Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 517.98.22

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ В НОРМИРОВАННОЕ ПРОСТРАНСТВО

С. П. Пономарев, М. Туровска

Аннотация. Доказано, что для любых бесконечномерного нормированного пространства Y и пористого множества $E \subset \mathbb{R}$ существует липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to Y$ такое, что: (a) график f имеет касательную в каждой своей точке; (b) f недифференцируемо в любой точке из E. Продолжено исследование контингенций, представленное в [1].

Ключевые слова: нормированное пространство, контингенция (касательный конус), липшицево отображение, дифференцируемость, регуляризация по Стеклову, пористое множество.

§ 1. Основные определения и предварительные сведения

Напомним основные определения из [1].

Определение 1.1 [2]. Пусть $\varnothing \neq M \subset Z$, где Z — вещественное нормированное пространство, и z — точка в замыкании $\overline{M}$. Множество

$$\{v \in Z : \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}},\ z_n \in M,\ z_n \to z,\ \exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda_n > 0 : \lambda_n(z_n - z) \to v\}$$

называют *касательным конусом* к M в точке z и часто обозначают символом $\mathrm{Tan}(M, z)$. Элементы из $\mathrm{Tan}(M, z)$ называют *векторами, касательными к* M в z. Множество $\mathrm{Tan}(M, z)$ называют также *контингенцией* M в z [3, 4]. Как и в [1], мы будем использовать более короткий термин «контингенция».

Известно, что $\mathrm{Tan}(M, z)$ — непустое замкнутое подмножество Z и $0_Z \in \mathrm{Tan}(M, z)$, где через 0_Z обозначен нулевой вектор пространства Z. Через $G(f)$ будем обозначать график отображения f.

Приведем формулировки леммы 1.2 и теоремы 2.2 из [1], необходимые нам в дальнейшем.

Пусть Y — вещественное бесконечномерное нормированное пространство. Фиксируем последовательность единичных векторов $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n \in Y$, не содержащую никакой сходящейся подпоследовательности. Тогда справедлива

Лемма 1.2 [1, лемма 2.2]. *Пусть даны $y \in Y$ и две последовательности вещественных чисел $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что существует*

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_n y + \beta_n e_n) = \gamma.$$

Тогда

(i) *если $y = 0_Y$, то $\gamma = 0_Y$;*

(ii) *если* $y \neq 0_Y$, *то существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ *и имеет место равенство* $\gamma = \alpha y$;

(iii) *если выполнено условие одного из пп.* (i), (ii), *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$.

Эта лемма будет использована в доказательстве следующего важного вспомогательного утверждения.

Лемма 1.3. *Пусть* Y — *вещественное нормированное бесконечномерное пространство. Фиксируем число* $c > 1$. *Тогда для любого промежутка* $[a, b]$, $a < b$, *существует отображение* $F_{a,b} : [a, b] \to Y$, *обладающее следующими свойствами:*

(F1) $F_{a,b}$ *класса* C^1 *на* (a, b);

(F2) $F_{a,b}$ *липшицево с константой* $L = \frac{c}{c-1}$;

(F3) $F_{a,b}(a) = F_{a,b}(b) = 0_Y$;

(F4) $\mathrm{Tan}(G(F_{a,b}), (a, 0_Y))=\{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\}$, $\mathrm{Tan}(G(F_{a,b}), (b, 0_Y))=\{\xi(1, 0_Y) : \xi \leq 0\}$;

(F5) $F_{a,b}$ *недифференцируемо в точках* a *и* b (*т. е. односторонние производные* $F_{a,b}$ *в точках* a, b *не существуют*).

Доказательство. Фиксируем последовательность единичных векторов $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n \in Y$, не содержащую никакой сходящейся подпоследовательности, и определим $g : [0, 1] \to Y$, полагая

$$g(t) = \begin{cases} \frac{ce_n(t-c^{-3n})}{c-1}, & \text{если } t \in [c^{-3n}, c^{-3n+1}],\ n \in \mathbb{N}, \\ \frac{e_n(t-c^{-3n+2})}{1-c}, & \text{если } t \in [c^{-3n+1}, c^{-3n+2}],\ n \in \mathbb{N}, \\ 0_Y, & \text{если } t \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [c^{-3n+2}, c^{-3n+3}] \cup \{0\}. \end{cases} \tag{1}$$

Заметим, что g кусочно аффинна и непрерывна.

Докажем, что g липшицева с константой $L = \frac{c}{c-1}$ и недифференцируема в точке $t = 0$, тогда как

$$\mathrm{Tan}(G(g), (0, 0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\}. \tag{2}$$

Из (1) непосредственно вытекает, что $\|g'(t)\| = \frac{c}{c-1}$ для $t \in (c^{-3n}, c^{-3n+1})$ и $\|g'(t)\| = \frac{1}{c-1}$ для $t \in (c^{-3n+1}, c^{-3n+2})$. Отсюда легко следует, что g липшицева на $[0, 1]$ с константой $L = \frac{c}{c-1}$.

Так как не существует предела последовательности

$$\frac{g(c^{-3n+1}) - g(0)}{c^{-3n+1}} = \frac{c^{-3n+1}e_n}{c^{-3n+1}} = e_n$$

при $n \to \infty$, заключаем, что g недифференцируема при $t = 0$.

Докажем (2). Пусть (ξ, η) — ненулевой элемент из $\mathrm{Tan}(G(g), (0, 0_Y))$. Тогда найдутся последовательности $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $t_m \in (0, 1]$, $t_m \to 0$, и $(\lambda_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $\lambda_m > 0$, такие, что

$$\lambda_m t_m \to \xi \quad \text{и} \quad \lambda_m g(t_m) \to \eta.$$

Возможны следующие три случая.

(i) Последовательность $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(t_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, элементы которой попадают в промежутки вида $[c^{-3n}, c^{-3n+1}]$. В таком случае существует последовательность $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ натуральных чисел такая, что $t_{m_k} \in [c^{-3n_k}, c^{-3n_k+1}]$. Отсюда

$$\lambda_{m_k} g(t_{m_k}) = \lambda_{m_k} \frac{ce_{n_k}(t_{m_k} - c^{-3n_k})}{c-1} \to \eta$$

при $k \to \infty$. По лемме 1.2 получаем $\eta = 0_Y$.

(ii) Последовательность $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(t_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, элементы которой попадают в промежутки вида $[c^{-3n+1}, c^{-3n+2}]$. Тогда найдется последовательность $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}$ такая, что $t_{m_k} \in [c^{-3n_k+1}, c^{-3n_k+2}]$. Как и в случае (i), получаем, что

$$\lambda_{m_k} g(t_{m_k}) = \lambda_{m_k} \frac{e_{n_k}(t_{m_k} - c^{-3n_k+2})}{1-c} \to \eta.$$

Вновь по лемме 1.2 $\eta = 0_Y$.

(iii) Последовательность $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(t_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, элементы которой попадают в промежутки вида $[c^{-3n+2}, c^{-3n+3}]$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_{m_k} g(t_{m_k}) = 0_Y$. Отсюда снова $\eta = 0_Y$.

Итак,

$$\operatorname{Tan}(G(g), (0, 0_Y)) \subset \{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\}.$$

Для доказательства обратного включения возьмем произвольный вектор $(\xi, 0_Y)$ такой, что $\xi > 0$. Полагая $t_n = c^{-3n+2}$ и $\lambda_n = \xi c^{3n-2}$ для $n \in \mathbb{N}$, имеем $\lambda_n t_n = \xi$ и $\lambda_n g(t_n) = 0_Y$. Следовательно,

$$\{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\} \subset \operatorname{Tan}(G(g), (0, 0_Y)),$$

что завершает доказательство (2).

Следующий шаг состоит в сглаживании отображения $g : [0,1] \to Y$ в достаточно малой окрестности каждой точки c^{-n}, $n \in \mathbb{N}$. Для этого проведем регуляризацию по Стеклову, как это сделано в [1]. А именно, рассмотрим отображение $\varphi : [0,1] \to Y$, определенное следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} g(t), & \text{если } t \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (c^{-n} - 2h_n, c^{-n} + 2h_n), \\ \frac{1}{2h_n} \int\limits_{t-h_n}^{t+h_n} g(\tau)d\tau, & \text{если } t \in [c^{-n} - 2h_n, c^{-n} + 2h_n], \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

где для каждого $n \in \mathbb{N}$ число $h_n > 0$ фиксировано и удовлетворяет соотношению

$$h_n < \delta_n := \frac{c-1}{4c^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поступая так же, как в доказательстве теоремы 2.4 в [1], можем выбрать h_n настолько малой, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \frac{1}{2h_{3n-1}} \int\limits_{c^{-3n+1}-h_{3n-1}}^{c^{-3n+1}+h_{3n-1}} \left(g(\tau) - g(c^{-3n+1})\right) d\tau \right\| < \delta_{3n-1} c^{-3n+1}. \tag{3}$$

Так как

$$\frac{\varphi(c^{-3n+1})}{c^{-3n+1}} = \frac{1}{2h_{3n-1}c^{-3n+1}} \int\limits_{c^{-3n+1}-h_{3n-1}}^{c^{-3n+1}+h_{3n-1}} \left(g(\tau) - g(c^{-3n+1})\right) d\tau + \frac{g(c^{-3n+1})}{c^{-3n+1}} \tag{4}$$

и последний член в (4) равен e_n (см. (1)), заключаем ввиду (3), что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(c^{-3n+1})}{c^{-3n+1}} \quad \text{не существует.} \tag{5}$$

Поскольку g обращается в нуль на промежутках $[c^{-3n+2}, c^{-3n+3}]$, $n \in \mathbb{N}$, отображение φ обращается в нуль на $[c^{-3n+2} + h_{3n-2}, c^{-3n+3} - h_{3n-3}]$ при $n > 1$ и на $[c^{-1} + h_1, 1]$.

Используя те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 2.4 из [1], получаем:

- $\varphi : [0,1] \to Y$ класса C^1 на $(0,1]$;
- φ липшицева с константой $L = \frac{c}{c-1}$;
- φ недифференцируема при $t = 0$;
- $\operatorname{Tan}(G(\varphi), (0, 0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\}$.

Мы опускаем детали во избежание повторений.

Далее рассмотрим отображение $H : [-1,1] \to Y$, определенное следующим образом:

$$H(t) = \begin{cases} \varphi(t+1), & \text{если } t \in [-1,0], \\ \varphi(1-t), & \text{если } t \in [0,1]. \end{cases}$$

Из свойств φ немедленно вытекает, что

(H1) H липшицево с константой $L = \frac{c}{c-1}$;

(H2) H класса C^1 на $(-1,1)$;

(H3) $\operatorname{Tan}(G(H), (1, 0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \leq 0\}$;

(H4) $\operatorname{Tan}(G(H), (-1, 0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\}$;

(H5) H недифференцируемо в точках -1, 1;

(H6) H обращается в нуль на промежутках $[1 - c^{-3n+3} + h_{3n-3}, 1 - c^{-3n+2} - h_{3n-2}]$ и $[c^{-3n+2} + h_{3n-2} - 1, c^{-3n+3} - h_{3n-3} - 1]$ при $n > 1$ и на $[c^{-1} + h_1 - 1, 1 - c^{-1} - h_1]$.

Напомним, что мы рассматриваем отрезок $[a,b]$. Положим $\delta = b - a$. Возможны следующие два случая.

(I) Допустим, что $\delta \leq 2$. Фиксируем $\theta \in (c^{-6}, c^{-3})$ и рассмотрим промежуток $J = \left(1 - \frac{1}{3}\log_c \frac{\delta}{2}, 1 - \frac{1}{3}\log_c \frac{\delta\theta}{2}\right)$. Очевидно, $J \subset (0, \infty)$. Как легко проверить, его длина $|J|$ такова, что $1 < |J| < 2$. Следовательно, для каждого такого промежутка J найдется единственное натуральное число $m \in J$. Имеем

$$\frac{\delta\theta}{2} < c^{-3m+3} < \frac{\delta}{2}. \tag{6}$$

Числа $c > 1$ и $\theta \in (c^{-6}, c^{-3})$ фиксированы, а число m зависит от длины отрезка $[a,b]$. Кроме того, простое вычисление показывает, что m не зависит от выбора $\theta \in (c^{-6}, c^{-3})$.

Определим функцию $F_{a,b} : [a,b] \to Y$, полагая

$$F_{a,b}(t) = \begin{cases} H(t-a-1), & \text{если } t \in [a, a + c^{-3m+3} - h_{3m-3}], \\ H(t-b+1), & \text{если } t \in [b - c^{-3m+3} + h_{3m-3}, b], \\ 0_Y, & \text{если } t \in (a + c^{-3m+3} - h_{3m-3}, b - c^{-3m+3} + h_{3m-3}), \end{cases} \tag{7}$$

где число m выбрано ранее (см. (6)). Из (H6) очевидно, что

$$F_{a,b}(a + c^{-3m+3} - h_{3m-3}) = F_{a,b}(b - c^{-3m+3} + h_{3m-3}) = 0_Y.$$

Более того, из (H1) вытекает, что $F_{a,b}$ липшицева с той же константой L. Из свойств (H3)–(H5) также легко следует, что $F_{a,b}$ недифференцируема в точках a, b и

$$\operatorname{Tan}(G(F_{a,b}), (a, 0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \geq 0\},$$
$$\operatorname{Tan}(G(F_{a,b}), (b, 0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \leq 0\}.$$

Из (7) следует, что $F_{a,b}$ обращается в нуль на промежутке

$$\Delta(a,b) = ((a+b)/2 - r_m, (a+b)/2 + r_m), \tag{8}$$

где $r_m = \frac{\delta}{2} - c^{-3m+3} + h_{3m-3}$. Отметим также, что график $F_{a,b}$ симметричен относительно гиперплоскости $\{\frac{a+b}{2}\} \times Y$.

(II) Случай $\delta > 2$ значительно проще, чем случай (I). Легко проверить, что достаточно определить $F_{a,b} : [a,b] \to Y$ следующим образом:

$$F_{a,b}(t) = \begin{cases} H(t-a-1), & \text{если } t \in [a, a+1], \\ 0_Y, & \text{если } t \in (a+1, b-1), \\ H(t-b+1), & \text{если } t \in [b-1, b]. \end{cases}$$

Наконец, принимая во внимание тот существенный факт, что $F_{a,b}$ составлена из фрагментов отображения H, обладающего свойствами (H1)–(H5), легко показать, что $F_{a,b}$ обладает требуемыми свойствами (F1)–(F5). $\square$

Напомним определение пористого множества. Для $E \subset \mathbb{R}$ и (a,b) обозначим через $\lambda(E,(a,b))$ наибольшую из длин открытых подынтервалов в (a,b), не пересекающихся с E. Положим $\lambda(E,(a,b)) = 0$, если таких подынтервалов нет.

Определение 1.4 [5]. Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Для любого $t \in \mathbb{R}$ величины

$$p(E,t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{\lambda(E,(t-h,t+h))}{2h},$$

$$p^+(E,t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{\lambda(E,(t,t+h))}{h}, \quad p^-(E,t) = \limsup_{h \to 0+} \frac{\lambda(E,(t-h,t))}{h}$$

называют соответственно *пористостью*, *пористостью справа* и *слева множества E в точке t*. Множество E называют *пористым в точке* $t \in \mathbb{R}$, если $p(E,t) > 0$. Очевидно, что E пористое в точке t в том и только в том случае, если хотя бы одна из односторонних пористостей E в t положительна. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называют *пористым*, если оно пористое в каждой своей точке.

Важно отметить, что для любого $t \in E$ имеем $p^+(E,t) = p^+(\overline{E},t)$ и $p^-(E,t) = p^-(\overline{E},t)$.

§ 2. Основные результаты

В этом параграфе покажем, что для заданных пористого множества $E \subset \mathbb{R}$ и нормированного бесконечномерного пространства Y существует липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to Y$, контингенция графика которого в каждой точке есть одномерное подпространство в $\mathbb{R} \times Y$ (иными словами, «прямая»), в то время как f недифференцируемо на E.

Докажем первый из наших основных результатов. Основным инструментом для этого послужат отображения типа $F_{a,b}$, определенные в лемме 1.3.

Теорема 2.1. *Пусть Y — вещественное бесконечномерное нормированное пространство. Тогда для любого пористого множества $E \subset \mathbb{R}$ существует липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to Y$ такое, что*

- *f недифференцируемо в каждой точке из E;*
- *для любого $t \in \mathbb{R}$ контингенция $\operatorname{Tan}\big(G(f), (t, f(t))\big)$ является одномерным подпространством в $\mathbb{R} \times Y$; другими словами, график f имеет касательную в каждой его точке.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что E бесконечно и ограничено (случай неограниченного E рассматривается аналогично).

Представим множество $\mathbb{R}\setminus\overline{E}$ в виде объединения интервалов, смежных с $\overline{E}$:

$$\mathbb{R}\setminus\overline{E} = (-\infty,\alpha)\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}(\alpha_i,\beta_i)\cup(\beta,\infty),$$

где $\alpha = \inf E$, $\beta = \sup E$. Фиксируем $c > 1$ и последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n \in Y$, единичных векторов, не содержащую какой-либо сходящейся подпоследовательности. Определим отображение $f : \mathbb{R} \to Y$, полагая

$$f(t) = \begin{cases} 0_Y, & \text{если } t \in \overline{E}\cup(-\infty,\alpha)\cup(\beta,\infty), \\ F_i(t), & \text{если } t \in [\alpha_i,\beta_i],\ i \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{9}$$

где $F_i = F_{\alpha_i,\beta_i}$ — отображение, определенное в доказательстве леммы 1.3 для $[\alpha_i,\beta_i]$, числа $c > 1$ и последовательности $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Функция f определена корректно, ибо каждое F_i обращается в нуль в точках α_i, β_i. Поскольку F_i липшицево с константой $L = \frac{c}{c-1}$, функция f липшицева с той же константой L.

Докажем, что f недифференцируема в каждой точке $t \in E$.

Пусть $t \in E$. Допустим, что $p^+(E,t) > 0$ и t — правосторонняя точка сгущения для E (а значит, и для $\overline{E}$). Фиксируем произвольное q такое, что $p^+(E,t) > q > 0$. Поскольку $p^+(E,t) = p^+(\overline{E},t)$, найдется последовательность интервалов $((\alpha_{i_n},\beta_{i_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, смежных с $\overline{E}$, такая, что $t < \alpha_{i_n} < \beta_{i_n}$ и $\frac{\beta_{i_n}-\alpha_{i_n}}{\beta_{i_n}-t} > q$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Положим $\delta_{i_n} = \beta_{i_n} - \alpha_{i_n}$ для $n \in \mathbb{N}$. Имеем $\frac{\delta_{i_n}}{\beta_{i_n}-t} > q$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует отображение $F_{i_n} : [\alpha_{i_n},\beta_{i_n}] \to Y$, где $F_{i_n} = F_{\alpha_{i_n},\beta_{i_n}}$ определено в лемме 1.3. Не будет существенным ограничением предположение о том, что $\beta_{i_n} - \alpha_{i_n} \le 2$ для $n \in \mathbb{N}$. По лемме 1.3 получаем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется $k_n \in N$ такой, что $c^{-3k_n+3} \in \left(\frac{\delta_{i_n}}{2}\theta, \frac{\delta_{i_n}}{2}\right)$ (см. (6)), где $\theta \in (c^{-6}, c^{-3})$.

Рассмотрим последовательность $(\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Очевидно, $\alpha_{i_n} < \alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1} < \beta_{i_n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Учитывая свойства F_{i_n} (см. (7)), выводим, что для $n \in \mathbb{N}$

$$f(\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1}) = F_{i_n}(\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1}) = H(c^{-3k_n+1} - 1).$$

Так как $f(t) = 0_Y$, для $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\frac{f(\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1}) - f(t)}{\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1} - t} = \frac{H(c^{-3k_n+1} - 1)}{c^{-3k_n+1}} \cdot \frac{c^{-3k_n+1}}{\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1} - t}. \tag{10}$$

Из (6) вытекает, что

$$\frac{c^{-3k_n+1}}{\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1} - t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{c^{-3k_n+3}}{\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1} - t} > \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\frac{\delta_{i_n}}{2}\theta}{\beta_{i_n} - t} > \frac{\theta}{2c^2} q > 0 \tag{11}$$

для $n \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\frac{H(c^{-3k_n+1} - 1)}{c^{-3k_n+1}} = \frac{\varphi(c^{-3k_n+1})}{c^{-3k_n+1}},$$

в силу (5) получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{H(c^{-3k_n+1}-1)}{c^{-3k_n+1}}$ не существует. Тогда ввиду (11) из (10) следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1}) - f(t)}{\alpha_{i_n} + c^{-3k_n+1} - t}$$

также не существует.

Итак, правой производной f в точке t нет.

Напомним, что представленные выше рассуждения проведены в случае, когда $p^+(E,t) > 0$ и t — правосторонняя точка сгущения для E.

Аналогично поступаем и в случае, когда $p^-(E,t) > 0$, а t — левосторонняя точка сгущения для E. Тогда получаем, что левосторонняя производная f в точке t не существует.

Наконец, если t — изолированная или односторонне изолированная точка E, то t является концом некоторого интервала, смежного с $\overline{E}$. В таком случае недифференцируемость f в точке t вытекает из недифференцируемости F_i на концах отрезка $[\alpha_i, \beta_i]$ (см. (F5) и (9)).

Для завершения первой части доказательства заметим, что пористость множества E существенна в доказательстве недифференцируемости f в каждой точке этого множества.

Заметим также, что f недифференцируема в каждой точке $t \in \overline{E} \setminus E$ с $p(\overline{E}, t) > 0$. Рассуждения в этом случае такие же, как и в случае $t \in E$, так что детали мы опустим.

Докажем теперь, что для любого $t \in \mathbb{R}$ контингенция $\operatorname{Tan}(G(f),(t,f(t)))$ является одномерным подпространством в $\mathbb{R} \times Y$.

Если $t \notin \overline{E}$, то ввиду (9) и (H2) получаем, что контингенция графика f в точке $(t, f(t))$ представляет собой одномерное подпространство в $\mathbb{R} \times Y$, так как f класса C^1 вне $\overline{E}$.

Приступим к доказательству того, что

$$\forall t \in \overline{E} \quad \operatorname{Tan}(G(f),(t,f(t))) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \in \mathbb{R}\}. \tag{12}$$

Напомним, что $f(t) = 0_Y$ для любого $t \in \overline{E}$. Возможны следующие три случая:

(i) t — изолированная точка $\overline{E}$;

(ii) t — лишь односторонне изолированная точка $\overline{E}$;

(iii) t — двусторонняя точка сгущения $\overline{E}$.

В случае (i) из (9) и (H3), (H4) легко вытекает, что

$$\operatorname{Tan}(G(f),(t,0_Y)) = \{\xi(1, 0_Y) : \xi \in \mathbb{R}\}.$$

Рассмотрим случай (ii). Допустим для определенности, что t — точка сгущения множества E лишь справа (тем самым изолированная слева).

Пусть (ξ, v) — ненулевой элемент из $\operatorname{Tan}(G(f),(t,0_Y))$. Тогда $\xi \neq 0$, иначе должно быть $v = 0_Y$, ибо f липшицева.

Пусть $\xi > 0$. Тогда согласно определению 1.1 существуют последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n > t$, $t_n \to t$, и последовательность положительных чисел $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$\lambda_n(t_n - t) \to \xi \text{ и } \lambda_n f(t_n) \to v. \tag{13}$$

Если $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такую, что $f(t_{n_k}) = 0_Y$ при каждом $k \in \mathbb{N}$, то, очевидно, $v = 0_Y$.

Если такой подпоследовательности нет, то $t_n \notin \overline{E}$ и $f(t_n) \neq 0_Y$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется натуральное i_n такое, что $t_n \in (\alpha_{i_n}, \beta_{i_n})$.

Поскольку $f(t_n) \neq 0_Y$ и f обращается в нуль в интервале $\Delta(\alpha_{i_n}, \beta_{i_n})$ (см. (8)), имеем

$$\begin{aligned} t_n &\in (\alpha_{i_n}, \beta_{i_n}) \setminus \Delta(\alpha_{i_n}, \beta_{i_n}) \\ &= (\alpha_{i_n}, \alpha_{i_n} + c^{-3m_n+3} - h_{3m_n-3}) \cup (\beta_{i_n} - c^{-3m_n+3} + h_{3m_n-3}, \beta_{i_n}), \end{aligned}$$

где число m_n, $n \in \mathbb{N}$, определено согласно (6). Отметим также, что $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$, потому что $\beta_{i_n} - \alpha_{i_n} \to 0$. Для определенности будем считать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$t_n \in (\alpha_{i_n}, \alpha_{i_n} + c^{-3m_n+3} - h_{3m_n-3}).$$

Тем самым для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$t_n - \alpha_{i_n} < c^{-3m_n+3} - h_{3m_n-3}. \tag{14}$$

Так как $\lambda_n(t_n - t) \to \xi > 0$, очевидно, можем записать $\lambda_n(t_n - t) = \xi + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_n \to 0$. Поэтому

$$\lambda_n f(t_n) = \frac{(\xi + \varepsilon_n) f(t_n)}{t_n - t} = (\xi + \varepsilon_n) \frac{f(t_n) - f(\alpha_{i_n})}{t_n - \alpha_{i_n}} \cdot \frac{t_n - \alpha_{i_n}}{t_n - t}. \tag{15}$$

Из (9), (7) и (14) получаем, что $f(t_n) = H(t_n - \alpha_{i_n} - 1)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда ввиду (15) и (13) вытекает, что

$$\lambda_n f(t_n) = (\xi + \varepsilon_n) \frac{H(t_n - \alpha_{i_n} - 1)}{t_n - \alpha_{i_n}} \cdot \frac{t_n - \alpha_{i_n}}{t_n - t} \to v \tag{16}$$

при $n \to \infty$. С другой стороны, из свойства (H1) отображения H вытекает, что

$$\left\| \frac{H(t_n - \alpha_{i_n} - 1)}{t_n - \alpha_{i_n}} \right\| \le L = \frac{c}{c-1}.$$

Поскольку $t < \alpha_{i_n} < t_n < \beta_{i_n}$, последовательность $\left(\frac{t_n - \alpha_{i_n}}{t_n - t}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена. Возможны следующие два случая:

(j) последовательность $\left(\frac{t_n - \alpha_{i_n}}{t_n - t}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к 0;

(jj) последовательность $\left(\frac{t_n - \alpha_{i_n}}{t_n - t}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ не содержит подпоследовательности, сходящейся к 0.

В случае (j), когда $\frac{t_{n_k} - \alpha_{i_{n_k}}}{t_{n_k} - t} \to 0$, согласно (16) получаем, что $v = 0_Y$.

В случае (jj) найдется подпоследовательность $\left(\frac{t_{n_k} - \alpha_{i_{n_k}}}{t_{n_k} - t}\right)_{k \in \mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторому $\gamma > 0$. Тогда (16) влечет сходимость

$$\frac{H(t_{n_k} - \alpha_{i_{n_k}} - 1)}{t_{n_k} - \alpha_{i_{n_k}}} \to \frac{v}{\xi\gamma}.$$

Следовательно,

$$(1, v/\xi\gamma) \in \operatorname{Tan}(G(H), (-1, 0_Y)).$$

По свойству (H4) отображения H получаем $\frac{v}{\xi\gamma} = 0_Y$, откуда $v = 0_Y$.

Аналогично можно рассмотреть случай

$$t_n \in (\beta_{i_n} - c^{-3m_n+3} + h_{3m_n-3}, \beta_{i_n})$$

и получить также, что $v = 0_Y$. Мы опустим детали во избежание повторения уже проведенных рассуждений.

Предположим теперь, что для $(\xi, v) \in \operatorname{Tan}(G(f), (t, f(t)))$ будет $\xi < 0$. Так как t — изолированная слева точка E, из (9) и свойства (H3) легко вытекает, что $v = 0_Y$.

Итак, мы доказали, что для каждой точки $t \in \overline{E}$ имеет место следующее включение:

$$\operatorname{Tan}(G(f), (t, f(t))) \subset \{\xi(1, 0_Y) : \xi \in \mathbb{R}\}. \tag{17}$$

Для доказательства обратного включения возьмем вектор $(\xi, 0_Y) \in \mathbb{R} \times Y$. Если $\xi \leq 0$, то снова по (9) и (H3) получим, что

$$(\xi, 0_Y) \in \operatorname{Tan}(G(f), (t, f(t))).$$

Допустим, что $\xi > 0$. Так как $t \in \overline{E}$ — точка сгущения справа для E, существует последовательность $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \in E$, $t_n > t$, сходящаяся к t. Полагая $\lambda_n = \frac{\xi}{t_n - t}$ для $n \in \mathbb{N}$, получим, что $\lambda_n(t_n - t) \to \xi$ и $\lambda_n(f(t_n) - f(t)) \to 0_Y$, потому что $f(t_n) = f(t) = 0_Y$. Следовательно,

$$\{\xi(1, 0_Y) : \xi \in \mathbb{R}\} \subset \operatorname{Tan}(G(f), (t, f(t))). \tag{18}$$

Из (17) и (18) приходим к (12), что и требовалось.

Мы опускаем обсуждение случая (iii), так как он аналогичен случаю (ii).

Наконец, отметим, что в доказательстве существования касательной в каждой точке $G(f)$ использованы только свойства (H1)–(H4) отображения H. $\square$

Сделаем несколько замечаний к теореме 2.1.

В условиях теоремы 2.1 вертикальные касательные (т. е. состоящие из векторов $(0, y)$, $y \neq 0_Y$) невозможны ввиду липшицевости f.

Величина $L = \frac{c}{c-1}$ константы Липшица в нашем доказательстве обусловлена только леммой 1.3. В действительности конкретное значение константы Липшица несущественно в теореме 2.1. В самом деле, очевидно, что если $f : \mathbb{R} \to Y$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, то отображение λf также им удовлетворяет для каждого $\lambda \neq 0$.

Напомним, что в нашем доказательстве контингенция $\operatorname{Tan}(G(f), (t, f(t)))$ горизонтальна для любой $t \in \overline{E}$, т. е. состоит из векторов вида $\xi(1, 0_Y)$, $\xi \in \mathbb{R}$. Это сделано лишь из технических соображений и в общем случае необязательно. Тем самым теорему 2.1 легко обобщить. Для этого потребуется

Теорема 2.2 [1, теорема 3.1, замечание 3.2]. *Пусть X, Y — вещественные нормированные пространства и $U \subset X$ — открытое множество. Пусть $F : U \to Y$, $g : U \to Y$ непрерывны в точке $x_0 \in U$. Допустим, что F дифференцируемо в точке x_0. Тогда*

(a) *$T_{F+g} = \{(u, F'(x_0)u + v) : (u, v) \in T_g\}$ где $T_g := \operatorname{Tan}(G(g), (x_0, g(x_0)))$;*

(b) *T_g гомеоморфно T_{F+g}, где естественный гомеоморфизм $H : T_g \to T_{F+g}$ определяется как $H(u, v) = (u, F'(x_0)u + v)$;*

(c) *если T_g — линейное подпространство $X \times Y$, то H — линейный изоморфизм.*

Теперь приведем обобщение теоремы 2.1.

Теорема 2.3. *Пусть Y — вещественное бесконечномерное нормированное пространство. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — пористое множество и $\Psi : \mathbb{R} \to Y$ всюду дифференцируемо. Тогда существует отображение $W : \mathbb{R} \to Y$, обладающее следующими свойствами:*

(W1) *W недифференцируемо в каждой точке из E;*

(W2) *для любой $t \in \mathbb{R}$ контингенция $\operatorname{Tan}(G(W), (t, W(t)))$ — одномерное подпространство в $\mathbb{R} \times Y$;*

(W3) *$\operatorname{Tan}(G(W), (t, W(t))) = \operatorname{Tan}(G(\Psi), (t, \Psi(t)))$ для любого $t \in \overline{E}$;*

(W4) *если Ψ имеет ограниченную производную, то W может быть выбрано липшицевым.*

Доказательство. Положим $W = f + \Psi$, где f определена в доказательстве теоремы 2.1. Тогда (W1) очевидно. Применяя теорему 2.2 к $F = \Psi$ и $g = f$, получим (W2) и ввиду (12) также (W3). Наконец, если Ψ имеет ограниченную производную, то она липшицева, откуда вытекает (W4), потому что f липшицева. $\square$

Благодарность. Авторы признательны рецензенту за существенные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пономарев С. П., Туровска М.* Липшицевы отображения, контингенции и дифференцируемость // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 837–847.
2. *Schwartz L.* Analyse mathématique. Paris: Hermann, 1967.
3. *Bouligand G.* Introduction à la géométrie infinitésimale directe. Paris: Librairie Vuibert, 1932.
4. *Saks S.* Theory of the integral. Warszawa; Lwów; New York: Stechert, 1937.
5. *Zajíček L.* Porosity and σ-porosity // Real Anal. Exch. 1987–88. V. 13, N 2. P. 314–350.

Статья поступила 2 августа 2007 г., окончательный вариант — 11 мая 2008 г.

Stanislav Ponomarev (Пономарев Станислав Петрович),
Małgorzata Turowska (Туровска Малгожата)
Institute of Mathematics, Pomeranian Academy in Słupsk, Słupsk, Poland
stapon@apsl.edu.pl, turowska@apsl.edu.pl