Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 512.54

C*–ГОМОМОРФИЗМЫ И ДУАЛЬНОСТЬ C*–ДИСКРЕТНЫХ КВАНТОВЫХ ГРУПП

Л. Цзян

Аннотация. Пусть $\mathscr{D}$ — C*-дискретная квантовая группа и $\mathscr{D}_0$ — дискретная квантовая группа, ассоциированная с $\mathscr{D}$. Предположим, что существует непрерывное действие $\mathscr{D}$ на унитальной C*-алгебре $\mathscr{A}$ такое, что $\mathscr{A}$ становится $\mathscr{D}$-модульной алгеброй. Если существует точное неприводимое вакуумное представление π алгебры $\mathscr{A}$ на гильбертовом пространстве $H = \overline{(\pi(\mathscr{A})\Omega)}$ с вакуумным вектором Ω, которое продолжается до $\mathscr{D}$-инвариантного состояния, то существует единственное согласованное с действием C*-представление (θ, H) квантовой группы $\mathscr{D}$. Подпространство неподвижных точек алгебры $\mathscr{A}$ относительно действия $\mathscr{D}$ является в точности коммутантом $\theta(\mathscr{D})$.

Ключевые слова: дискретная квантовая группа, C*-алгебра, C*-гомоморфизм, дуальность.

1. Введение

Пусть D — *-алгебра с невырожденным произведением. *Коумножением* на D называется *-гомоморфизм $\Delta\colon\ D \to M(D\otimes D)$ такой, что $\Delta(a)(1\otimes b)$ и $(a\otimes 1)\Delta(b)$ лежат в $D\otimes D$ и Δ является коассоциативным в том смысле, что

$$(a\otimes 1\otimes 1)(\Delta\otimes\iota)(\Delta(b)(1\otimes c)) = (\iota\otimes\Delta)((a\otimes 1)\Delta(b))(1\otimes 1\otimes c),$$

где $a, b, c \in D$, и 1 — единица в мультипликаторной алгебре $M(D)$ алгебры D. Рассмотрим линейные отображения T_1 и T_2, определенные на $D\otimes D$ правилом

$$T_1(a\otimes b) = \Delta(a)(1\otimes b), \quad T_2(a\otimes b) = (a\otimes 1)\Delta(b).$$

Если T_1 и T_2 инъективны, то (D, Δ) называется *мультипликаторной* *-алгеброй Хопфа [1, 2].

Дискретная квантовая группа является мультипликаторной *-алгеброй Хопфа (D, Δ), где алгебра D — прямая сумма полных матричных алгебр над $\mathbb{C}$ с естественной инволюцией. Дискретные квантовые группы первоначально рассматривались как дуальные к компактным матричным квантовым группам [3]. В действительности, поскольку теория компактных квантовых групп началась с фундаментальных работ С. Л. Вороновича [4, 5], именно тогда и возник этот класс квантовых групп и была развита теория дискретных квантовых групп на языке C*-алгебр [3]. Алгебраические аспекты и обобщения этой теории пришли в виде теории Эфроша, Руана и Ван Дейла о дуальности мультипликаторных

Supported by Program for New Century Excellent Talents in University of China and Natural Science Foundation of China.

алгебр Хопфа и инвариантных функционалов [6–8]. Ван Дейл также использовал мультипликаторные алгебры Хопфа для описания дискретных квантовых групп, не обращаясь к их компактным дуальным аналогам [2].

В данной статье мы рассматриваем С*-представление унимодулярной С*-дискретной квантовой группы $\mathscr{D}$ (т. е. С*-дискретной квантовой группы, у которой левый и правый интегралы совпадают) и затем получаем дуальность между $\mathscr{D}$ и ее алгеброй неподвижных точек при условии существования непрерывного действия $\mathscr{D}$ на унитальной С*-алгебре $\mathscr{A}$ и существования точного неприводимого вакуумного представления π алгебры $\mathscr{A}$, которое продолжается до $\mathscr{D}$-инвариантного состояния. Дуальный результат наследует физические свойства, что приводит к изучению дуальности дискретных квантовых групп. Говоря детально, предположим, что G — это конечная группа и $\mathscr{G}$ — алгебра полей G-спиновой модели. Если существует естественное действие двойной алгебры $D(G)$ на $\mathscr{G}$ такое, что $\mathscr{G}$ становится $D(G)$-модульной алгеброй, то получается алгебра наблюдаемых O в $\mathscr{G}$. Если дано неприводимое представление π алгебры $\mathscr{G}$, то возникает такая реализация $D(G)$, при которой $D(G)$ и $\pi(O)$ являются коммутантами друг друга [9]. Помимо этого примера в схему укладываются дуальность Шура — Вейля между симметрической группой и общей линейной группой [10], дуальность Джимбо — Шура — Вейля между квантовой группой типа A и алгеброй Гекке [11, 12] и т. д. Однако все дискретные квантовые группы, появляющиеся в примерах дуальности выше, конечномерны. В настоящий момент неизвестно ни одного нетривиального примера дуальности между бесконечномерной дискретной квантовой группой и ее алгеброй неподвижных точек.

Все алгебры, появляющиеся в данной статье, суть *-алгебры над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Общие результаты по алгебрам Хопфа могут быть найдены в [13, 14]. Мы будем использовать обозначения m, Δ, ε и S для умножения, коумножения, коединицы и антипода соответственно. Также мы принимаем стандартную запись для суммирования, принятую в теории алгебр Хопфа. В мультипликаторной алгебре Хопфа D запись $m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta(b) = \varepsilon(b)1$ означает

$$\sum_{(b)} ab_{(1)}S(b_{(2)}) = \varepsilon(b)a,$$

где $a, b \in D$ и $(a\otimes 1)\Delta(b) = \sum_{(b)} ab_{(1)} \otimes b_{(2)}$. При этом мы говорим, что $b_{(1)}$ *накрывается элементом* a. Также выражение $(a\otimes 1\otimes 1)(\Delta\otimes\iota)(\Delta(b)(1\otimes c))$ может быть записано в виде

$$\sum_{(b)} ab_{(1)} \otimes b_{(2)} \otimes b_{(3)}c,$$

где $a, b, c \in D$.

2. Унимодулярная С*-дискретная квантовая группа и ее алгебра неподвижных точек

Предположим, что $(\mathscr{D}, \Delta_{\mathscr{D}})$ — С*-дискретная квантовая группа. Другими словами, существует компактная квантовая группа $(\mathscr{B}, \Delta_{\mathscr{B}})$ такая, что $(\mathscr{D}, \Delta_{\mathscr{D}})$ является дуальной к $(\mathscr{B}, \Delta_{\mathscr{B}})$ в смысле [3]. Пусть Λ — множество классов эквивалентности всех неприводимых унитарных представлений $\mathscr{B}$. Тогда

$$\mathscr{D} = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}^{c_0} M_{n_\lambda},$$

где n_λ — размерность представления, соответствующего λ [15]. Это означает, что $\mathscr{D}$ состоит из бесконечных семейств $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ таких, что $m_\lambda \in M_{n_\lambda}$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное подмножество $F \subseteq \Lambda$ такое, что $\|m_\lambda\| < \varepsilon$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus F$. Другими словами, $\mathscr{D}$ — это c_0-ограниченная сумма семейства матричных алгебр $(M_{n_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ [16]. Пусть $\mathscr{D}_0$ — идеал Педерсена в $\mathscr{D}$, т. е. минимальный плотный идеал в $\mathscr{D}$. Тогда $\mathscr{D}_0$ является алгебраической прямой суммой того же семейства матричных алгебр $(M_{n_\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$. Пусть Δ — ограничение коумножения $\Delta_{\mathscr{D}}$ на $\mathscr{D}_0$. Пара $(\mathscr{D}_0, \Delta)$ является дискретной квантовой группой. Будем называть $(\mathscr{D}_0, \Delta)$ *дискретной квантовой группой, ассоциированной с* $(\mathscr{D}, \Delta_{\mathscr{D}})$.

Определение 2.1. Линейный функционал φ на $\mathscr{D}$ называется *левым интегралом*, если $(\mathrm{id}\otimes\varphi)\Delta(a) = \varphi(a)1$ для всех $a \in \mathscr{D}$. Аналогично линейный функционал ψ на $\mathscr{D}$ называется *правым интегралом*, если $(\psi\otimes\mathrm{id})\Delta(a) = \psi(a)1$ для всех $a \in \mathscr{D}$. Будем называть (C*-)дискретную квантовую группу *унимодулярной*, если ее левый и правый интеграл совпадают.

Известно, что если $(\mathscr{D}, \Delta_{\mathscr{D}})$ является унимодулярной C*-дискретной квантовой группой, то антипод S в $(\mathscr{D}_0, \Delta)$ ограничен и, более того, S является *-антигомоморфизмом, удовлетворяющим соотношению $S^2 = \mathrm{id}$. Далее мы предполагаем, что $\mathscr{D} = \bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda}^{c_0} M_{n_\lambda}$ — унимодулярная C*-дискретная квантовая группа и $\mathscr{D}_0$ — дискретная квантовая группа, ассоциированная с $\mathscr{D}$.

Лемма 2.2. *Если $S^2 = \mathrm{id}$, то для всех $a, b \in \mathscr{D}_0$*

$$\sum_{(b)} aS(b_{(2)})b_{(1)} = \varepsilon(b)a, \quad \sum_{(b)} b_{(2)}S(b_{(1)})a = \varepsilon(b)a,$$

где $\Delta(b)(1\otimes a) = \sum\limits_{(b)} b_{(1)} \otimes b_{(2)}a$.

Доказательство. Заметим, что $\mathscr{D}_0$ является дискретной квантовой группой и для $a, b \in \mathscr{D}_0$ выполняется

$$\sum_{(b)} S(b_{(1)})b_{(2)}a = \varepsilon(b)a.$$

Действуя антиподом S на обе части, получаем

$$\varepsilon(b)S(a) = \sum_{(b)} S(a)S(b_{(2)})S^2(b_{(1)}) = \sum_{(b)} S(a)S(b_{(2)})b_{(1)}.$$

Заменяя $S(a)$ на a, приходим к равенству

$$\sum_{(b)} aS(b_{(2)})b_{(1)} = \varepsilon(b)a.$$

Аналогично можно доказать второе равенство, поэтому его доказательство опускаем.

Определение 2.3. Пусть $\mathscr{D}$ — C*-дискретная квантовая группа, A — *-замкнутая операторная алгебра с единицей I. Если существует непрерывное билинейное отображение $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{D} \times A \to A$ такое, что для $a, b \in \mathscr{D}$ и $P, T \in A$ выполняется

$$\langle a, I\rangle = \varepsilon(a)I, \quad \langle ab, P\rangle = \langle a, \langle b, P\rangle\rangle, \quad \langle a, P^*\rangle = \langle S(a^*), P\rangle^*,$$

а для $a, b \in \mathscr{D}_0$ и $P, T \in \mathscr{A}$ справедливо

$$\langle a, P \cdot \langle b, T \rangle \rangle = \sum_{(a)} \langle a_{(1)}, P \rangle \langle a_{(2)} b, T \rangle,$$

где $\Delta(a)(1 \otimes b) = \sum_{(a)} a_{(1)} \otimes a_{(2)} b$, то $\mathscr{A}$ называется *$\mathscr{D}$-модульной алгеброй.*

Будем использовать обозначение $a(T)$ для элемента $\langle a, T \rangle$. Если A — это $\mathscr{D}$-модульная алгебра, то

$$a(b(T)P) = \sum_{(a)} a_{(1)} b(T) a_{(2)}(P).$$

Как известно [7], существует единственный z из $\mathscr{D}_0$, удовлетворяющий соотношениям $z = z^* = z^2$, $\varepsilon(z) = 1$ и $hz = zh = \varepsilon(h)z$ для любого $h \in \mathscr{D}_0$. Такой элемент называется *коинтегралом.* Если C*-дискретная квантовая группа $\mathscr{D}$ конечномерна, то она обладает единицей и $\mathscr{D}_0 = \mathscr{D}$. Тогда непрерывность, предполагаемая в определении 2.3, является излишней. Действительно, отображение $z(\cdot)$ является условным ожиданием, т. е. положительным отображением с бимодульным свойством, и потому автоматически непрерывно [17].

Предложение 2.4. *Пусть $\mathscr{D}$ — C*-дискретная квантовая группа и $\mathscr{D}_0$ — дискретная квантовая группа, ассоциированная с $\mathscr{D}$. Пусть $\mathscr{A}$ — унитальная C*-алгебра. Если $\mathscr{A}$ является $\mathscr{D}$-модульной алгеброй и z — коинтегралом в $\mathscr{D}_0$, то положим $O = \{T \in \mathscr{A} : z(T) = T\}$. Тогда $O = \{T \in \mathscr{A} : h(T) = \varepsilon(h)T\ \forall h \in \mathscr{D}_0\}$ и O является ненулевой C*-алгеброй.*

Доказательство. Поскольку $\varepsilon(z) = 1$, имеем $z(I) = I$ и потому O — ненулевое подпространство в $\mathscr{A}$. Ясно, что имеет место включение

$$\{T \in \mathscr{A} : h(T) = \varepsilon(h)T\ \forall h \in \mathscr{D}_0\} \subseteq O.$$

С другой стороны, предположим, что $T \in O$. Тогда для $h \in \mathscr{D}_0$ справедливо

$$h(T) = h(z(T)) = hz(T) = \varepsilon(h)z(T) = \varepsilon(h)T.$$

Таким образом, $O = \{T \in A : h(T) = \varepsilon(h)T\ \forall h \in \mathscr{D}_0\}$.

Поскольку $S(z^*) = z^*$, для $T \in O$ выполняется $z(T^*) = (S(z^*)(T))^* = (z(T))^* = T^*$, $T^* \in O$ и O замкнуто относительно *-операции. Кроме того, O — алгебра. Действительно, для любых $F, G \in O$ имеем

$$z(FG) = z(F(z(G))) = \sum_{(z)} z_{(1)}(F) z_{(2)} z(G) = z(F)z(G) = FG.$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\Delta(z)(1 \otimes z) = \sum_{(z)} z_{(1)} \otimes z_{(2)} z = z \otimes z.$$

Следовательно, O — ненулевая *-алгебра.

Наконец, предположим, что элемент T лежит в замыкании O относительно C*-нормы в $\mathscr{A}$, т. е. существует последовательность $\{T_n\} \subseteq O$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. Поскольку отображение $z(\cdot)$ непрерывно, то

$$z(T) = z(\lim_{n\to\infty} T_n) = \lim_{n\to\infty} z(T_n) = T,$$

откуда $T \in O$, и O замкнуто относительно C*-нормы. Тем самым O — C*-подалгебра в $\mathscr{A}$.

Замечание 2.5. Поскольку дискретная квантовая группа $\mathscr{D}_0$ плотна в $\mathscr{D}$, то $O = \{T \in \mathscr{A} : h(T) = \varepsilon(h)T\ \forall h \in \mathscr{D}\}$.

3. C*-гомоморфизм и дуальность для $\mathscr{D}$

Здесь мы предполагаем, что $\mathscr{D}$ — унимодулярная C*-дискретная квантовая группа и $\mathscr{D}_0$ — дискретная квантовая группа, ассоциированная с $\mathscr{D}$. Построим дуальность между $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}$-инвариантной подалгеброй O в $\mathscr{A}$, где $\mathscr{A}$ — это $\mathscr{D}$-модульная C*-алгебра. Сначала отметим, что всегда можно получить реализацию $\mathscr{D}$, если известно, что ГНС-представление π алгебры $\mathscr{A}$ ассоциировано с $\mathscr{D}$-инвариантным состоянием на $\mathscr{A}$.

Теорема 3.1. *Предположим, что существует точное неприводимое представление π алгебры $\mathscr{A}$ на гильбертовом пространстве $H = \overline{(\pi(\mathscr{A})\Omega)}$ с вакуумным вектором Ω, которое продолжается до $\mathscr{D}$-инвариантного состояния:*

$$(\pi(a(A))\Omega, \Omega) = \varepsilon(a)(\pi(A)\Omega, \Omega), \quad a \in \mathscr{D},\ A \in \mathscr{A}.$$

Тогда существует единственный C-гомоморфизм $\theta : \mathscr{D} \to L(H)$ такой, что для любых $a, b \in \mathscr{D}_0$ и $T \in \mathscr{A}$ справедливо*

$$\theta(a)(\Omega) = \varepsilon(a)\Omega, \tag{1}$$

$$\theta(b)\pi(a(T)) = \sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})\pi(T)\theta(S(a_{(2)})), \tag{2}$$

где $ba = \sum_{(a)} ba_{(1)}\varepsilon(a_{(2)})$.

Для доказательства данной теоремы нам необходимо сначала построить аппроксимативную единицу в $\mathscr{D}$. Предположим, что $F \subseteq \Lambda$ — конечное множество, где Λ — множество классов эквивалентности всех неприводимых унитарных представлений $\mathscr{B}$. Относительно включения $\mathscr{F} := \{F \mid F \subseteq \Lambda\}$ является направленным множеством. Положим $e_F = \sum_{\lambda \in F} e_\lambda$, где e_λ — матричная единица в M_{n_λ}.

Лемма 3.2. *Семейство $(e_F)_{F\in\mathscr{F}}$ — аппроксимативная единица в $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Ясно, что e_F — центральный идемпотент в $\mathscr{D}_0$ и $e_{F_1} \le e_{F_2}$ для произвольных конечных множеств $F_1 \subseteq F_2$. Пусть $x \in \mathscr{D}$. Заметим, что $\mathscr{D}_0$ является плотным в $\mathscr{D}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует x_0 в $\mathscr{D}_0$ такой, что $\|x - x_0\| < \varepsilon/2$. Без ограничения общности можно предполагать, что $x_0 = \sum_{\lambda\in F_0} a_\lambda$, где $F_0 \subseteq \Lambda$ — конечное множество и $a_\lambda \in M_{n_\lambda}$. Также для произвольного конечного множества F такого, что $\Lambda \supseteq F \supseteq F_0$, имеем $x_0e_F = e_Fx_0 = x_0$. Следовательно, для $F \supseteq F_0$,

$$\begin{aligned}\|xe_F - x\| &= \|(x-x_0)e_F + x_0e_F - x_0 + x_0 - x\| \le \|(x-x_0)e_F\| + \|x_0e_F - x_0\| + \|x_0 - x\| \\ &= \|(x - x_0)e_F\| + \|x_0 - x\| \le \|(x - x_0)\|\|e_F\| + \|x_0 - x\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Аналогично для $F \supseteq F_0$ выполняется $\|e_Fx - x\| < \varepsilon$, что завершает доказательство.

Доказательство теоремы 3.1 разделим на четыре части.

1. Сначала, для $a \in \mathscr{D}_0$ построим отображение $\theta_0(a)$ на плотное подпространство в H, где $H = \overline{(\pi(\mathscr{A})\Omega)}$. Пусть e — произвольный центральный идем-

потент в $\mathscr{D}_0$. Для $a \in \mathscr{D}_0$ и $P, T \in \mathscr{A}$ имеем

$$(\pi(ae(T))\Omega, \pi(P)\Omega) = (\pi(ea(T))\Omega, \pi(P)\Omega) = (\pi(P)^*\pi(ea(T))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} (\pi(P^* \cdot ea_{(1)}\varepsilon(a_{(2)})(T))\Omega, \Omega) = \sum_{(a)} \varepsilon(a_{(2)})(\pi(P^* \cdot ea_{(1)}(T))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} \varepsilon \cdot S(a_{(2)})(\pi(P^* \cdot ea_{(1)}(T))\Omega, \Omega) = \sum_{(a)} (\pi(S(a_{(2)})(P^* \cdot ea_{(1)}(T)))\Omega, \Omega)\ (\varepsilon \circ S = \varepsilon).$$

Последнее равенство имеет место, поскольку состояние на H является $\mathscr{D}$-инвариантным. Заменяя $P \in \mathscr{A}$ на $b(P) \in \mathscr{A}$, где $b \in \mathscr{D}_0$, получаем

$$(\pi(ae(T))\Omega, \pi(b(P))\Omega) = \sum_{(a)} (\pi(S(a_{(2)})(b(P)^* \cdot ea_{(1)}(T)))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} (\pi(S(a_{(2)})(S(b^*)(P^*) \cdot ea_{(1)}(T)))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} (\pi(S(a_{(3)})S(b^*)(P^*) \cdot S(a_{(2)})ea_{(1)}(T))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} (\pi(S(a_{(3)})S(b^*)(P^*) \cdot S(a_{(2)})a_{(1)}e(T))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} \varepsilon(a_{(1)})(\pi(S(a_{(2)})S(b^*)(P^*) \cdot e(T))\Omega, \Omega)$$
$$= \sum_{(a)} (\pi(S(b^*\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)})(P^*) \cdot e(T))\Omega, \Omega)$$
$$= (\pi(S(b^*a)(P^*) \cdot e(T))\Omega, \Omega) = (\pi((a^*b(P))^* \cdot e(T))\Omega, \Omega) = (\pi(e(T))\Omega, \pi(a^*b(P))\Omega).$$

Таким образом, для $a, b \in \mathscr{D}_0$ и $P, T \in \mathscr{A}$ имеем

$$(\pi(ae(T))\Omega, \pi(b(P))\Omega) = (\pi(ea(T))\Omega, \pi(b(P))\Omega) = (\pi(e(T))\Omega, \pi(a^*b(P))\Omega).$$

Поскольку аппроксимативная единица $(e_F)_{F\in\mathscr{F}}$ лежит в $\mathscr{D}_0$, то $\{\pi(b(P))\Omega \mid b \in \mathscr{D}_0, P \in \mathscr{A}\}$ плотно в H. Из $\pi(e(T))\Omega = 0$ получаем, что $\pi(ae(T))\Omega = 0$. Для $a \in \mathscr{D}_0$ положим

$$\theta_0(a) : \pi(e(T))\Omega \to \pi(ae(T))\Omega,$$

где e — произвольный центральный идемпотент, $\theta_0(a)$ корректно определено на плотном подпространстве $\{\pi(e(T))\Omega \mid T \in \mathscr{A}\}$ в H и удовлетворяет соотношению $\theta_0(a)^* = \theta_0(a^*)$.

2. Во-вторых, построим C*-гомоморфизм $\theta : \mathscr{D} \to L(H)$. Пусть $\pi(T)\Omega \in H$ и $b \in \mathscr{D}_0$. Поскольку $\lim_F \pi(e_F(T))\Omega = \pi(T)\Omega$, то

$$\lim_F (\theta_0(a)(\pi(e_F(T))\Omega), \pi(b(P))\Omega) = \lim_F (\pi(ae_F(T))\Omega, \pi(b(P))\Omega)$$
$$= \lim_F (\pi(e_F(T))\Omega, \pi(a^*b(P))\Omega) = (\pi(T)\Omega, \pi(a^*b(P))\Omega) = (\pi(a(T))\Omega, \pi(b(P))\Omega).$$

Используя принцип равномерной ограниченности, получаем

$$\lim_F \theta_0(a)(\pi(e_F(T))\Omega) = \pi(a(T))\Omega.$$

Таким образом, для $a \in \mathscr{D}_0$ отображение

$$\theta_0(a) : \pi(T)\Omega \to \pi(a(T))\Omega$$

определено корректно на плотном подпространстве $\pi(\mathscr{A})\Omega$ в H. Очевидно, что для $a \in \mathscr{D}_0$ и $T \in \mathscr{A}$ имеет место

$$\|\theta_0(a)(\pi(T)\Omega)\| \leq \|a(\cdot)\|\|\pi(T)\Omega\|$$

(здесь отображение $a(\cdot)$ рассматривается как линейный ограниченный оператор из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$). Следовательно, можно продолжить $\theta_0(a)$ на все пространство представления H по непрерывности так, что $\theta_0(a) \in L(H)$. Также $\mathscr{D}_0$ является плотным в $\mathscr{D}$ и $\theta_0(\cdot)$ может быть продолжено до C*-гомоморфизма $\theta : \mathscr{D} \to L(H)$.

3. Покажем, что гомоморфизм θ имеет требуемые свойства (1) и (2) из теоремы 3.1. Действительно, свойство (1) очевидно; а именно, вакуумный вектор Ω инвариантен. Далее, для $a, b, c \in \mathscr{D}_0$ и $P, T \in \mathscr{A}$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})\pi(T)\theta(S(a_{(2)}))(\pi(c(P))\Omega) &= \sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})\pi(T)(\theta(S(a_{(2)}))(\pi(c(P))\Omega)) \\
= \sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})\pi(T)\pi(S(a_{(2)})(c(P)))\Omega &= \sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})\pi(T \cdot S(a_{(2)})(c(P)))\Omega \\
= \sum_{(a)} \pi(ba_{(1)}(T \cdot S(a_{(2)})(c(P))))\Omega &= \sum_{(a)} \pi(ba_{(1)}(T \cdot S(a_{(2)})(c(P))))\Omega \\
= \sum_{(a)} \pi(ba_{(1)}(T))\pi(a_{(2)}S(a_{(3)})(c(P)))\Omega &= \pi(ba_{(1)}(T))\varepsilon(a_{(2)})\pi(c(P))\Omega \\
&= \pi(ba(T)c(P))\Omega = \theta(b)\pi(a(T)c(P))\Omega,
\end{aligned}$$

откуда

$$\theta(b)\pi(a(T)) = \sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})\pi(T)\theta(S(a_{(2)})).$$

4. Докажем единственность. Пусть существует другой C*-гомоморфизм $\theta' : \mathscr{D} \to L(H)$ со свойствами (1) и (2). А именно, для $a, b \in \mathscr{D}_0$ и $T \in L(H)$ выполнено

$$\theta'(a)\Omega = \varepsilon(a)\Omega, \quad \theta'(b)\pi(a(T)) = \sum_{(a)} \theta'(ba_{(1)})\pi(T)\theta'(S(a_{(2)})).$$

Тогда для $T \in \mathscr{A}$

$$\begin{aligned}
\theta'(a)\theta(b)(\pi(T)\Omega) = \theta'(a)\pi(b(T))\Omega = \sum_{(b)} \theta'(ab_{(1)})\pi(T)\theta'(S(b_{(2)}))\Omega \\
= \sum_{(b)} \theta'(ab_{(1)})\pi(T)\varepsilon(b_{(2)})\Omega = \theta'(ab)(\pi(T)\Omega) = \theta'(a)\theta'(b)(\pi(T)\Omega).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\theta'(a)\theta(b) = \theta'(a)\theta'(b)$ для $a, b \in \mathscr{D}_0$. Поскольку θ является C*-гомоморфизмом, последовательность операторов $\theta(e_F)$ $(F \in \mathscr{F})$ сходится в сильной операторной топологии к тождественному оператору на H. Заменяя $a \in \mathscr{D}_0$ на $e_F \in \mathscr{D}_0$, для $b \in \mathscr{D}$ имеем $\theta(b) = \theta'(b)$ и $\theta = \theta'$, что завершает доказательство.

Теперь установим основной результат статьи, который дает дуальность между $\mathscr{D}$ и $\mathscr{O}$.

Теорема 3.3. *В предположениях и обозначениях теоремы* 3.1

$$\theta(\mathscr{D})' = \theta(\mathscr{D}_0)' = \overline{\pi(O)},$$

где штрих обозначает коммутант, а черта — слабое замыкание в операторной алгебре $L(H)$.

Доказательство. Во-первых, $\theta(a)\pi(P) = \pi(P)\theta(a)$, где $a \in \mathscr{D}_0$ и $P = z(P) \in O$. Действительно, для $b \in \mathscr{D}_0$ и $T \in \mathscr{A}$ выполняется

$$\theta(a)\pi(P)(\pi(b(T))\Omega) = \pi(a(P \cdot b(T)))\Omega = \sum_{(a)} \pi(a_{(1)}(P))\pi(a_{(2)}b(T))\Omega$$
$$= \sum_{(a)} \pi(a_{(1)}z(P))\pi(a_{(2)}b(T))\Omega = \sum_{(a)} \varepsilon(a_{(1)})\pi(P)\pi(a_{(2)}b(T))\Omega$$
$$= \pi(P)\pi(ab(T))\Omega = \pi(P)\theta(a)(\pi(b(T))\Omega).$$

Таким образом, $\theta(a)\pi(P) = \pi(P)\theta(a)$ ($a \in \mathscr{D}_0$). Заметим, что $\mathscr{D}_0$ плотно в $\mathscr{D}$, θ — C*-гомоморфизм, $\theta(x)\pi(P) = \pi(P)\theta(x)$, где $x \in \mathscr{D}$ и $P \in O$. Последнее влечет включения

$$\theta(\mathscr{D}_0)' \supseteq \theta(\mathscr{D})' \supseteq \overline{\pi(O)} \supseteq \pi(O),$$

где штрих обозначает коммутант, а черта — слабое замыкание в $L(H)$.

С другой стороны, предположим, что $P \in \theta(\mathscr{D}_0)'$, т. е. $\theta(a)P = P\theta(a)$ для $a \in \mathscr{D}_0$. Поскольку представление π неприводимо, то $\pi(\mathscr{A})$ слабо замкнуто в $L(H)$. Так как $\theta(\mathscr{D}_0)'$ слабо замкнуто, существует последовательность $\{\pi(P_n)\}$ в $\pi(\mathscr{A}) \cap \theta(\mathscr{D}_0)'$ такая, что $\pi(P_n)$ слабо сходится к P. Докажем, что $P_n \in O$.

Пусть $x \in \mathscr{D}_0$, тогда существует конечное множество $F \in \mathscr{F}$ такое, что $xe_F = e_F x = x$. По теореме 3.1

$$\theta(e_F)\pi(x(P_n)) = \sum_{(x)} \theta(e_F x_{(1)})\pi(P_n)\theta(S(x_{(2)}))$$
$$= \pi(P_n) \sum_{(x)} \theta(e_F x_{(1)})\theta(S(x_{(2)})) = \varepsilon(x)\pi(P_n)\theta(e_F).$$

Следовательно, $x(P) = \varepsilon(x)P$, поскольку представление π является точным. Поэтому $P_n \in O$ и $\theta(\mathscr{D}_0)' \subseteq \overline{\pi(O)}$. Таким образом, $\theta(\mathscr{D})' = \theta(\mathscr{D}_0)' = \overline{\pi(O)}$, что завершает доказательство.

Следствие 3.4. *Пусть H — гильбертово пространство и $L(H)$ является $\mathscr{D}$-модульной алгеброй. Если внутреннее произведение на H является $\mathscr{D}$-инвариантным, т. е. $(a(T)\Omega, \Omega) = \varepsilon(a)(T\Omega, \Omega)$ для $a \in \mathscr{D}$ и $T \in L(H)$, то существует единственный C*-гомоморфизм $\theta : \mathscr{D} \to L(H)$ со свойствами:*

$$\theta(a)(\Omega) = \varepsilon(a)\Omega, \quad \theta(b)a(T) = \sum_{(a)} \theta(ba_{(1)})T\theta(S(a_{(2)}))$$

для любых $a, b \in \mathscr{D}_0$ и $T \in L(H)$, где $ba = \sum_{(a)} ba_{(1)}\varepsilon(a_{(2)})$. Кроме того, положим $O = \{T \in L(H) | z(T) = T\}$. Тогда

$$\theta(\mathscr{D}_0)' = \theta(\mathscr{D})' = O,$$

где штрих означает коммутант в $L(H)$.

Доказательство аналогично доказательствам теорем 3.1 и 3.2. Единственное отличие состоит в том, что в следствии при $P \in \theta(\mathscr{D}_0)'$ можно непосредственно доказать включение $P \in O$ (см. [18]) и потому $\theta(\mathscr{D}_0)' \subseteq O$.

Замечание 3.5. В условиях следствия 3.3 O является алгеброй фон Неймана, в то время как $\theta(\mathscr{D})$ и $\theta(\mathscr{D}_0)$ не являются таковыми. Из следствия 3.4 также можно заключить, что неприводимые представления алгебры O находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми представлениями алгебры $\theta(\mathscr{D})$.

Приведем пример дуальности для конечномерной дискретной квантовой группы. Бесконечномерный случай пока находится в процессе изучения.

Пример 3.6. Пусть S_m — симметрическая группа на множестве $\{1, 2, \dots, m\}$ и $\mathbb{C}S_m$ — групповая алгебра для S_m. Ясно, что $\mathbb{C}S_m$ — дискретная квантовая группа с единственным коинтегральным элементом

$$z = (m!)^{-1} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma.$$

Существует естественное представление ρ из $\mathbb{C}S_m$ на линейное пространство $V^{\otimes m}$:

$$\rho(\sigma)(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_m) = v_{i_{\sigma(1)}} \otimes v_{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(m)},$$

где $\sigma \in S_m$, $1 \le i_j \le n$, и $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — линейный базис в V. При помощи ρ можно получить естественное действие γ из $\mathbb{C}S_m$ на $\mathrm{End}(V^{\otimes m})$ такое, что $\mathrm{End}(V^{\otimes m})$ является $\mathbb{C}S_m$-модульной алгеброй:

$$\sigma(T) = \rho(\sigma) \circ T \circ \rho(\sigma^{-1}),$$

где $\sigma \in S_m$, $T \in \mathrm{End}(V^{\otimes m})$. Согласно теорему Шура — Вейля [10] подалгебра неподвижных точек в $\mathrm{End}(V^{\otimes m})$ — это в точности алгебра, порожденная множеством $\{\pi(g)^{\otimes m} \mid g \in GL(n)\}$, где π — естественное представление общей линейной группы $GL(n)$ на V.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Van Daele A.* Multiplier Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 342, N 2. P. 917–932.
2. *Van Daele A.* Discrete quantum groups // J. Algebra. 1996. V. 180. P. 431–444.
3. *Podles P., Woronowicz S. L.* Quantum deformation of Lorentz group // Comm. Math. Phys. 1990. V. 130, N 2. P. 381–431.
4. *Woronowicz S. L.* Twisted $SU(2)$ group. An example of a non-commutative differential calculus // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1987. V. 23, N 1. P. 117–181.
5. *Woronowicz S. L.* Compact matrix pseudogroups // Comm. Math. Phys. 1987. V. 111, N 4. P. 613–665.
6. *Van Daele A.* An algebraic framework for group duality // Adv. Math. 1998. V. 140, N 2. P. 323–366.
7. *Van Daele A., Zhang Y. H.* Multiplier Hopf algebra of discrete type // J. Algebra. 1999. V. 214. P. 400–417.
8. *Effros E. G., Ruan Z. J.* Discrete quantum group. I. The Haar measure // Int. J. Math. 1994. V. 5, N 5. P. 681–723.
9. *Szlachanyi K., Vecsrenyes P.* Quantum symmetry and braided group statistics in G-spin models // Comm. Math. Phys. 1993. V. 156, N 1. P. 127–168.
10. *Fulton W., Harris J.* Representation theory. New York: Springer-Verl., 1991. (Graduate Texts in Math; V. 129).
11. *Jiang L. N., Wang Z. D.* Schur–Weyl duality between quantum group of type A and Hecke algebra // Adv. Math. (Chinese). 2000. V. 29, N 5. P. 443–456.
12. *Jimbo M.* q-Analogue of $U(gl(n))$, Hecke algebra and the Yang–Baxter equation // Lett. Math. Phys. 1986. V. 11, N 3. P. 247–252.
13. *Abe E.* Hopf algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977.
14. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. New York: Benjamin, 1969.

15. *Soltan P. M.* Quantum Bohr compactification // Illinois J. Math. 2005. V. 49, N 4. P. 1245–1270.
16. *Murphy G. J.* C*-algebras and operator theory. Boston, MA: Acad. Press, 1990.
17. *Jiang L. N., Guo M. Z., Qian M.* The duality theory of a finite dimensional discrete quantum group // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 132, N 12. P. 3537–3547.
18. *Jiang L. N.* Representation and duality of unimodular C*-discrete quantum groups // J. Korean Math. Soc. 2008. V. 45, N 2. P. 575–585.

Статья поступила 7 мая 2007 г.

Цзян Линин (Jiang Lining)
Пекинский технологический институт, Отделение математики. Пекин, Китай
Department of Mathematics,
Beijing Institute of Technology, Beijing, China
jianglining@bit.edu.cn