. P. 309–338.
8. *Korányi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111, N 1. P. 1–87.
9. *Capogna L.* Regularity of quasi-linear equations in the Heisenberg group // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50, N 9. P. 867–889.
10. *Даирбеков Н. С.* Отображения с ограниченным искажением на группах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 567–590.
11. *Даирбеков Н. С.* Устойчивость отображений с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 2. С. 282–295.
12. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
13. *Водопьянов С. К.* Основания теории отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 1. С. 7–12.
14. *Исангулова Д. В.* Устойчивость в теореме Лиувилля на группах Гейзенберга // Докл. РАН. 2005. Т. 405, № 4. С. 448–453.
15. *Исангулова Д. В.* Устойчивость в теореме Лиувилля на группах Гейзенберга. Новосибирск, 2005. 84 с. (Препринт/РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 158).
16. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением групп Карно // Мат. труды. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
17. *Водопьянов С. К.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии / Водопьянов С. К. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
18. *Троценко Д. А.* Свойства областей с негладкой границей // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 4. С. 221–224.
19. *Buckley S., Koskela P., Lu G.* Boman equals John // Proc. XVI Rolf Nevanlinna colloq. 1996. P. 91–99.
20. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.

Статья поступила 11 октября 2005 г.

Исангулова Дарья Васильевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
dasha@math.nsc.ru