*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2009. Том 50, № 3*

*УДК 512.55*

# ОБОБЩЕННЫЕ $SV$–МОДУЛИ

**А. Н. Абызов**

**Аннотация.** Для произвольного квазипроективного правого $R$-модуля $P$ установлено, что в категории $\sigma(P)$ каждый модуль слабо регулярен тогда и только тогда, когда в категории $\sigma(M/I(M))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема, где $M$ — порождающий объект категории $\sigma(P)$. В частности, даются описания колец, над которыми каждый правый модуль слабо регулярен.

**Ключевые слова:** полуартиново кольцо, слабо регулярный модуль, $SV$-кольцо, квазипроективный модуль.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными. Модуль $M$ называется *слабо регулярным*, если каждый его подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля $M$, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля $M$. Кольцо $R$ называется *слабо регулярным*, если слабо регулярен модуль $R_R$.

Через $J(R)$ и $J(M)$ будем соответственно обозначать радикал Джекобсона кольца $R$ и модуля $M$. Инъективную оболочку модуля $M$ будем обозначать через $E(M)$. Если модуль $M$ обладает композиционным рядом, то число композиционных факторов в композиционном ряде модуля $M$ называется его *длиной* и обозначается через $l(M)$. Модуль, который изоморфен подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий модуля $M$, называется *$M$-подпорожденным*. Полную подкатегорию всех правых $R$-модулей, состоящую из всех $M$-подпорожденных модулей, будем обозначать через $\sigma(M)$.

Модуль $M$ называется *$SV$-модулем*, если он является полуартиновым $V$-модулем. Кольцо $R$ называется *правым $SV$-кольцом*, если $R_R$ — $SV$-модуль. Модуль $M$ назовем *обобщенным $SV$-модулем*, если каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является слабо регулярным. Кольцо $R$ называется *обобщенным справа $SV$-кольцом,* если каждый правый $R$-модуль слабо регулярен.

Слабо регулярные кольца под названием $I_0$-колец введены и изучены Никольсоном в работе [1]. Понятие слабо регулярного модуля введено И. И. Сахаевым в начале 90-х гг. прошлого столетия. Проективные слабо регулярные модули подробно изучены в [2]. Основным результатом настоящей работы является теорема 13, в которой характеризуются квазипроективные обобщенные $SV$-модули. В частности, даются описания обобщенных справа $SV$-колец.

*Рядом Леви модуля $M$* называется возрастающая цепочка

$$0 \subset \mathrm{Soc}_1(M) = \mathrm{Soc}(M) \subset \dots \subset \mathrm{Soc}_\alpha(M) \subset \mathrm{Soc}_{\alpha+1}(M) \subset \dots,$$

где $\mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) = \mathrm{Soc}(M/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа $\alpha$ и $\mathrm{Soc}_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{Soc}_\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа $\alpha$. Обозначим через $L(M)$ подмодуль вида $\mathrm{Soc}_\xi(M)$, где $\xi$ —

наименьший ординал, для которого выполнено равенство $\mathrm{Soc}_\xi(M) = \mathrm{Soc}_{\xi+1}(M)$. Модуль $M$ называется *полуартиновым*, если выполнено равенство $M = L(M)$. Кольцо $R$ называется *полуартиновым справа*, если модуль $R_R$ является полуартиновым. Для произвольного кольца $R$ через $L(R)$ и $\mathrm{Soc}(R)$ будем обозначать соответственно идеалы $L(R_R)$ и $\mathrm{Soc}(R_R)$.

Для произвольного правого $R$-модуля $M$ определим по трансфинитной индукции для каждого ординального числа $\alpha$ подмодуль $I_\alpha(M)$ следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $I_\alpha(M) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $I_{\beta+1}(M)/I_\beta(M)$ — сумма всех локальных $M$-инъективных правых подмодулей модуля $M/I_\beta(M)$ длины не больше двух, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона является $M$-инъективным модулем. Когда $\alpha$ — предельное ординальное число, положим $I_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta(M)$. Ясно, что для некоторого ординального числа $\tau$ имеют место равенства $I_\tau(M) = I_{\tau+1}(M)$ и $I_1(M/I_\tau(M)) = 0$. Далее через $I(M)$ будем обозначать подмодуль $I_\tau(M)$. Для произвольного кольца $R$ через $I(R)$ будем обозначать правый идеал $I(R_R)$, который, как легко заметить, является идеалом.

Для правых $R$-модулей $P$, $M$ и $S = \mathrm{End}_R(P)$ абелеву группу $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ можно рассматривать как правый $S$-модуль, положив $(fs)(m) = f(s(m))$, где $f \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$, $s \in S$ и $m \in M$.

**Лемма 1.** *Пусть $P$ — конечно порожденный квазипроективный правый $R$-модуль и $S = \mathrm{End}_R(P)$. Если $M \in \sigma(P)$, то имеют место следующие утверждения:*

(1) *если $N$ — подмодуль модуля $M$, то существует изоморфизм правых $S$-модулей $\mathrm{Hom}_R(P, M/N) \cong \mathrm{Hom}_R(P, M)/\mathrm{Hom}_R(P, N)$;*

(2) *если $M$ — простой правый $R$-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ является либо простым, либо нулевым правым $S$-модулем;*

(3) *если $M$ — полупростой правый $R$-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ — полупростой правый $S$-модуль;*

(4) *если $M = \sum\limits_{i\in I} N_i$ и $\mathrm{Hom}_R(P, M) \neq 0$, то существует $i_0 \in I$ такой, что $\mathrm{Hom}_R(P, N_{i_0}) \neq 0$;*

(5) *если $\phi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$, то $\phi S = \mathrm{Hom}_R(P, Jm(\phi))$.*

Доказательство. (1) Пусть $f$ — каноническое отображение из $M$ на $M/N$. Рассмотрим отображение $g : \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, M/N)$, действующее по правилу $g(\phi) = f\phi$. Ясно, что $g$ — $S$-гомоморфизм и $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Hom}_R(P, N)$. Согласно [3, 18.3] $P$ — проективный объект категории $\sigma(P)$. Тогда $g$ — эпиморфизм, что и доказывает наше утверждение.

(2) Расмотрим ненулевой гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Покажем, что $\phi S = \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Так как $\phi$ ненулевой, он является эпиморфизмом. Тогда из квазпроективности $P$ следует существование такого гомоморфизма $\beta \in S$, что $\alpha = \phi\beta$.

(3) Пусть $M = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$, где для каждого $i$ модуль $S_i$ прост. Поскольку $P$ является конечно порожденным, то $\mathrm{Hom}_R(P, \bigoplus\limits_{i\in I} S_i) \cong \bigoplus\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P, S_i)$. Тогда полупростота $S$-модуля $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ следует из предыдущего пункта.

(4) Пусть $\phi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ — ненулевой гомоморфизм. Рассмотрим естественный эпиморфизм $f$ из $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ на $\sum\limits_{i\in I} N_i$. Поскольку $P$ — проективный объект

в категории $\sigma(P)$, существует такой гомоморфизм $g : P \to \bigoplus_{i\in I} N_i$, что $\phi = fg$. Тогда $g$ — ненулевой гомоморфизм и, следовательно, существует такой $i_0 \in I$, что $\mathrm{Hom}_R(P, N_{i_0}) \neq 0$;

(5) Утверждение следует из квазипроективности модуля $P$. $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из [4, 11.35].

**Лемма 2.** *Пусть $P$ — правый $R$-модуль и кольцо $S = \mathrm{End}_R(P)$ регулярно. Тогда из инъективности правого $R$-модуля $M$ следует инъективность правого $S$-модуля $\mathrm{Hom}_R(P, M)$.*

**Лемма 3.** *Пусть $M$ — слабо регулярный правый $R$-модуль и $N$ — подмодуль модуля $M$ такой, что $(N + J(M))/J(M)$ — простой подмодуль модуля $M/J(M)$. Тогда модуль $N$ содержит такое локальное прямое слагаемое $mR$ модуля $M$, что $(N + J(M))/J(M) = (m + J(M))R$.*

Доказательство. Пусть $n$ — элемент подмодуля $N$ такой, что

$$(N + J(M))/J(M) = (n + J(M))R.$$

Из слабой регулярности модуля $M$ следует существование такого циклического подмодуля $mR$, что $mR \not\subset J(M)$, $mR \subset nR$ и $mR$ — прямое слагаемое модуля $M$. Тогда

$$(N + J(M))/J(M) = (m + J(M))R \cong mR/(J(M) \cap mR) \cong mR/J(mR),$$

что доказывает локальность модуля $mR$. $\square$

**Лемма 4.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным. Тогда каждый локальный модуль из категории $\sigma(M)$ локальный длины не больше двух.*

Доказательство. Пусть $N$ — локальный модуль из категории $\sigma(M)$. Если $N$ непростой, то из [5, лемма 3.3] следует, что $N \not\subset J(E(N))$, где $E(N)$ — инъективная оболочка модуля $N$ в категории $\sigma(M)$. Тогда из слабой регулярности модуля $E(N)$ получаем равенство $N = E(N)$. Поскольку каждый инъективный неразложимый модуль однороден и по [5, лемма 3.3] $J(N)$ полупрост, то $N$ — локальный модуль длины два. $\square$

**Лемма 5.** *Если $M$ — полуартинов модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным, то каждый неполупростой модуль $N$ из $\sigma(M)$ будет содержать инъективный локальный подмодуль длины не больше двух.*

Доказательство. Поскольку $N$ является неполупростым, то из [5, теорема 3.4] следует, что он будет содержать ненулевой инъективный подмодуль $N_0$. Так как $M$ — полуартинов модуль, ввиду [6, 3.12] подмодуль $N_0$ также является полуартиновым и, следовательно, $N_0/J(N_0)$ будет содержать простой подмодуль. Тогда из лемм 3 и 4 вытекает, что модуль $N_0$ будет содержать прямое слагаемое, которое является инъективным, локальным и длины не больше двух. $\square$

Модуль $M$ называется *полулокальным*, если $M/J(M)$ является полупростым модулем. Говорят, что подмодуль $N$ модуля $M$ *лежит над прямым слагаемым модуля* $M$, если существуют такие подмодули $N_1$ и $N_2$, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ косуществен в $N_2$. Правый $R$-модуль $M$ называется *модулем со свойством подъема*, если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля $M$. Легко видеть, что каждый модуль со свойством подъема является слабо регулярным.

**Теорема 6.** *Пусть $M$ — правый $R$-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *$M$ полулокальный и каждый модуль в $\sigma(M)$ слабо регулярен;*

(2) *$M$ локально нётеров и каждый модуль в $\sigma(M)$ слабо регулярен;*

(3) *каждый модуль в $\sigma(M)$ является модулем со свойстом подъема.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Покажем, что модуль $M$ локально нётеров. Пусть $N$ — конечно порожденный подмодуль модуля $M$. Ясно, что модуль $N/(N \cap J(M))$ является полупростым модулем конечной длины. Используя индукцию по длине модуля $N/(N \cap J(M))$, покажем, что $N$ — модуль конечной длины. Если $l(N/(N \cap J(M))) = 1$, то из леммы 3 следует существование такого локального подмодуля $N_0$ модуля $N$, что $(N_0 + J(M))/J(M) \cong (N + J(M))/J(M)$ и $M = N_0 \oplus L$, где $L$ — подмодуль $M$. Тогда $N = N_0 \oplus (N \cap L)$, где $N \cap L \subset J(M)$ и $J(M) \subset \mathrm{Soc}(M)$ согласно [5, лемма 3.3]. Поскольку $N \cap L$ — конечно порожденный полупростой модуль, а по лемме 4 $N_0$ — локальный модуль конечной длины, то $N$ — модуль конечной длины. Пусть наше утверждение доказано для конечно порожденных подмодулей $S$ модуля $M$, у которых $l(S/(S \cap J(M))) < n$ и $N$ — конечно порожденный подмодуль модуля $M$, у которого $l(N/(N \cap J(M))) = n$. Выберем в модуле $N$ такой подмодуль $N_0$, что $N_0/(N_0 \cap J(M))$ — простой модуль. Из леммы 3 следует существование такого локального подмодуля $mR$ модуля $N_0$, что $M = mR \oplus L$, где $L$ подмодуль $M$. Тогда $N = mR \oplus (N \cap L)$ и $l(N/(N \cap J(M))) = 1 + l((N \cap L)/((N \cap L) \cap J(M)))$. Модули $mR$ и $N \cap L$ в силу предположения индукции имеют конечную длину, следовательно, модуль N также имеет конечную длину. Таким образом, модуль $M$ является локально нётеровым.

(2) $\Rightarrow$ (3) Покажем, что каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является полуартиновым. Для этого согласно [6, 3.12] достаточно показать полуартиновость модуля $M$. Пусть $M/N$ — фактор-модуль модуля $M$ и $N_0$ — ненулевой конечно порожденный подмодуль модуля $M/N$. Тогда $N_0$ — нётеров модуль и, следовательно, согласно [7, предложение 10.14] имеем равенство $N_0 = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$, где для каждого $i$ модуль $N_i$ неразложим. Поскольку каждый нерадикальный и неразложимый слабо регулярный модуль, очевидно, локален, из леммы 4 следует, что $\mathrm{Soc}(N_0) \neq 0$. Таким образом, каждый фактор-модуль модуля $M$ имеет ненулевой цоколь, что и доказывает полуартиновость модуля $M$.

Пусть $N$ — неполупростой модуль из $\sigma(M)$. Обозначим через $A$ множество всех подмодулей $N$, которые являются локальными инъективными длины не больше двух. Из леммы Цорна следует, что мы можем выбрать максимальное подмножество $A_0$ множества $A$ со свойством $\sum\limits_{U \in A_0} U = \bigoplus\limits_{U \in A_0} U$. Пусть $N_0 = \bigoplus\limits_{U \in A_0} U$. Поскольку по предположению $M$ локально нётеров, из [3, 27.3] получим равенство $N = N_0 \oplus L$, где $L$ — подмодуль модуля $N$. Если $L$ — неполупростой модуль, то из леммы 5 вытекает, что $L$ содержит инъективный локальный подмодуль длины не больше двух. Это противоречит выбору модуля $N_0$. Таким образом, каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является прямой суммой локальных модулей длины не больше двух. Тогда согласно [8, теорема 2.4] в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является модулем со свойством подъема.

(3) $\Rightarrow$ (1) Импликация непосредственно следует из [8, теорема 2.4]. $\square$

**Лемма 7.** *Если $M$ — правый $R$-модуль, то каждый ненулевой фактор-модуль модуля $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} I(M_\alpha)$, где $M \cong M_\alpha$ для каждого $\alpha$, содержит ненулевой* *локальный $M$-инъективный подмодуль длины не больше двух.*

Доказательство. Пусть $L = \big(\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)\big)/N$ — ненулевой фактор-модуль модуля $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)$ и $\varphi$ — канонический гомоморфизм из $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)$ в $L$. Тогда существует такой индекс $\alpha_0$, что $\varphi i_{\alpha_0}(I(M_{\alpha_0})) \neq 0$, где $i_{\alpha_0}$ — каноническое вложение модуля $I(M_{\alpha_0})$ в модуль $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)$. Пусть $\gamma$ — наименьшее ординальное число, для которого имеет место неравенство $\varphi i_{\alpha_0}(I_\gamma(M_{\alpha_0})) \neq 0$. Ясно, что $\gamma$ — непредельное ординальное число. Тогда модуль $L$ содержит ненулевой гомоморфный образ модуля $I_\gamma(M_\alpha)/I_{\gamma-1}(M_\alpha)$ и, следовательно, $L$ содержит локальный $M$-инъективный подмодуль длины не больше двух. $\square$

**Теорема 8.** *Если $M$ — полуартинов правый $R$-модуль, являющийся порождающим объектом категории $\sigma(M)$, то следующие условия равносильны:*

(1) *каждый модуль категории $\sigma(M)$ является слабо регулярным;*

(2) *каждый модуль в $\sigma(M/I(M))$ является модулем со свойством подъема;*

(3) *каждый модуль из $\sigma(M/I(M))$ является прямой суммой модулей длины не больше двух.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Если модуль $(M/I(M))/J((M/I(M)))$ содержит ненулевой $M$-инъективный подмодуль, то он, очевидно, будет содержать и простой $M$-инъективный подмодуль. Тогда из лемм 4 и 5 следует, что модуль $M/I(M)$ содержит $M$-инъективный локальный подмодуль длины не больше двух, у которого фактор-модуль по радикалу Джекобсона является $M$-инъективным модулем. Поскольку $I_1(M/I(M)) = 0$, получаем противоречие. Таким образом, $(M/I(M))/J((M/I(M)))$ не содержит ненулевых $M$-инъективных подмодулей и, следовательно, согласно [5, теорема 3.4] является полупростым модулем. Тогда $M/I(M)$ является полулокальным модулем и импликация следует из теоремы 6.

Равносильность пп. (2) и (3) вытекает из [8, теорема 2.4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Покажем, что каждый локальный модуль $N$ длины два из категории $\sigma(M/I(M))$ является инъективным в $\sigma(M)$. Пусть $E(N)$ — инъективная оболочка модуля $N$ в категории $\sigma(M)$ и $\varphi$ — эпиморфизм из $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ в $E(N)$, где для каждого $\alpha$ имеет место изоморфизм $M \cong M_\alpha$. Если $\varphi\big(\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)\big) = 0$, то $E(N)$ — объект категории $\sigma(M/I(M))$. Тогда по [8, теорема 2.4] $E(N)$ — модуль со свойством подъема, и поскольку $N \not\subset J(E(N))$, получаем равенство $E(N) = N$. В случае, когда $\varphi\big(\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)\big) \neq 0$, из леммы 7 следует, что $E(N)$ содержит $M$-инъективный локальный подмодуль длины не больше двух, что, очевидно, влечет равенство $E(N) = N$.

Рассмотрим произвольный неполупростой модуль $N$ из категории $\sigma(M)$. Из условия теоремы получаем существование эпиморфизма $\varphi$ из $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ в $N$, где для каждого $\alpha$ имеет место изоморфизм $M \cong M_\alpha$. Если $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha) \subset \operatorname{Ker}\varphi$, то $N$ будет неполупростым объектом категории $\sigma(M/I(M))$ и, следовательно, будет содержать в себе ненулевой инъективный подмодуль. Пусть $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha) \not\subset \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда из леммы 7 следует, что $N$ содержит ненулевой локальный $M$-инъективный подмодуль. Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что в произвольном неполупростом модуле $N$ содержится ненулевой инъективный подмодуль. Тогда импликация следует из [5, теорема 3.4]. $\square$

**Лемма 9.** *Пусть $P$ — конечно порожденный квазипроективный обобщенный правый $SV$-модуль над кольцом $R$, $S = \operatorname{End}_R(P)$ — регулярное кольцо и $M \in \sigma(P)$. Тогда правый $S$-модуль $\operatorname{Hom}_R(P, M)$ является либо полупростым, либо содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль.*

Доказательство. Допустим, что правый $S$-модуль $\operatorname{Hom}_R(P, M)$ не содержит ненулевых инъективных подмодулей. Определим в модуле $M$ по трансфинитной индукции для каждого ординального числа $\alpha$ подмодуль $M_\alpha$ следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $M_\alpha = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $M_{\beta+1}/M_\beta$ — сумма всех $P$-инъективных подмодулей модуля $M/M_\beta$. Когда $\alpha$ — предельное ординальное число, положим $M_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$. Обозначим через $M_0$ объединение всех таких модулей. Покажем с помощью трансфинитной индукции, что для каждого ординального числа $\alpha$ имеет место равенство $\operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha) = 0$. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. Пусть $\alpha$ — некоторое ординальное число и для каждого $\beta < \alpha$ имеет место равенство $\operatorname{Hom}_R(P, M_\beta) = 0$. Если $\alpha$ — предельное ординальное число, то равенство $\operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha) = 0$ тривиально. Предположим, что $\alpha$ — непредельное ординальное число и $\alpha = \alpha_0 + 1$. По предположению индукции $\operatorname{Hom}_R(P, M_{\alpha_0}) = 0$. Тогда по лемме 1

$$\operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha/M_{\alpha_0}) \cong \operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha)/\operatorname{Hom}_R(P, M_{\alpha_0}) \cong \operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha).$$

Если $\operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha) \neq 0$, то по лемме 1 в модуле $M_\alpha/M_{\alpha_0}$ найдется такой $P$-инъективный подмодуль $L$, что $\operatorname{Hom}_R(P, L) \neq 0$. Поскольку по лемме 2 $\operatorname{Hom}_R(P, L)$ — инъективный $S$-модуль, то $\operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha)$ и, следовательно, $\operatorname{Hom}_R(P, M)$ будут содержать в себе ненулевые $P$-инъективные подмодули, что противоречит исходному предположению. Таким образом, для каждого ординального числа $\alpha$ имеет место равенство $\operatorname{Hom}_R(P, M_\alpha) = 0$, и, следовательно, $\operatorname{Hom}_R(P, M_0) = 0$. Поскольку $M/M_0$ не содержит $P$-инъективных подмодулей, из [5, теорема 3.4] следует, что $M/M_0$ полупрост. Тогда по лемме 1 $\operatorname{Hom}_R(P, M/M_0)$ — полупростой модуль, и поскольку $\operatorname{Hom}_R(P, M/M_0) \cong \operatorname{Hom}_R(P, M)$, модуль $\operatorname{Hom}_R(P, M)$ также полупростой. $\square$

**Лемма 10.** *Пусть $P$ — конечно порожденный квазипроективный правый $R$-модуль, $S = \operatorname{End}_R(P)$ — регулярное кольцо и $N$ — циклический правый $S$-модуль. Тогда существует такой правый $R$-модуль $M$, что $M \in \sigma(P)$ и $N \cong \operatorname{Hom}_R(P, M)$.*

Доказательство. Из [3, 25.5] следует, что гомоморфизм правых $S$-модулей $\phi : N \bigotimes\limits_S S \to \operatorname{Hom}_R\big(P, N \bigotimes\limits_S P\big)$, при котором $n \otimes s \to [p \to n \otimes s(p)]$, является мономорфизмом. Очевидно, что $N \bigotimes\limits_S P \in \sigma(P)$. Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что модуль $N$ является подмодулем модуля $\operatorname{Hom}_R\big(P, N \bigotimes\limits_S P\big)$. Поскольку $N$ — циклический модуль, то для некоторого $\phi \in \operatorname{Hom}_R\big(P, N \bigotimes\limits_S P\big)$ имеем $N = \phi S$. Тогда из леммы 1 вытекает, что $N = \operatorname{Hom}_R(P, Jm(\phi))$. $\square$

**Лемма 11.** *Пусть $P$ — конечно порожденный квазипроективный обобщенный правый $SV$-модуль над кольцом $R$ и $S = \operatorname{End}_R(P)$ — регулярное кольцо. Тогда $S$ — обобщенное справа $SV$-кольцо.*

Доказательство. В силу [5, теорема 3.4] достаточно показать, что каждый циклический неполупростой правый $S$-модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль. Пусть $N$ — циклический неполупростой правый $S$-модуль.

Из леммы 10 следует, что для некторого $M \in \sigma(P)$ имеет место изоморфизм $N \cong \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Тогда согласно лемме 9 $N$ содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль. $\square$

**Теорема 12.** *Если $P$ — квазипроективный обобщенный $SV$-модуль, то $P$ — полуартинов модуль.*

Доказательство. Предположим, что $P \neq L(P)$. Обозначим через $M$ фактор-модуль $P/L(P)$, который согласно [3, 18.2] является квазипроективным. Из [5, лемма 3.3] следует, что $J(M) = 0$. Поскольку $M$ неполупростой, согласно [5, теорема 3.4] $M$ содержит ненулевой циклический квазипроективный $P$-инъективный подмодуль $mR$, где $m \in M$. Из [3, 22.1, 22.2] следует, что $\mathrm{End}_R(mR)$ является регулярным кольцом. По лемме 11 и [5, теорема 3.7] $\mathrm{End}_R(mR)$ — правое $SV$-кольцо. Тогда $\mathrm{End}_R(mR)$ содержит примитивный идемпонтент $e$ и $emR$ является простым модулем, что противоречит равенству $\mathrm{Soc}(M) = 0$. $\square$

**Теорема 13.** *Для квазипроективного правого $R$-модуля $P$ следующие условия равносильны:*

(1) *$P$ — обобщенный $SV$-модуль;*

(2) *если $M$ — порождающий объект категории $\sigma(P)$, то в категории $\sigma(M/I(M))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема.*

Доказательство. Равносильность пп. (1) и (2) непосредственно вытекает из теорем 8 и 12. $\square$

Следующее утверждение вытекает из предыдущей теоремы и [8, следствие 2.5].

**Следствие 14.** *Для кольца $R$ следующие условия равносильны:*

(1) *$R$ — обобщенное справа $SV$-кольцо;*

(2) *$R/I(R)$ артиново полуцепное и $J^2(R/I(R)) = 0$;*

(3) *каждый правый модуль над кольцом $R/I(R)$ является модулем со свойством подъема.*

**Следствие 15** [9]. *Для квазипроективного правого $R$-модуля $P$ следующие условия равносильны:*

(1) *$P$ — $SV$-модуль;*

(2) *каждый ненулевой модуль в категории $\sigma(P)$ содержит ненулевой $P$-инъективный подмодуль.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Согласно [6, 3.12] каждый модуль в категории $\sigma(P)$ полуартинов. Тогда импликация следует из того факта, что каждый ненулевой модуль в $\sigma(P)$ содержит простой $P$-инъективный подмодуль.

(2) $\Rightarrow$ (1) Легко видеть, что $P$ — обобщенный $SV$-модуль и, следовательно, согласно теореме 12 он полуартинов. Из условия пункта непосредственно вытекает, что каждый простой модуль в $\sigma(P)$ является $P$-инъективным, т. е. $P$ — $V$-модуль. $\square$

Примерами обобщенных $SV$-колец являются правые $SV$-кольца и артиновы полуцепные кольца, у которых квадрат радикала Джекобсона равен нулю. Приведем пример обобщенного $SV$-кольца, который отличен от упомянутых выше примеров.

Пример 16. Пусть $R$ — классически полупростое кольцо, $R_0$ — подкольцо кольца $R$, которое является артиновым полуцепным, и $J^2(R_0) = 0$. Рассмотрим кольцо $S = \prod\limits_{i\geq 1} R_i$, где $R_i = R$ для каждого $i$. Выделим в кольце $S$ подкольцо $T = \{a \in S \mid \exists N \forall i, j > N : a_i = a_j \& a_i \in R_0\}$. Тогда из [5, лемма 1.2] непосредственно следует, что $\operatorname{Soc}(T) = I_1(T) = \bigoplus\limits_{i\geq 1} R_i$.

Пусть $N$ — инъективный правый $T/\operatorname{Soc}(T)$-модуль, который естественным образом можно рассматривать как правый $T$-модуль. Рассмотрим вложение $N \subset E(N)$, где $E(N)$ — инъективная оболочка правого $T$-модуля $N$. Если $E(N)\operatorname{Soc}(T) \neq 0$, то для некоторого примитивного идемпотента $e$ из $\operatorname{Soc}(T)$ имеем $E(N)e \neq 0$. Поскольку $N$ существен в $E(N)$ и $e$ — центральный идемпотент кольца $T$, то $Ne \neq 0$, а это противоречит равенству $N\operatorname{Soc}(T) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(N)\operatorname{Soc}(T) = 0$ и, следовательно, $E(N)$ мы можем рассматривать как модуль над кольцом $T/\operatorname{Soc}(T)$. Поскольку $N$ — инъективный правый $T/\operatorname{Soc}(T)$-модуль, имеем равенство $N = E(N)$.

Таким образом, каждый модуль, инъективный над кольцом $T/\operatorname{Soc}(T)$, инъективен и над кольцом $T$. В частности, $I_2(T)/I_1(T) = I_1(T/\operatorname{Soc}(T)_{T/\operatorname{Soc}(T)})$, и, значит, $I(T) = I_2(T) = \{a \in S \mid \exists N \forall i, j > N : a_i = a_j \& a_i \in I_1(R_0)\}$ и $T/I(T) \cong R_0/I(R_0)$. Тогда из следствия 14 следует, что кольцо $S$ является обобщенным $SV$-кольцом. Отметим, что случай, когда $R = M_2(P)$, а $R_0$ — кольцо верхних треугольных матриц второго порядка над некоторым полем $P$, рассматривался в работе [10] как пример полуартинового нерегулярного кольца, у которого радикал Джекобсона равен нулю.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Nicholson W. K.* $I$-rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 207. P. 361–373.
2. *Hamza H.* $I_0$-rings and $I_0$-modules // Okayama Univ. 1998. V. 40, N 1. P. 91–97.
3. *Wisbauer R.* Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
4. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т. 1.
5. *Абызов А. Н.* Слабо регулярные кольца над нормальными кольцами // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 721–738.
6. *Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R.* Extending modules. London: Pitman, 1994.
7. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. New York: Spriger-Verl., 1991.
8. *Oshiro K., Wisbauer R.* Modules with every subgenerated module lifting // Osaka J. Math. 1995. V. 32. P. 513–519.
9. *Dung N. V., Smith P. F.* On semiartinian $V$-modules // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 82, N 1. P. 27–37.
10. *Baccella G.* Semi-Artinian $V$-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. 1995. V. 173, N 3. P. 587–612.


*Статья поступила 2 апреля 2008 г.*

Абызов Адель Наилевич
НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, отдел алгебры и математической логики,
ул. Профессора Нужина, 17, Казань 420008
aabyzov@ksu.ru