Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.64

О ПОДПРОСТРАНСТВЕ $L((x \wedge y)^m)$ В $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$

В. Ю. Губарев

Аннотация. Пусть $\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4$ — внешнее произведение пространства $\mathbb{R}^4$, пространство $V = S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4) = (\mathbb{R}^4\wedge\mathbb{R}^4)\vee(\mathbb{R}^4\wedge\mathbb{R}^4)\vee\dots\vee(\mathbb{R}^4\wedge\mathbb{R}^4)$ — его m-я симметрическая степень, $V_0 = L((x \wedge y) \vee \dots \vee (x \wedge y) : x, y \in \mathbb{R}^4)$. Найдены размерность V_0 и алгоритм эффективного построения базиса V_0 (данная задача возникла в векторной томографии [1] при восстановлении соленоидальной части симметричного тензорного поля).

Ключевые слова: симметрическая степень пространства, внешняя степень пространства.

1. Инвариантные и неинвариантные векторы

Пусть $\{e_i,\, i = 1,\dots,4\}$ — базис $\mathbb{R}^4$. Ясно, что $\dim \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4 = 6$, а набор векторов $\{(e_1\wedge e_2),(e_1\wedge e_3),(e_1\wedge e_4),(e_2\wedge e_3),(e_2\wedge e_4),(e_3\wedge e_4)\}$ будет базисом пространства $\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4$. Сразу же условимся обозначать данные базисные векторы $\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4$ соответственно через $(12),\dots,(34)$. Базис $\{(e_1 \wedge e_2)\vee\dots\vee(e_1\wedge e_2),(e_1\wedge e_2)\vee\dots\vee(e_1\wedge e_2)\vee(e_1\wedge e_3),\dots,(e_3\wedge e_4)\vee\dots\vee(e_3\wedge e_4)\}$ в $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ назовем *стандартным.* Записывать вектор из стандартного базиса $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ будем следующим образом: $(e_i\wedge e_j)\vee\dots\vee(e_k\wedge e_l) = (ij,\dots,kl)$, а каждую из m компонент вектора будем называть *парой.*

Как известно [2],

$$\dim V = C^5_{m+5}. \tag{1}$$

Определим на базисных векторах $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ *стандартную* форму записи $(k_1l_1, k_2l_2,\dots,k_ml_m)$ такую, что $k_i < l_i$, $k_i \le k_{i+1}$ для любого i и если $k_i = k_{i+1}$, то $l_i \le l_{i+1}$. *Степенной* формой записи вектора v назовем запись $(12)^{i_1}\vee(13)^{i_2}\vee(14)^{i_3}\vee(23)^{i_4}\vee(24)^{i_5}\vee(34)^{i_6}$, если вектор v содержит в своей записи пару (12) i_1 раз и каждую другую пару соответственное число раз $(i_1+\dots+i_6 = m)$.

Рассмотрим вектор $v = (i_1j_1,\dots,i_mj_m)$ стандартного базиса $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$. Сопоставим цифрам $i_1, j_1,\dots,i_m, j_m$ числа $1,\dots,2m$ следующим образом:

$$i_k \to 2k-1, \quad j_k \to 2k, \quad k = 1,\dots,m.$$

Отображение $\tau\colon \{1,\dots,2m\} \to \{1,2,3,4\}$ совершает обратное сопоставление.

Определим действие подстановки $\varphi \in S_{2m}$ на векторы стандартного базиса V следующим образом:

$$\varphi(v) = \varphi((i_1j_1,\dots,i_mj_m)) = (\tau(\varphi(1))\tau(\varphi(2)),\dots,\tau(\varphi(2m-1))\tau(\varphi(2m))).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–344.2008.1).

Вектор v стандартного базиса назовем *неинвариантным*, если существует подстановка $\varphi \in S_{2m}$ такая, что вектор $\varphi(v)$ принадлежит стандартному базису и отличен от v. В обратном случае вектор стандартного базиса назовем *инвариантным*.

Примеры. 1. Вектор $(12,12)$ инвариантен, так как под действием подстановок $\varphi \in S_{2m}$ мы получим или нулевой вектор, или $\pm v$, что не удовлетворяет условию неинвариантности.

2. Вектор $(12,34)$ неинвариантен, так как под действием подстановки $\varphi = (23)$ мы получим вектор $(13,24)$ (в этом примере τ будет тождественным).

Лемма 1 (о классификации инвариантных векторов). *Вектор $v = (i_1j_1,\dots,i_mj_m) \in S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ инвариантен тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из двух условий:*

1) *в записи v нет хотя бы одной цифры из $\{1,2,3,4\}$;*

2) *в каждой из m пар есть одна и та же повторяющаяся цифра.*

Доказательство. Достаточность. Пусть вектор v представим в первом виде. Предположим, что существует подстановка $\varphi \in S_n$ такая, что вектор $(\tau(\varphi(1))\tau(\varphi(2)),\dots,\tau(\varphi(2m-1))\tau(\varphi(2m)))$ принадлежит стандартному базису и отличен от v. Действие любой подстановки φ можно представить как композицию действий транспозиций. Действие транспозиции ϕ можно трактовать как перестановку двух цифр $2m$-набора $(i_1j_1\dots i_mj_m)$ и составление из полученного набора вектора $u = (\phi(i_1)\phi(j_1),\dots,\phi(i_m)\phi(j_m))$.

Но имея в первом случае только пары вида $(ij),(ik),(jk)$, нельзя переставить две цифры, не получив пару (ll) или вектор $\pm v$.

Если вектор v представим во втором виде, то также под действием транспозиций получим или $\pm v$, или 0. Значит, и при композиции действий транспозиций будет инвариантность v.

Необходимость. Предположим противное: существует хотя бы один инвариантный вектор v, не отвечающий обоим условиям леммы. Тогда в записи v участвуют все цифры $1,2,3,4$ и нет цифры, содержащейся в каждой паре вектора.

Без ограничения общности можно считать, что пара (12) входит в запись вектора v. Теперь рассмотрим пару, содержащую 4. Если существует пара (34) в записи v, то под действием транспозиции, меняющей указанные цифры 2 и 3, получим вектор, совпадающий в $m-2$ парах с вектором v, но отличающийся парами $(13,24)$, что противоречит выбору v. Тогда 3 входит в пары вектора v только с 1 или 2. Если есть пара (13), то при наличии пары (24) вновь получим неинвариантность вектора v. Чтобы этого не было, необходимо, чтобы 4 входила только в пары (14). Если 3 входит в пары (23), то под действием транспозиции, меняющей цифры 2 и 4 в парах $(14),(23)$, также получим неинвариантность v. В итоге имеем, что в v входят только пары $(12),(13),(14)$, т. е. v инвариантен, и мы пришли к противоречию.

Если в записи v есть пара (23), то, рассуждая аналогичным образом, придем к тому, что во всех парах есть цифра 2, а это опять противоречит выбору v.

Замечание 1. В лемме было фактически доказано, что любой неинвариантный вектор хотя бы единожды содержит в своей записи пары $(ij),(kl)$ для попарно различных i,j,k,l. Назовем все три пары таких векторов $(12),(34)$, $(13),(24)$ и $(14),(23)$ *ортогональными*.

Введем понятие *цепочки* неинвариантного вектора v как множества, состоящего из него самого и всех векторов, получаемых из v действием подстановок, удовлетворяющих определению неинвариантности этого вектора. Легко заметить, что в цепочке каждого неинвариантного вектора содержится не менее трех векторов. Действительно, находя в векторе v одну ортогональную пару, можно получить из нее действием транспозиций и две другие. К примеру, цепочка неинвариантного вектора $(12, 12, 34)$ — это множество $\{(12, 12, 34), (12, 13, 24), (12, 14, 23)\}$.

Теорема 1 (о векторах стандартного базиса). *Все инвариантные базисные векторы $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ входят в V_0, а все неинвариантные векторы не входят в V_0.*

Доказательство. Пусть вектор v инвариантен. По предыдущей лемме он удовлетворяет хотя бы одному из условий леммы, т. е. либо у него нет в записи одной цифры, либо есть цифра, содержащаяся в каждой его паре. Рассмотрим второй случай. Пусть для определенности вектор v содержит в каждой паре 1, т. е. $v = (12)^i \vee (13)^j \vee (14)^k$.

Рассмотрим $(e_1 \wedge (e_2 + \alpha e_3 + \beta e_4))^m = (e_1 \wedge e_2 + \alpha e_1 \wedge e_3 + \beta e_1 \wedge e_4)^m$. Обозначим через $\tilde{e}$ выражение $(e_1 \wedge e_2 + \alpha e_1 \wedge e_3)$. Тогда, раскрывая скобки, получим

$$(e_1 \wedge e_2 + \alpha e_1 \wedge e_3 + \beta e_1 \wedge e_4)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i \beta^i (e_1 \wedge e_4)^i \vee (\tilde{e})^{m-i} \in V_0.$$

Отбросим случай $i = 0$, так как соответствующий вектор лежит в V_0. Выбирая поочередно $\beta = 1, \ldots, m$ при фиксированном α, будем иметь

$$\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{m} C_m^i \cdot 1^i \cdot (e_1 \wedge e_4)^i \vee (\tilde{e})^{m-i} = a_1 \in V_0,\\
\sum_{i=1}^{m} C_m^i \cdot 2^i \cdot (e_1 \wedge e_4)^i \vee (\tilde{e})^{m-i} = a_2 \in V_0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sum_{i=1}^{m} C_m^i \cdot m^i \cdot (e_1 \wedge e_4)^i \vee (\tilde{e})^{m-i} = a_m \in V_0.
\end{gathered}$$

Принимая $(e_1 \wedge e_4)^i \vee (\tilde{e})^{m-i}$ за неизвестные, придем к линейной системе из m уравнений с m неизвестными. При подсчете определителя этой системы из каждого столбца следует вынести C_m^i, и тогда получим определитель Вандермонда, который отличен от нуля. Значит, мы можем линейно выразить все $(e_1 \wedge e_4)^i \vee (\tilde{e})^{m-i}$ через векторы пространства V_0, тем самым они сами лежат в этом пространстве. Таким образом, для любого α имеем $(e_1 \wedge e_4)^i \vee (e_1 \wedge e_2 + \alpha e_1 \wedge e_3)^{m-i} \in V_0$.

Зафиксируем i и раскроем $(e_1 \wedge e_2 + \alpha e_1 \wedge e_3)^{m-i}$ последовательно при $\alpha = 1, \ldots, m-i$. Получим аналогичную систему с неизвестными $(e_1 \wedge e_4)^i \vee (e_1 \wedge e_2)^t \vee (e_1 \wedge e_3)^{m-i-t}$ и ненулевым определителем. Решая ее, окончательно получим, что $(e_1 \wedge e_4)^i \vee (e_1 \wedge e_2)^t \vee (e_1 \wedge e_3)^{m-i-t} \in V_0$ для любых i, t. Ясно, что доказанное без изменений переносится на общий случай векторов, которые содержат в своей записи не все цифры.

Если вектор v удовлетворяет первому условию леммы, то форма его записи по степеням выглядит как $(ij)^r \vee (ik)^s \vee (jk)^t$. Но этот случай легко сводится к только что доказанному при рассмотрении:

$$((e_i + \alpha e_j) \wedge (e_j + \beta e_k))^m = (e_i \wedge e_j + \beta e_i \wedge e_k + \alpha\beta e_j \wedge e_k)^m.$$

Фиксируя β и заменяя $(e_i\wedge e_j+\beta e_i\wedge e_k)$ через $\tilde{e}$, после решения соответствующей системы получаем $(e_i\wedge e_j+\beta e_i\wedge e_k)^i\vee(e_j\wedge e_k)^{m-i}\in V_0$ для любых i. Поступая аналогично с β, окончательно докажем требуемое.

Пусть вектор v неинвариантен. Тогда по замечанию к лемме 1 в записи этого вектора есть хотя бы одна ортогональная пара. Пусть для определенности это будет пара $(12),(34)$, из дальнейшего будет ясна истинность утверждения для любой ортогональной пары. Представим вектор v в виде $(u_1,\dots,u_{m-2},12,34)$.

Предположим от противного, что $v\in V_0$. Тогда

$$v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x^i\wedge y^i)^m=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\left(\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^ie_j\right)\wedge\left(\sum_{j=1}^{4}\beta_j^ie_j\right)\right)^m.$$

Раскроем скобки и обозначим через ω_i коэффициент, соответствующий паре u_i (в случае $m=2$ положим $\omega_i=1$ для всех i). Тогда

$$v=\sum_{i=1}^{n}C\lambda_i(\omega_1\dots\omega_{m-2})\big(\alpha_1^i\beta_2^i-\alpha_2^i\beta_1^i\big)\big(\alpha_3^i\beta_4^i-\alpha_4^i\beta_3^i\big)(u_1,\dots,u_{m-2},12,34),$$

где $C\in\mathbb{N}$. Обозначим через μ_i произведение $C\lambda_i(\omega_1\dots\omega_{m-2})$, а через u_{ijk} — вектор $(u_1,\dots,u_{m-2},1i,jk)$. Собирая слагаемые по каждому базисному вектору, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\big(\big(\alpha_1^i\alpha_3^i\beta_2^i\beta_4^i+\alpha_2^i\alpha_4^i\beta_1^i\beta_3^i\big)-\big(\alpha_1^i\alpha_4^i\beta_2^i\beta_3^i+\alpha_2^i\alpha_3^i\beta_1^i\beta_4^i\big)\big)=1\quad(\text{по } u_{234}),\tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\big(\big(\alpha_1^i\alpha_2^i\beta_3^i\beta_4^i+\alpha_3^i\alpha_4^i\beta_1^i\beta_2^i\big)-\big(\alpha_1^i\alpha_4^i\beta_2^i\beta_3^i+\alpha_2^i\alpha_3^i\beta_1^i\beta_4^i\big)\big)=0\quad(\text{по } u_{324}),\tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\big(\big(\alpha_1^i\alpha_2^i\beta_3^i\beta_4^i+\alpha_3^i\alpha_4^i\beta_1^i\beta_2^i\big)-\big(\alpha_1^i\alpha_3^i\beta_2^i\beta_4^i+\alpha_2^i\alpha_4^i\beta_1^i\beta_3^i\big)\big)=0\quad(\text{по } u_{423}).\tag{4}$$

Вычитая из второго уравнения третье, получим левую часть, равную левой части первого уравнения, а справа получим 0. Тем самым одно и то же выражение одновременно равняется и 0, и 1; противоречие. Значит, $v\notin V_0$.

Замечание 2. Утверждение теоремы верно для произвольного $n>1$ в $\mathbb{R}^n$ для пространства $V=S^m(\wedge^2\mathbb{R}^n)$.

Замечание 3. При $n=2$ и $n=3$ из определения получаем, что все векторы стандартного базиса V инвариантны. Значит, в этих случаях $V_0=V$, и при $n=2$ будет $\dim V_0=1$, а при $n=3$ имеем $\dim V_0=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

Найдем количество инвариантных векторов. Пусть n_1 — количество векторов, удовлетворяющих первому условию леммы 1, а n_2 — количество векторов, удовлетворяющих только второму из двух условий леммы 1. Если построить $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^3)$ на каждой тройке из четырех цифр $\{1,2,3,4\}$, то $n_1=4\frac{(m+1)(m+2)}{2}-6=2m^2+6m-2$ (так как мы дважды посчитали базисные векторы вида $(ij)^m$). А n_2 находим как решение уравнения $i_1+i_2+i_3=m$ в натуральных числах, значит, $n_2=4C_{m-1}^2=2m^2-6m+4$. Окончательно

$$I(m)=4m^2+2\tag{5}$$

есть количество инвариантных векторов V. Это может служить грубой оценкой размерности V_0, т. е. $\dim V_0\geq 4m^2+2$.

2. Верхняя оценка размерности V_0

Найдем $N(m)$ — количество цепочек неинвариантных векторов в пространстве $S^m(\wedge^2\mathbb{R}^4)$. Заметим, что каждая цепочка однозначно определяется количеством вхождений цифр в каждый из ее векторов, т. е. набором $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, где k_i обозначает количество вхождений цифры i. Поэтому в дальнейшем под цепочкой будем понимать и набор (k_i).

Количество различных наборов (k_i), где $k_i \in \mathbb{N}$, найдем из условий: (а) $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2m$, (б) $k_i < m$.

Условию (а) удовлетворяет $A = C^3_{2m-1} = \frac{(2m-1)(2m-3)(m-1)}{3}$ векторов. Количество векторов, удовлетворяющих условию (а), но не удовлетворяющих условию (б), есть сумма $B = 4\big(C^2_{m-1} + C^2_{m-2} + \dots + C^2_2\big)$ натуральных решений уравнений вида $k_i + k_j + k_l = m, \dots, 3$. Тогда имеем

$$B = 2\sum_{k=1}^{m-2}(m-k)(m-k-1) = 2\sum_{k=1}^{m-2}(m-k)^2 - 2\sum_{k=1}^{m-2}(m-k) = \frac{m(m-1)(2m-4)}{3}.$$

Вычитая B из A, находим количество наборов (k_i), удовлетворяющих обоим условиям, т. е. количество цепочек в пространстве V равняется

$$N(m) = \frac{2m^3}{3} - 2m^2 + \frac{7m}{3} - 1. \tag{6}$$

Найдем количество векторов в каждой цепочке. Введем для цепочки (k_i) числа

$$\tilde{k} = \min\{k_i\}, \quad \hat{k} = m - \max\{k_i\}, \quad k_0 = \min\{\tilde{k}, \hat{k}\}. \tag{7}$$

Рассмотрим вместе с начальной цепочкой $\sigma = (k_i)$ *симметрическую* цепочку $\delta = (k_0, k_0, k_0, k_0)$.

Лемма 2. *Между векторами цепочек $\sigma = (k_i)$ и $\delta = (k_0, k_0, k_0, k_0)$ существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть $t = \frac{1}{2}\sum k_i$. Если $t = 2k_0$, то утверждение очевидно. Поэтому будем считать, что $t > 2k_0$. Главная идея заключается в представлении произвольного вектора $v \in \sigma$ в виде $v = u_v \vee w$, где $u_v \in \delta$, а w — инвариантный вектор стандартного базиса $S^{t-2k_0}(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ (общая инвариантная часть цепочки σ).

(а) Сопоставим каждому вектору $u \in \delta$ однозначно вектор $v_u \in \sigma$.

Случай 1: $k_0 = \tilde{k}$, значит, $k_i \le m - k_0$. Без ограничения общности предположим, что $k_0 = k_1$. Тогда рассмотрим набор чисел $(0, k_2 - k_0, k_3 - k_0, k_4 - k_0) = (k'_1, k'_2, k'_3, k'_4)$ и построим вектор w стандартного базиса $S^{t-2k_0}(\wedge^2\mathbb{R}^4)$, количество вхождений цифры i в запись которого равняется k'_i. Это можно сделать, так как

$$k'_i = k_i - k_0 \le m - 2k_0 = \frac{1}{2}\sum k'_i,$$

и не возникнет пары вида (ll).

Случай 2: $k_0 = \hat{k}$. Без ограничения общности предположим, что $k_1 = m - k_0$. Тогда рассмотрим набор чисел $(k_1 - k_0, k_2 - k_0, k_3 - k_0, k_4 - k_0) = (k'_1, k'_2, k'_3, k'_4)$ и построим вектор w стандартного базиса $S^{t-2k_0}(\wedge^2\mathbb{R}^4)$, количество вхождений цифры i в запись которого равняется k'_i. Это можно сделать, так как

$$k'_i \le k'_1 = k_1 - k_0 = m - 2k_0 = \frac{1}{2}\sum k'_i,$$

и не возникнет пары вида (ll).

Однозначность построения следует из инвариантности вектора w, и мы однозначно находим вектор $v_u = u \vee w \in \sigma$.

(б) Обратно, сопоставим каждому вектору $v \in \sigma$ однозначно вектор $u_v \in \delta$, представляя вектор v в виде $v = u_v \vee w$. Единственность такого представления будет следовать из инвариантности вектора w.

Случай 1: $k_0 = \tilde{k}$, значит, $k_i \leq m - k_0$. Предположим, что $k_1 = \tilde{k}$. Рассмотрим пары, входящие в запись v и содержащие 1: $(12)^i$, $(13)^j$, $(14)^k$, где $i + j + k = k_0$. Покажем, что в запись v входят также пары $(34)^i$, $(24)^j$, $(23)^k$, из этого будет следовать существование искомого разложения вектора v. Предположим от противного, что число $o < i$ есть количество вхождений пары (34) в запись v. Тогда если $v = (12)^i \vee (13)^j \vee (14)^k \vee (23)^a \vee (24)^b \vee (34)^o$, то

$$k_2 = i + a + b > o + a + b = m - k_0,$$

что противоречиво. Аналогично доказывается и для остальных пар (13) и (14).

Случай 2: $k_0 = \hat{k}$. Без ограничения общности предположим, что $k_4 = m - k_0$. Пусть $w = (14)^{k_1 - k_0} \vee (24)^{k_1 - k_0} \vee (34)^{k_3 - k_0}$ — инвариантный вектор стандартного базиса $S^{t-2k_0}(\wedge^2\mathbb{R}^4)$ (так как $k_1 + k_2 + k_3 - 3k_0 = t - 2k_0$). Докажем, что $v = u_v \vee w$, где $u_v \in \delta$. Для этого достаточно показать, что все пары вектора w входят в v. Действительно, рассмотрим пары (14), входящие в запись вектора v. Так как $k_1 > k_0, k_4 = m - k_0$, то цифры 1 и 4 обязательно встретятся не менее, чем в $k_1 + k_4 - m = k_1 - k_0$ парах. Доказательство для оставшихся пар аналогичное.

Пусть $v = (1i_1, \dots, 1i_{k_0}, j_1 l_1, \dots, j_{k_0} l_{k_0})$ — вектор симметрической цепочки (k_0, k_0, k_0, k_0). Назовем вид $(1i_1, \dots, 1i_{k_0})$ *краткой* формой записи вектора v. Ясно, что вектор симметрической цепочки однозначно определяется своей краткой формой. Количество векторов такого вида равно

$$\dim S^m(\wedge^2\mathbb{R}^3) = \frac{(k_0+1)(k_0+2)}{2} = \frac{k_0^2}{2} + \frac{3k_0}{2} + 1.$$

Значит, в произвольной цепочке $\sigma = (k_i)$ количество векторов равняется

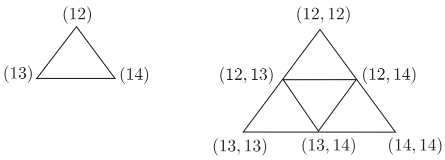
$$n(\sigma) = \frac{k_0^2}{2} + \frac{3k_0}{2} + 1, \tag{8}$$

где k_0 находится из (7).

Назовем два вектора одной цепочки *взаимно обратимыми*, если они отличаются ровно двумя (ортогональными) парами. Например, векторы одной цепочки $(12, 12, 34, 34)$ и $(12, 14, 23, 34)$ взаимно обратимы, так как отличаются парами $12, 34$ и $14, 23$. Ясно, что два вектора одной цепочки (k_i) взаимно обратимы тогда и только тогда, когда соответствующие им векторы цепочки (k_0, k_0, k_0, k_0) взаимно обратимы.

Пусть $O(v)$ — множество всех векторов, взаимно обратимых с v. Несложно проверить, что для любого неинвариантного вектора v множество $O(v)$ содержит или 2, или 4, или 6 векторов. Обозначим через $L(\sigma) = L(u_i : u_i \in \sigma)$ *линейную оболочку* цепочки σ.

Представим векторы цепочки $\sigma = (k_0, k_0, k_0, k_0)$ в виде связного графа, в котором вершинами будут служить векторы цепочки, а ребра будут соединять вершины, соответствующие взаимно обратимым векторам (два вектора одной цепочки будут взаимно обратимыми тогда и только тогда, когда их краткие формы отличаются ровно на одну пару). Например, для $k_0 = 1$ и $k_0 = 2$ это будут следующие графы:



Ясно, что для произвольной цепочки $\varsigma = (k_i)$, для которой k_0 находится по (7), ввиду существования взаимно однозначного соответствия между векторами цепочек σ и ς, сохраняющего отношение взаимной обратимости, можно построить аналогичный граф, в котором вершинами будут служить векторы цепочки, а ребра будут соединять вершины, соответствующие взаимно обратимым векторам.

Из построения графа будем всегда получать граф-треугольник с однотипным строением, обозначим его через $G(\sigma)$. Для цепочки (k_0, k_0, k_0, k_0) выделим $k_0 + 1$ «этажей» с номерами $0, \ldots, k_0$. На i-м этаже будут все векторы, содержащие в своей записи i раз пару (12), их число будет увеличиваться с каждым этажом от «верхней» вершины $(12)^{k_0}$ до нулевого этажа на единицу («вверху» будет 1 вектор, … , «внизу» будет $k_0 + 1$ векторов). На одном же этаже слева направо будет меняться количество пары (13) с $(k_0 - i)$ до нуля.

Назовем *тремя сторонами* (*графа*) множества векторов цепочки, не содержащие в своей записи соответственно пары $12, 13$ и 14, или соответствующие этим векторам вершины графа. Докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3. *Если $v \in V_0 \cap L(\sigma)$, то ненулевым компонентам v по векторам цепочки σ соответствует связный подграф, содержащий для каждой из сторон хотя бы одну из ее вершин.*

Доказательство. Рассмотрим случай $\sigma = (k_0, k_0, k_0, k_0)$, для общего случая доказательство аналогичное. Пусть подграф G' графа $G(\sigma)$ состоит из тех вершин, которым соответствуют векторы, по которым v имеет ненулевую компоненту. Без ограничения общности рассмотрим «нижнюю» сторону, т. е. векторы цепочки, не содержащие в своей записи (12). Пусть, от противного, подграф G' не содержит вершин, лежащих на нижней стороне, то найдем этаж с минимальным номером $k > 0$, вершину которого содержит G'. Пусть вершина $a \in G'$ лежит на k-м этаже.

Тогда выберем для вектора u_{234}, соответствующего вершине a и имеющего краткую форму $(12)^k \vee (13)^l \vee (14)^t$, векторы u_{324} и u_{423}, имеющие следующие краткие формы: $(12)^{k-1} \vee (13)^{l+1} \vee (14)^t$, $(12)^{k-1} \vee (13)^l \vee (14)^{t+1}$. Все эти три вектора попарно взаимно обратимы. Так как $v \in V_0$, имеем $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i \wedge y_i)^m$. Аналогично тому, что делали в ходе доказательства теоремы 1, раскроем в правой части скобки и соберем слагаемые по данным векторам. Получим противоречивые формулы (2)–(4). Аналогичное доказательство для двух оставшихся «левой» и «правой» сторон.

Если граф несвязный, то он имеет хотя бы две компоненты связности, подграфы G_1 и G_2. Как фактически доказано, каждый из них должен содержать для каждой из сторон хотя бы одну из ее вершин. Тем самым ввиду связности каждого из графов G_i получаем, что они пересекаются; противоречие с их выбором. Значит, граф G' связный.

Теорема 2 (о верхней оценке размерности V_0). *Пусть* $\sigma = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, *а* k_0 *найдено по формуле* (7). *Тогда*

$$\dim(V_0 \cap L(\sigma)) \leq k_0 + 1. \tag{9}$$

Доказательство. Сначала изучим случай цепочки $\delta = (k_0, k_0, k_0, k_0)$, для случая $\sigma = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ доказательство будет аналогичным. Рассмотрим пространство $U = L(u_i : u_i \in \delta, (12) \in u_i)$. Предположим, что $U \cap V_0 \neq 0$, тогда существует ненулевой вектор $v \in U \cap V_0$. Но если $v \in V_0$, то по предыдущей лемме он должен иметь ненулевую компоненту на нижней стороне, тем самым получаем противоречие с тем, что $v \in U$. Значит, $U \cap V_0 = 0$, и $\dim(V_0 \cap L(\delta)) \leq \dim L(\delta) - \dim U = k_0 + 1$.

3. Метод линеаризации

По определению $v = (x \wedge y)^m \in V_0$ для любых $x, y \in \mathbb{R}^4$. Совершим замену x на $x + \alpha t$. При подстановке вместо x этого выражения в вектор v получим

$$v = ((x + \alpha t) \wedge y)^m \equiv \sum_{i=1}^{m-1} C_m^i \alpha^i (x \wedge y)^{m-i} \vee (t \wedge y)^i \in V_0.$$

Пусть $(x + t) \wedge y \neq 0$, т. е. $(x + t) \neq \lambda y$, для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Ясно, что мы можем выбрать сколь угодно много коэффициентов α таких, что $(x + \alpha t) \wedge y \neq 0$. Тогда, выбирая последовательно $m - 2$ раз эти коэффициенты α различными, аналогично тому, как делали в теореме 1, выводим, что

$$(x \wedge y)^{m-i} \vee (t \wedge y)^i \in V_0 \quad \text{для } i = 1, \dots, m - 1.$$

Зафиксируем степень i и сделаем подобную замену x на $x + \gamma z$. Проделывая те же действия и рассуждения, что и выше, получим

$$(x \wedge y)^{m-i-j} \vee (t \wedge y)^i \vee (z \wedge y)^j \in V_0 \quad \text{для } i = 1, \dots, m - 1,\ j = 1, \dots, m - i - 1.$$

На основе этого алгоритма докажем следующую лемму.

Лемма 4. $V_0 = L((x_1 \wedge y) \vee \ldots \vee (x_m \wedge y) : x_i, y \in \mathbb{R}^4)$.

Доказательство. Покажем, что $(x_1 \wedge y) \vee (x_2 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$ для любых x_i, y таких, что $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \neq \lambda y$ (где берется суммирование по всем k, попарно не коллинеарным x_i).

Случай $k = 1$ тривиален. При $k = 2$ утверждение доказано выше.

При $k > 2$ рассмотрим все k сумм, полученных из суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i$ вычитанием слагаемого x_j. Ясно, что все они не могут быть коллинеарны y, так как иначе суммирование всех таких сумм привело бы к коллинеарности всей суммы $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i$, что противоречит условию.

Тогда выберем сумму $s = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i - x_j$, не коллинеарную y. Рассмотрим $((s + \alpha x_j) \wedge y)^m \in V_0$, забывая про все остальные x_i. Это есть случай $k = 2$, и, значит, мы показали, что из условия $s + x_j \neq \lambda y$ получим $(s \wedge y)^{m-i} \vee (x_j \wedge y)^i \in V_0$. Фиксируем i и, продолжая аналогично с вектором $(s \wedge y)^{m-i}$ с уже $k - 1$

различными вхождениями, попарно не коллинеарных x_i, и условием $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i - x_j \neq \lambda y$, получим $(x_1 \wedge y) \vee (x_2 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$.

Заметим, что и при условии $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \lambda y$ будет верно заключение $(x_1 \wedge y) \vee (x_2 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$.

Действительно, рассмотрим все $(x_i \wedge y)$. Если хотя бы для одного вектора x это нулевой вектор, то в заключении леммы получим истинное включение $0 \in V_0$. Если все x_i не коллинеарны y, то при $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i = \lambda y$ рассмотрим вместо x_1 вектор $x_1' = 2x_1$. Сумма векторов $x_1', x_2, \ldots, x_k$ не коллинеарна y, т. е. выполнено условие доказанного утверждения. Замена $x_1' = 2x_1$ дает $(x_1 \wedge y) \vee (x_2 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$.

Тем самым получаем, что $V_0 \supseteq L((x_1 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \mid x_i, y \in \mathbb{R}^4)$ и ввиду ясности обратного включения — равенство указанных пространств.

Замечание 4. Доказательство леммы может быть перенесено и на общий случай $\mathbb{R}^n : V_0 = L((x_1 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) : x_i, y \in \mathbb{R}^n)$.

Замечание 5. Если $v = (x_1 \wedge y) \vee (x_2 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y)$, то при подстановке вместо векторов x_i, y их выражений через e_1, e_2, e_3, e_4 получим (при отбрасывании инвариантных векторов) сумму неинвариантных векторов, вообще говоря, из разных цепочек, которая лежит в V_0.

Ввиду того, что мы можем выбирать сколько угодно много различных коэффициентов α при векторе e_i из разложений x_i, y, можно разделить вектор v, представляющий сумму неинвариантных векторов, на суммы с векторами, которые содержат одинаковое количество вхождений цифр $1, 2, 3, 4$, или с векторами из одной цепочки. Иначе говоря, обозначив через $\mathrm{Pr}(v, \sigma)$ суммы всех векторов (взятыми с соответствующими коэффициентами) из v, которые лежат в цепочке σ, получим, что $\mathrm{Pr}(v, \sigma) \in V_0$.

Продолжим метод линеаризации, совершая в векторе $v = (x_1 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$ (для $(x_i \wedge y) \neq 0$) замену y на $y + \alpha t$. Обозначим через $\bigvee\limits_{j=1}^{k} (a_j)$ вектор $(a_1) \vee \ldots \vee (a_k)$. Тогда при раскрытии скобок, аналогично сделанному выше, можно добиться того, что «векторный» коэффициент при каждой степени α будет лежать в V_0, т. е. при α^{m-k} будет

$$\sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le m} \bigvee_{s=1}^{k} (x_{i_s} \wedge y) \bigvee_{j=1, j \notin \{i_s\}}^{m} (x_j \wedge t) \in V_0.$$

Например, при $m = 2$ получим $(x_1 \wedge y) \vee (x_2 \wedge t) + (x_1 \wedge t) \vee (x_2 \wedge y) \in V_0$.

Как и выше, можно показать, что для только что полученных векторов v (представляющих суммы простых векторов) $\mathrm{Pr}(v, \sigma) \in V_0$.

4. Размерность V_0

Теперь мы готовы дать ответ на вопрос о размерности пространства V_0.

Теорема 3 (о размерности V_0). *Имеет место равенство*

$$\dim V_0 = C_{m+5}^{5} - C_{m+3}^{5}. \tag{10}$$

Доказательство. Для начала рассмотрим произвольную цепочку $\sigma = (k_i)$ и соответствующую ей симметрическую цепочку $\delta = (k_0, k_0, k_0, k_0)$. Покажем, что $\dim(V_0 \cap L(\sigma)) = k_0 + 1$. Возможны два варианта.

Случай 1: $k_0 = \tilde{k}$. Без ограничения общности предположим, что $k_1 = k_0$. Пусть общая инвариантная часть цепочки имеет вид $u' = (23)^i \vee (24)^j \vee (34)^k$. Построим векторы вида $(x_1 \wedge y) \vee \ldots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$:

$$u_0 = (e_1 \wedge (e_2 + e_3))^{k_0} \vee (e_2 \wedge (e_2 + e_3))^i \vee (-e_4 \wedge (e_2 + e_3))^{j+k+k_0} = (12 + 13)^{k_0} \vee (23)^i \vee (24 + 34)^{j+k+k_0},$$

$$u_{k_0} = (e_1 \wedge (e_3 + e_4))^{k_0} \vee (e_3 \wedge (e_3 + e_4))^k \vee (e_2 \wedge (e_3 + e_4))^{i+j+k_0} = (13 + 14)^{k_0} \vee (34)^k \vee (23 + 24)^{i+j+k_0}.$$

Положим $v_0 = Pr(u_0, \sigma)$ и $v_{k_0} = Pr(u_{k_0}, \sigma)$, тогда при раскрытии скобок получим суммы векторов, лежащих соответственно на левой стороне графа цепочки для v_0 и на нижней стороне для v_{k_0}, причем все коэффициенты разложения по сторонам будут положительными. Тем самым векторы v_0, v_{k_0} лежат в пространстве $V_0 \cap L(\sigma)$.

Если $k_0 = 1$, то мы уже нашли искомые $k_0 + 1$ линейно независимых векторов $v_t \in V_0 \cap L(\sigma)$, и по теореме 2 получим, что $\dim(V_0 \cap L(\sigma)) = k_0 + 1$. При $k_0 > 1$ аналогично вектору u_0 построим векторы

$$\hat{u}_t = (12 + 13)^{k_0} \vee (23)^{i+t} \vee (24 + 34)^{j+k+k_0-t} \in V_0, \quad t = 1, \ldots, k_0 - 1.$$

Совершим замену $y \mapsto y + \alpha z$ в векторах $\hat{u}_t$, где $y = e_2 + e_3$, $z = e_4$. По построению

$$x_1, \ldots, x_{k_0} = e_1,$$
$$x_{k_0+1}, \ldots, x_{k_0+i-t} = e_2,$$
$$x_{k_0+i-t+1}, \ldots, x_{i+j+k+2k_0} = -e_4$$

и $x_i \wedge z = 0$ при $i > k_0 + i - t$. Через u_t обозначим вектор, получающийся при α^t после указанной замены. Тогда u_t есть сумма векторов, имеющих в своей записи пары $(14)^s \vee (24)^{t-s}$, где $s = 0, \ldots, t$. Окончательно вектор u_t имеет следующий вид:

$$u_t = \sum_{s=0}^{t} C_{k_0}^s C_{i+t}^{t-s} (12 + 13)^{k_0-s} \vee (14)^s \vee (23)^{i+s} \vee (24)^{t-s} \vee (24 + 34)^{j+k+k_0-t},$$

где коэффициент $C_{k_0}^s C_{i+t}^{t-s}$ связан с $C_{k_0}^s$ различными вариантами выбора s пар из k_0 пар для компоненты $(14)^s$ и C_{i+t}^s различными вариантами выбора $t - s$ пар из $i + t$ пар для компоненты $(24)^{t-s}$. Согласно разд. 3

$$v_t = \mathrm{Pr}(u_t, \sigma) \in V_0.$$

При раскрытии скобок получим сумму векторов цепочки σ с положительными коэффициентами λ_s^p:

$$v_t = \sum_{s=0}^{t} \sum_{p=0}^{q(s)} \lambda_s^p (12)^p \vee (13)^{k_0-p-s} \vee (14)^s \vee (23)^s \vee (24)^{k_0-p-s} \vee (34)^p \vee u',$$

где $0 \le s \le t$ (ввиду того, что t — максимальная возможная степень вхождения пары (14)) и $0 \le p \le q(s) = \min\{k_0 - s, j + k_0 - t\}$ (это ограничение в силу того, что $q(s) + k$ — максимальная возможная степень вхождения пары (34) при фиксированном s).

Случай 2: $k_0 = \hat{k}$ и $k_0 < \tilde{k}$. Без ограничения общности предположим, что $k_1 = m - k_0$. Пусть общая инвариантная часть цепочки имеет вид $u' = (12)^i \vee (13)^j \vee (14)^k$. Построим векторы вида $(x_1 \wedge y) \vee \cdots \vee (x_m \wedge y) \in V_0$:

$$u_0 = (e_1 \wedge (e_1 + e_4))^k \vee (-e_2 \wedge (e_1 + e_4))^{i+k_0} \vee (-e_3 \wedge (e_1 + e_4))^{j+k_0} = (14)^k \vee (12 - 24)^{i+k_0} \vee (13 - 34)^{j+k_0},$$

$$u_{k_0} = (e_1 \wedge (e_1 + e_2))^{k_0} \vee (-e_3 \wedge (e_1 + e_2))^{j+k_0} \vee (-e_4 \wedge (e_1 + e_2))^{k+k_0} = (12)^i \vee (13 + 23)^{j+k_0} \vee (14 + 24)^{k+k_0}.$$

Положим $v_0 = Pr(u_0, \sigma)$ и $v_{k_0} = Pr(u_{k_0}, \sigma)$, тогда при раскрытии скобок получим суммы векторов, лежащих соответственно на левой стороне графа цепочки для v_0 и на нижней стороне для v_{k_0}. При этом все коэффициенты разложения вектора v_{k_0} положительны, а коэффициенты разложения вектора v_0 одного знака, для определенности выберем в случае отрицательности коэффициентов этого разложения $v_0 = -\operatorname{Pr}(u_0, \sigma)$. Тем самым векторы v_0, v_{k_0} лежат в пространстве $V_0 \cap L(\sigma)$.

Если $k_0 = 1$, то мы уже нашли искомые $k_0 + 1$ линейно независимых векторов $v_t \in V_0 \cap L(\sigma)$, и по теореме 2 получим, что $\dim(V_0 \cap L(\sigma)) = k_0 + 1$. При $k_0 > 1$ аналогично вектору u_{k_0} построим векторы

$$\hat{u}_t = (12)^{i+t} \vee (13 + 23)^{j+k_0-t} \vee (14 + 24)^{k+k_0} \in V_0, \quad t = 1, \ldots, k_0 - 1.$$

Совершим замену $y \mapsto y + \alpha z$ в векторах $\hat{u}_t$, где $y = e_1 + e_2$, $z = e_3$. Через u_t обозначим вектор, получающийся при α^t после указанной замены. Тогда u_t есть сумма векторов, имеющих в своей записи пары $(13)^{t-s} \vee (34)^s$ $(s = 0, \ldots, t)$:

$$u_t = \sum_{s=0}^{t} C^s_{k+k_0} C^{t-s}_{i+t} (12)^{i+s} \vee (13)^{t-s} \vee (13 + 23)^{j+k_0-t} \vee (34)^s \vee (14 + 24)^{k+k_0-s},$$

где коэффициент $C^{t-s}_{k+k_0} C^s_{i+t}$ связан с C^s_{i+t} различными вариантами выбора $t - s$ пар из $i + t$ пар для компоненты $(13)^{t-s}$ и $C^s_{k+k_0}$ различными вариантами выбора s пар из $k + k_0$ пар для компоненты $(34)^s$. Имеем $v_t = \operatorname{Pr}(u_t, \sigma) \in V_0$.

При раскрытии скобок получим сумму векторов цепочки σ с положительными коэффициентами λ^p_s:

$$v_t = \sum_{s=0}^{t} \sum_{p=0}^{q(s)} \lambda^p_s (12)^s \vee (13)^{k_0-p-s} \vee (14)^p \vee (23)^p \vee (24)^{k_0-p-s} \vee (34)^s \vee u',$$

где $0 \le s \le t$ (ввиду того, что t — максимальная возможная степень вхождения пары (12)) и $0 \le p \le q(s) = \min\{k_0 - s, j + k_0 - t\}$ (это ограничение в силу того, что $q(s)$ — максимальная возможная степень вхождения пары (23) при фиксированном s).

И в первом, и во втором случаях полученные векторы v_t лежат в $V_0 \cap L(\sigma)$, их количество равняется $k_0 + 1$, и они линейно независимы, так как их компоненты по правой стороне также линейно независимы. Тем самым $\dim(V_0 \cap L(\sigma)) = k_0 + 1$.

Теперь найдем $\dim V_0$. Пусть $p = \left[\frac{m}{2}\right]$. Представим $\dim V_0$ как

$$I(m) + \sum_{k_0=1}^{p} C_{k_0}(k_0 + 1) = I(m) + N(m) + \sum_{k_0=1}^{p} C_{k_0} k_0, \tag{11}$$

где C_{k_0} — количество цепочек (k_0, k_0, k_0, k_0) для $k_0 \leq p$. Вычислим сумму $S = \sum\limits_{k_0=1}^{[\frac{m}{2}]} C_{k_0} \cdot k_0$.

(а) Пусть $m = 2l$. Для $m = 2$ утверждение теоремы проверяется из условия $\dim(V_0 \cap L(\sigma)) = k_0 + 1$, поэтому рассматриваем $m \geq 4$. Отделим цепочку (k_0, k_0, k_0, k_0) для $k_0 = \frac{m}{2}$, в сумме из (11) ей будет соответствовать $\frac{m}{2}$ векторов. Теперь для произвольной цепочки (k_0, k_0, k_0, k_0) при $k_0 < \frac{m}{2}$ найдем $t = m - 2k_0$ — количество пар общей инвариантной части цепочки, и C_{k_0} есть фактически количество инвариантных векторов в пространстве $S^t(\wedge^2\mathbb{R}^4)$, т. е. $I(t) = 4t^2 + 2$. В итоге

$$S = \sum_{k_0=1}^{p-1} (4(m - 2k_0)^2 + 2)k_0 + p = \frac{m^4}{12} - \frac{m^2}{12}.$$

(б) Пусть $m = 2l + 1$. Полагаем, что $m \geq 3$. Аналогично находим C_{k_0} и вычисляем S:

$$S = \sum_{k_0=1}^{\frac{m-1}{2}} (4(m - 2k_0)^2 + 2)k_0 = \frac{m^4}{12} - \frac{m^2}{12}.$$

Суммируя это значение с $N(m)$ и $I(m)$, получаем утверждение теоремы.

В ходе доказательства теоремы 3 мы непосредственно находили базис $V_0 \cap L(\sigma)$ для произвольной цепочки $\sigma = (k_0, k_0, k_0, k_0)$. Если взять объединение всех инвариантных векторов пространства V и всех базисов таких пересечений (по всем цепочкам, соответствующим цепочке (k_0, k_0, k_0, k_0), и по всем таким k_0, что $1 \leq k_0 \leq \left[\frac{m}{2}\right]$), то получим базис V_0.

Замечание 6. К сожалению, количество ненулевых компонент базисных векторов пространства V_0, не являющихся инвариантными, в разложении по стандартному базису велико. Возможно, есть более экономичный и удобный базис V_0, но по лемме 3 в силу связности подграфа, соответствующего вектору v_t, и того, что он содержит хотя бы одну вершину каждой стороны, получаем, что он содержит не менее $k_0 + 1$ ненулевых компонент по векторам цепочки $\sigma = (k_0)$ (так как сумма расстояний любой вершины графа цепочки до трех сторон не менее k_0).

Автор выражает благодарность В. А. Шарафутдинову за постановку задачи и А. П. Пожидаеву, под руководством которого выполнена работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sharafutdinov V.* Slice-by-slice reconstruction algorithm for vector tomography with incomplete data // Inverse Probl. 2007. V. 23. P. 2603–2627.
2. *Кострикин А. И., Манин Ю. И.* Линейная алгебра и геометрия. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

Статья поступила 3 апреля 2008 г.

Губарев Всеволод Юрьевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vsevolodgu@mail.ru