Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 510.53

РАВНОМЕРНОСТЬ СВОДИМОСТЕЙ ПРОБЛЕМ ПРЕДСТАВИМОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

И. Ш. Калимуллин

Аннотация. Найдены достаточные условия для того, чтобы для счетной алгебраической системы $\mathfrak{B}$, не имеющей степени, существовала счетная система $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами: 1) для каждой изоморфной копии системы $\mathfrak{B}$ существует сводящаяся к ней по Тьюрингу изоморфная копия системы $\mathfrak{A}$; 2) не существует равномерной эффективной процедуры порождения копии системы $\mathfrak{A}$ по заданной копии системы $\mathfrak{B}$, даже обогащенной произвольным конечным набором констант.

Ключевые слова: вычислимость алгебраической структуры, тьюрингова степень, массовая проблема.

1. Введение

Пусть ω — множество натуральных чисел. *Массовой проблемой* (*по Медведеву*) называется произвольная совокупность всюду определенных функций из ω в ω. Элементы массовой проблемы называются также *методами* ее решения. Каждое подмножество ω может рассматриваться как $\{0,1\}$-значная функция на ω. Далее будут рассматривать только массовые проблемы, состоящие из подмножеств ω.

На классе массовых проблем рассматриваются две алгоритмические сводимости. Если A и B — массовые проблемы, то *сильная* (или *равномерная*) *сводимость* $\mathrm{A} \leq_s \mathrm{B}$ имеет место, если существует единая алгоритмическая процедура, порождающая методы из A по произвольному методу из B; более формально, если существует тьюрингов функционал Φ такой, что $\Phi(g) \in \mathrm{A}$ для каждого $g \in \mathrm{B}$.

Слабая (или *неравномерная*) *сводимость* $\mathrm{A} \leq_w \mathrm{B}$ имеет место, если к каждому методу из B может быть применена некоторая алгоритмическая процедура, порождающая метод из A, т. е. для каждого метода $g \in \mathrm{B}$ существует метод $f \in \mathrm{A}$ такой, что $f \leq_T g$.

В данной работе изучаются различия данных двух сводимостей на классе массовых проблем представимости счетных алгебраических систем: если $\mathfrak{A}$ — счетная алгебраическая система с вычислимой сигнатурой Σ, то

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) = \{D(\mathfrak{C}) \mid \mathfrak{C} \cong \mathfrak{A} \,\&\, \mathrm{dom}(\mathfrak{C}) \subseteq \omega\}$$

является *проблемой представимости* системы $\mathfrak{A}$. Здесь через $D(\mathfrak{C})$ обозначена атомная диаграмма системы $\mathfrak{C}$; так как универсум $\mathrm{dom}(\mathfrak{C})$ есть подмножество

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00605) и гранта Президента Российской Федерации (проект МК–4314.2008.1).

натуральных чисел, мы можем отождествить формулы из $D(\mathfrak{C})$ с натуральными числами при помощи фиксированной нумерации формул в расширенной сигнатуре $\Sigma^* = \Sigma \cup \omega$.

Слабая сводимость проблем представимости тесно связана с понятием спектра степеней систем:

$$\mathbf{Sp}(\mathfrak{A}) = \{\deg(C) \mid (\exists \mathfrak{C} \cong \mathfrak{A})[\mathrm{dom}(\mathfrak{C}) \subseteq \omega \,\&\, D(\mathfrak{C}) \leq_T C]\}.$$

Ясно, что для систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеем

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}) \iff \mathbf{Sp}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathbf{Sp}(\mathfrak{A}).$$

Если спектр степеней $\mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$ имеет наименьший элемент $\mathbf{b}$, то говорят, что система $\mathfrak{B}$ *имеет степень* $\mathbf{b}$. Будем говорить, что система $\mathfrak{B}$ *имеет j-степень* $\mathbf{b}$, если степень $\mathbf{b}$ является наименьшим тьюринговым скачком степеней из $\mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$.

Из работы А. И. Стукачева [1] следует, что если система $\mathfrak{B}$ имеет степень, то слабые и сильные сводимости к проблеме представимости системы $\mathfrak{B}$ эквивалентны с точностью до обогащения системы $\mathfrak{B}$ конечным числом констант. А именно, существует такой конечный набор $\vec{b}$ элементов системы $\mathfrak{B}$, что для любой массовой проблемы P имеет место

$$\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}) \implies \mathrm{P} \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b}).$$

Цель настоящей статьи — установить, что данный результат невозможно распространить на произвольные счетные системы $\mathfrak{B}$. Следующая теорема утверждает, что приведенное выше свойство системы $\mathfrak{B}$ на самом деле эквивалентно тому, что $\mathfrak{B}$ имеет степень.

Теорема 1. *Если счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$ не имеет степени, то существует массовая проблема P такая, что $\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{P} \nleq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathrm{dom}(\mathfrak{B})$.*

Проблема P не является, вообще говоря, проблемой представимости какой-либо системы. Однако если система имеет j-степень (и не имеет степени), то в качестве P можно взять некоторую проблему представимости.

Теорема 2. *Если счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$ имеет j-степень и не имеет степени, то существует счетная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \nleq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathrm{dom}(\mathfrak{B})$.*

Ясно, что если система $\mathfrak{B}$ имеет низкую изоморфную копию (т. е. $\mathbf{b}' = \mathbf{0}'$ для некоторой степени $\mathbf{b} \in \mathbf{S}p\,(\mathfrak{B})$), то степень $\mathbf{0}'$ является j-степенью системы $\mathfrak{B}$.

Следствие 1. *Если счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$ имеет низкую изоморфную копию и не имеет степени, то существует счетная алгебраическая система $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \nleq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathrm{dom}(\mathfrak{B})$.*

Будем говорить, что система $\mathfrak{B}$ *имеет e-степень*, если существует множество $B \subseteq \omega$ такое, что

$$\mathbf{Sp}(\mathfrak{B}) = \{\deg(C) \mid B \text{ является } C\text{-в.п.}\}.$$

Степень по перечислимости (e-степень) множества B называется в этом случае *e-степенью* системы $\mathfrak{B}$. Легко видеть, что система $\mathfrak{B}$ имеет степень тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ имеет тотальную e-степень. Вместе с тем нетрудно показать, что тьюрингова степень, соответствующая скачку e-степени системы $\mathfrak{B}$, будет являться j-степенью системы $\mathfrak{B}$.

Следствие 2. *Если счетная алгебраическая система* $\mathfrak{B}$ *имеет нетотальную е-степень, то существует счетная алгебраическая система* $\mathfrak{A}$ *такая, что* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ *и* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{A}) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ *для любого конечного набора* $\vec{b}$ *элементов из* $\mathrm{dom}(\mathfrak{B})$.

В работе используются терминология и обозначения из монографии [2]. В частности, через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается вычислимая биекция между $\omega \times \omega$ и ω. Через Pr_1 обозначается проекция по первой компоненте функции $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\mathrm{Pr}_1(z) = \mu x[(\exists y)[z = \langle x, y \rangle]], \quad \mathrm{Pr}_1(Z) = \{\mathrm{Pr}_1(z) \mid z \in Z\}$$

для всех $z \in \omega$ и $Z \subseteq \omega$.

Биекция $\oplus$ между $2^\omega \times 2^\omega$ и 2^ω задается соотношением

$$A \oplus B = \{2x \mid x \in A\} \cup \{2x + 1 \mid x \in B\}.$$

Запись $X =^* Y$ означает, что симметрическая разность $X \vartriangle Y$ конечна. В частности, $F =^* \varnothing$ тогда и только тогда, когда множество F конечно.

Фиксируя гёделеву нумерацию тьюринговых функционалов $\Phi_n, n \in \omega$, действующих из 2^ω в множество частичных функций на ω, обозначим через $W_n(Z)$ область определения частичной функции $\Phi_n(Z)$. Тогда для каждого $Z \in 2^\omega$ множества $W_n(Z)$, $n \in \omega$, пробегают все Z-в.п. множества. Тьюринговым скачком $\mathbf{x}'$ степени $\mathbf{x} = \deg(X)$ является степень множества $X' = \{n \in \omega \mid n \in W_n(X)\} = \{n \in \omega \mid \Phi_n(X; n)\downarrow\}$.

2. Доказательства основных результатов

Доказательства теорем 1 и 2 будут основаны на следующем утверждении.

Предложение 1. *Пусть счетная алгебраическая система* $\mathfrak{B}$ *не имеет степени, причем* $\mathrm{dom}\,(\mathfrak{B}) \subseteq \omega$ *и* $\deg(D(\mathfrak{B})) \leq_T B$ *для некоторого множества* $B \subseteq \omega$. *Тогда существует последовательность множеств* $X_n \subseteq \omega$, $n \in \omega$, *удовлетворяющая следующим утверждениям:*

(1) *если* $\mathrm{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\}$, *то для каждого конечного набора* $\vec{b}$ *элементов из* $\mathfrak{B}$ *имеет место* $\mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b}) \leq_s \mathrm{X}$; *в частности,* $\deg(X_n) \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$ *для каждого* n;

(2) *для каждого множества* $X \subseteq \omega$, $\deg(X) \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$, *существует не более одного* $n \in \omega$, *для которого имеет место* $X \leq_T X_n$;

(3) *существует вычислимая функция* f *такая, что* $X_n' = \Phi_{f(n)}(B')$ *для всех* $n \in \omega$;

Доказательство предложения 1 будет проведено в следующем разделе. Первых двух пунктов из этого предложения достаточно, чтобы доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1. Пусть X_n $(n \in \omega)$ — последовательность из предложения 1. Определим массовую проблему

$$\mathrm{P} = \{Y \subseteq \omega \mid (\forall n \in \omega)[Y \neq W_n(X_n)]\},$$

соответствующую проблеме вычисления какого-нибудь множества, не совпадающего ни с одним из множеств $W_n(X_n)$, $n \in \omega$.

Докажем, что $\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Пусть $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Тогда X является атомной диаграммой системы $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$, в частности, $\deg(X) \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$ и $\overline{X} \equiv_e X$ (перечисляя множество истинных формул, можно перечислить множество ложных формул, и наоборот).

Предположим, что $X =^* W_n(X_n)$ и $\overline{X} =^* W_m(X_m)$ для некоторых $n, m \in \omega$. Тогда $X \leq_T X_n$ и $X \leq_T X_m$, откуда получаем $n = m$ по утверждению (2) предложения 1. Следовательно, $W_n(X_n) =^* \overline{W_n(X_n)}$, что невозможно. Значит, существует множество $Y \in \{X, \overline{X}\}$, не совпадающее (даже с точностью до конечного числа элементов) ни с одним из множеств вида $W_n(X_n)$, $n \in \omega$. (Отметим, что указать такое множество равномерно по данному X мы не можем.) Ясно, что $Y \in \mathrm{P}$ и $Y \leq_T X$. Таким образом, $\mathrm{P} \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$.

Приведем к противоречию предположение о том, что $\mathrm{P} \leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для некоторого конечного набора $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$. Действительно, в силу утверждения (1) предложения 1 отсюда следовало бы, что $\mathrm{P} \leq_s \mathrm{X} \overset{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\}$. Фиксируем тьюрингов функционал Φ такой, что $\Phi(X_n) \in \mathrm{P}$ для каждого $n \in \omega$. Пусть $n_0 \in \omega$ — индекс такой, что $W_{n_0}(X) = \Phi(X)$ для каждого $X \subseteq \omega$. В частности, $W_{n_0}(X_{n_0}) = \Phi(X_{n_0})$, что противоречит утверждению $\Phi(X_{n_0}) \in \mathrm{P}$. $\square$

Доказательство теоремы 2 будет основано также на кодировании семейств подмножеств ω в алгебраические системы из работы [3]. А именно, определим для произвольного множества $A \subseteq \omega$ граф $\mathfrak{G}(A)$, состоящий из одной узловой вершины и циклов длины $n+2$ для каждого $n \in A$. Каждый такой цикл проходит через узловую вершину, причем не существует другой, отличной от узловой, вершины, принадлежащей двум разным циклам. Если дано счетное семейство $\mathscr{S}$ подмножеств ω, то счетный граф $\mathfrak{G}^\infty(\mathscr{S})$ получается объединением бесконечного числа непересекающихся копий графов $\mathfrak{G}(A)$ для каждого $A \in \mathscr{S}$.

Будем говорить, что семейство $\mathscr{S}$ *задается* множеством $Z \subseteq \omega$, если

$$\mathscr{S} = \{Z^{(x)} \mid x \in \omega\},$$

где $Z^{(x)} = \{y \in \omega \mid \langle x, y\rangle \in Z\}$. Тогда совокупность

$$\mathrm{E}(\mathscr{S}) = \{R \subseteq \omega \mid \mathscr{S} \text{ задается множеством } \mathrm{Pr}_1(R)\}$$

называется *проблемой перечислимости семейства* $\mathscr{S}$.

Лемма 1. *Для каждого счетного семейства $\mathscr{S}$ подмножеств ω имеет место* $\mathrm{E}(\mathscr{S}) \equiv_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{G}^\infty(\mathscr{S}))$.

Доказательство. Лемма 3.6 из [3] утверждает, что для множества $X \subseteq \omega$ граф $G^\infty(\mathscr{S})$ тогда и только тогда имеет X-вычислимую изоморфную копию, когда существует X-в.п. множество, задающее семейство $\mathscr{S}$. Ясно, что последнее условие эквивалентно X-вычислимости некоторого $R \in \mathrm{E}(\mathscr{S})$. Следовательно, имеем $\mathrm{E}(\mathscr{S}) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{G}^\infty(\mathscr{S}))$ и $\mathrm{Pres}(\mathfrak{G}^\infty(\mathscr{S})) \leq_w \mathrm{E}(\mathscr{S})$. Поскольку доказательство леммы 3.6 из [3] конструктивно и равномерно, каждую из этих сводимостей можно заменить сильной. $\square$

Пусть дана нумерация множеств $\nu : \omega \to 2^\omega$. Определим семейство конечных подмножеств ω:

$$\mathscr{F}(\nu) = \{\{n\} \oplus F \mid n \in \omega \,\&\, F \subseteq \omega \,\&\, F =^* \varnothing \,\&\, F \neq \nu(n)\},$$

и массовую проблему

$$\mathrm{Q}(\nu) = \{R \subseteq \omega \mid (\forall n \in \omega)[(\mathrm{Pr}_1(R))^{(n)} \neq \nu(n)]\},$$

соответствующую проблеме эффективного перечисления какого-нибудь не равного $\nu(n)$ множества по данному n.

Лемма 2. *Для любой нумерации множеств* $\nu : \omega \to 2^\omega$ *имеет место* $\mathrm{Q}(\nu) \leq_s \mathrm{E}(\mathscr{F}(\nu))$.

Доказательство. Пусть Ψ — тьюрингов функционал такой, что

$$\Psi(R;n) = \mathrm{Pr}_1((\mu\langle x,y\rangle)[\langle\langle x,2n\rangle,y\rangle \in R])$$

для всех $R \subseteq \omega$ и $n \in \omega$. Определяя тьюрингов функционал Φ так, что

$$\Phi(R) = \{\langle\langle n,z\rangle,y\rangle : \langle\langle\Psi(R;n),2z+1\rangle,y\rangle \in R\},$$

для всех $R \subseteq \omega$ будем иметь

$$R \in \mathrm{E}(\mathscr{F}(\nu)) \implies \Phi(R) \in \mathrm{Q}(\nu).$$

(Если $\mathscr{F}(\nu)$ задается множеством $\mathrm{Pr}_1(R)$, то $x = \Psi(R;n)$ такое число, что $(\mathrm{Pr}_1(R))^{(x)} = \{n\} \oplus F_{R,n} \in \mathscr{F}(\nu)$ для некоторого множества $F_{R,n} \neq \nu(n)$. Множество $\Phi(R)$ определено таким образом, что $(\mathrm{Pr}_1(\Phi(R)))^{(n)} = F_{R,n}$.) $\square$

Для нумерации $\nu : \omega \to 2^\omega$ и множества $X \subseteq \omega$ будем писать $\nu \leq_T X$, если $\{\langle n,m\rangle \mid m \in \nu(n)\} \leq_T X$.

Лемма 3. *Если для нумерации множеств* $\nu : \omega \to 2^\omega$ *и множества* $Y \subseteq \omega$ *имеет место* $\nu \leq_T Y'$ *и* $Y \neq^* \nu(n)$ *для всех* $n \in \omega$, *то* $\mathscr{F}(\nu)$ *задается некоторым* Y*-в.п. множеством.*

Доказательство. Пусть D_j, $j \in \omega$, — стандартная сильно вычислимая нумерация всех конечных множеств и $A \vartriangle B$ обозначает симметрическую разность множеств A и B. Из условий леммы следует, что множество $(Y \cup D_j) \vartriangle \nu(n)$ непусто для каждого $n \in \omega$.

По лемме о пределе существует функция $p \leq_T Y$ такая, что для всех $n \in \omega$

$$\nu(n) = \lim_s D_{p(n,s)}$$

(т. е. $\nu(n) = \bigcup_t \bigcap_{s>t} D_{p(n,s)}$ и $\overline{\nu(n)} = \bigcup_t \bigcap_{s>t} \overline{D_{p(n,s)}}$). Тогда Y-вычислимая функция

$$\ell(n,j,s) = (\mu z)[z = s \text{ или } z \in (Y \cup D_j) \vartriangle D_{p(n,s)}]$$

всегда имеет конечный предел $\lim_s \ell(n,j,s)$, причем

$$\lim_s \ell(n,j,s) \in (Y \cup D_j) \vartriangle \nu(n)$$

для всех $n,j \in \omega$. Отметим, что если

$$U_{n,j} = D_j \cup \{z \in Y \mid (\exists s)[z \leq \ell(n,j,s)]\},$$

то $D_j \subseteq U_{n,j}$ и $\varnothing =^* U_{n,j} \neq \nu(n)$ для всех $n,j \in \omega$. Тогда можем определить Y-в.п. множество Z таким, что

$$Z^{(\langle\langle n,j\rangle,t\rangle)} = \begin{cases} \{n\} \oplus D_j, & \text{если } D_j \neq D_{p(n,s)} \text{ для всех } s \geq t, \\ \{n\} \oplus U_{n,j} & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для всех $\langle\langle n,j\rangle,t\rangle$. Нетрудно убедиться, что Z задает семейство $\mathscr{F}(\nu)$. $\square$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathbf{b} = \deg(B) \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$ такая степень, что $\mathbf{b}' = \deg(B')$ — j-степень системы $\mathfrak{B}$. Тогда существует изоморфная копия $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$, такая, что $\mathrm{dom}(\mathfrak{C}) \subseteq \omega$ и $D(\mathfrak{C}) \leq_T B$. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно считать, что $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$.

Пусть X_n $(n \in \omega)$ — последовательность из предложения 1, соответствующая системе $\mathfrak{B}$ и множеству B.

Рассмотрим нумерацию множеств

$$\delta(n) = W_n(X_n).$$

Из утверждения (3) предложения 1 следует, что $\delta \leq_T B'$. По лемме 1 мы можем положить $\mathfrak{A} = \mathfrak{G}^\infty(\mathscr{F}(\delta))$, если удастся установить, что $\mathrm{E}(\mathscr{F}(\delta)) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{E}(\mathscr{F}(\delta)) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для всех конечных наборов $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$.

Докажем, что $\mathrm{E}(\mathscr{F}(\delta)) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Пусть $X \in \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$. Используя рассуждения из доказательства теоремы 1, фиксируем множество $Y \in \{X, \overline{X}\}$ такое, что

$$Y \neq^* \delta(n) = W_n(X_n)$$

для всех $n \in \omega$.

Ясно, что $\deg(Y) = \deg(X) \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$. Поскольку $\deg(B')$ является j-степенью системы $\mathfrak{B}$, имеем $\delta \leq_T B' \leq_T Y'$. По лемме 3 $\mathscr{F}(\delta)$ задается Y-в.п. множеством Z. Фиксируем $R \leq_T Y$ такое, что $Z = \mathrm{Pr}_1(R)$. Тогда $R \in \mathrm{E}(\mathscr{F}(\delta))$. Таким образом, $\mathrm{E}(\mathscr{F}(\delta)) \leq_w \mathrm{Pres}(\mathfrak{B})$.

Докажем, что $\mathrm{E}(\mathscr{F}(\delta)) \not\leq_s \mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b})$ для любого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathfrak{B}$. В силу предложения 1 (утверждение (1)) и леммы 2 для этого достаточно установить, что $\mathrm{Q}(\delta) \not\leq_s \mathrm{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\}$.

Предположим, что $\mathrm{Q}(\delta) \leq_s \mathrm{X}$, и пусть Φ — тьюрингов функционал такой, что $\Phi(X_n) \in \mathrm{Q}(\delta)$ для каждого $n \in \omega$. По теореме параметризации существует такая вычислимая функция s, что

$$W_{s(n)}(X) = (\mathrm{Pr}_1(\Phi(X)))^{(n)}$$

для каждого X и n. По теореме рекурсии существует такое n_0, что

$$W_{s(n_0)}(X) = W_{n_0}(X)$$

для каждого X. В частности,

$$(\mathrm{Pr}_1(\Phi(X_{n_0})))^{(n_0)} = W_{s(n_0)}(X_{n_0}) = W_{n_0}(X_{n_0}) = \delta(n_0),$$

что противоречит утверждению $\Phi(X_{n_0}) \in \mathrm{Q}(\delta)$. $\square$

3. Доказательство предложения 1

Пусть дана счетная алгебраическая система $\mathfrak{B}$, не имеющая степени, такая, что $\mathrm{dom}(\mathfrak{B}) \subseteq \omega$ и $\deg(D(\mathfrak{B})) \leq_T B$. Построим множества $X_n \subseteq \omega$, $n \in \omega$, для которых будут выполнены условия:

(1) для каждого конечного набора $\vec{b}$ элементов из $\mathfrak{B}$ имеет место

$$\mathrm{Pres}(\mathfrak{B}, \vec{b}) \leq_s \mathrm{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X_n \mid n \in \omega\};$$

(2) для каждого множества $X \subseteq \omega$, $\deg(X) \in \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$, существует не более одного $n \in \omega$, для которого имеет место $X \leq_T X_n$;

(3) существует вычислимая функция f такая, что $X_n' = \Phi_{f(n)}(B')$ для всех $n \in \omega$;

Множества X_n, $n \in \omega$, будут иметь вид $X_n = A_n \oplus F_n$, где каждое множество A_n является атомной диаграммой некоторой системы $\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{B}$, $\mathrm{dom}(\mathfrak{B}_n) = \omega$, а F_n — графиком частичной функции f_n.

Множество A_n будет строиться одновременно с изоморфизмом $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$. Требования

$$T_{n,b} : g_n(b) \in \mathrm{dom}(\mathfrak{B}_n)$$

для всех $n \in \omega$ и $b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{B})$ гарантируют, что каждая функция g_n определена на всем $\mathfrak{B}$. Из требований

$$S_{n,c} : (\exists b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{B}))[g_n(b) = c],$$

где $n, c \in \omega$, следует, что $\mathrm{dom}(\mathfrak{B}_n)$ целиком содержится в области значений функции g_n.

Для выполнения условия (1) фиксируем сначала вычислимую нумерацию всех конечных наборов натуральных чисел $\alpha : \omega \mapsto \omega^{<\omega}$ такую, что каждому набору соответствует бесконечное множество номеров. Теперь достаточно удовлетворить требованиям

$$P_{\vec{b}} : (\exists k \in \omega)(\forall n \in \omega)[\alpha(f_n(k)) = (g_n(b_0), \dots, g_n(b_{r-1}))]$$

для каждого конечного набора $\vec{b} = (b_0, \dots, b_{r-1})$ из $\mathfrak{B}$. Действительно, пусть дан конечный набор $\vec{b}$ из $\mathfrak{B}$. Фиксируем $k \in \omega$ из требования $P_{\vec{b}}$. Тогда любое множество $X_n \in \mathrm{X}$ имеет вид $D(\mathfrak{B}_n) \oplus \mathrm{graph}(f_n)$, где $\mathfrak{B}_n \cong \mathfrak{B}$, причем значение $\alpha(f_n(k))$ является набором элементов из $\mathfrak{B}_n$, соответствующим набору $\vec{b}$ относительно изоморфизма $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$, т. е. по данному $X_n \in \mathrm{X}$ мы можем равномерно построить $(\mathfrak{B}_n, \alpha(f_n(k))) \cong (\mathfrak{B}, \vec{b})$.

Для выполнения условия (2) нужно удовлетворить требованиям

$$N_{\Phi,\Psi,n,m} : \Phi(X_n) = \Psi(X_m) \text{ всюду определены} \implies \deg(\Phi(X_n)) \notin \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$$

для всех тьюринговых функционалов Φ, Ψ и произвольных пар $n \neq m$.

В ходе построения будет определен предикат $A(s, n, \sigma)$, где $n, s \in \omega$ и $\sigma \in 2^{<\omega}$ — начальный сегмент (если $A(s, n, \sigma)$, то будем говорить, что σ является *n-допустимым на шаге s*). Предикат $A(n, s, \sigma)$ будет обязательно иметь место, если σ есть начальный сегмент множества X_n. Кроме того, для каждого s мы сможем с помощью оракула B' эффективно указать индекс B-вычислимой перечислимости множества $\{\langle n, \sigma\rangle \mid A(s, n, \sigma)\}$, т. е. должна существовать такая функция $h \leq_T B'$, что для всех $n, s \in \omega$ и $\sigma \in 2^{<\omega}$ справедливо

$$A(s, n, \sigma) \iff \langle n, \sigma\rangle \in W_{h(s)}(B).$$

Наше построение множеств X_n, $n \in \omega$, будет равномерно вычислимым относительно B'. Поэтому для выполнения условия (3) достаточно удовлетворить требования генеричности

$$G_{n,e} : (\exists \sigma \subseteq X_n)(\exists s \in \omega)[\Phi_e(\sigma; e)\downarrow \vee (\forall \tau \supseteq \sigma)[A(n, s, \tau) \implies \Phi_e(\tau; e)\uparrow]]$$

для всех $n, e \in \omega$. Действительно, чтобы узнать, верно ли $e \in X'_n$, можно B'-вычислимо найти $\sigma \subseteq X_n$ и $s \in \omega$ из требования $G_{n,e}$. Если $\Phi_e(\sigma; e)\downarrow$, то, очевидно, $\Phi_e(X_n; e)\downarrow$ и $e \in X'_n$. Если же $\Phi_e(\tau; e)\uparrow$ для всех n-допустимых сегментов $\tau \supseteq \sigma$ на шаге s, то $\Phi_e(X_n; e)\uparrow$ и, следовательно, $e \notin X'_n$. Изложенная выше B'-вычислимая процедура вычисления X'_n равномерна по n, поэтому существует такая вычислимая функция f, что $X'_n = \Phi_{f(n)}(B')$ для всех $n \in \omega$.

Пусть $R_0, R_1, R_2 \dots$ — упорядочение всех имеющихся требований $T_{n,b}$, $S_{n,c}$, $P_{\vec{b}}$, $N_{\Phi,\Psi,n,m}$ и $G_{n,e}$, вычислимое относительно B (ибо $\mathrm{dom}(\mathfrak{B}) \leq_T D(\mathfrak{B}) \leq_T B$).

Описанное ниже пошаговое построение определяет множества D_n посредством их начальных сегментов $\delta_n[s]$, множества $F_n = \mathrm{graph}(f_n)$ — посредством их начальных сегментов $\varphi_n[s]$, а изоморфизмы $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$ — посредством частичных функций $\psi_n[s]$, определенных на конечной части $\mathrm{dom}(\mathfrak{B})$.

Будем говорить, что $\sigma \in 2^{<\omega}$ *однозначен*, если σ является начальным сегментом графика некоторой частичной функции. Для начального сегмента $\sigma \in 2^{<\omega}$ определим $\sigma^0, \sigma^1 \in 2^{<\omega}$ как начальные сегменты наибольшей длины такие, что для всех $A, B \subseteq \omega$ имеет место

$$\sigma \subseteq A \oplus B \implies \sigma^0 \subseteq A \,\&\, \sigma^1 \subseteq B.$$

На шаге s полагаем предикат $A(s, n, \sigma)$ истинным и говорим, что σ *n-допустим на шаге s*, если

1) σ^1 — сравнимый с $\varphi_n[s]$ однозначный начальный сегмент;

2) σ^0 — сравнимый с $\delta_n[s]$ начальный сегмент атомной диаграммы некоторой системы $\widehat{\mathfrak{B}}$, $\mathrm{dom}(\widehat{\mathfrak{B}}) = \omega$, для которой существует изоморфизм $\hat{g}_n : \mathfrak{B} \to \widehat{\mathfrak{B}}$, расширяющий частичную функцию $\psi_n[s]$.

Нетрудно видеть, что, зная начальные сегменты $\varphi_n[s]$, $\delta_n[s]$ и конечную функцию $\psi_n[s]$, мы можем, используя оракул $D(\mathfrak{B}) \leq_T B$, перечислить все пары $\langle n, \sigma\rangle$ такие, что $A(s, n, \sigma)$. Более того, оракул B' позволяет указать такие конечный набор $\vec{b}_s$ элементов из $\mathfrak{B}$ и гёделев номер вычислимой функции r_s, значениями которой являются номера экзистенциональных предложений языка системы $(\mathfrak{B}, \vec{b}_s)$, что для всех $\langle n, \sigma\rangle$ имеет место

$$A(s, n, \sigma) \iff r_s(n, \sigma) \in \mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{B}, \vec{b}_s).$$

Тем более для предиката $A(s, n, \sigma)$ будет существовать упомянутая выше функция $h \leq_T B'$.

На каждом шаге s функция $\psi_n[s]$ будет определена таким образом, что для некоторой системы $\mathfrak{B}_n[s]$, $\mathrm{dom}(\mathfrak{B}_n[s]) = \omega$, $\delta_n[s] \subseteq D(\mathfrak{B}_n)$, существует изоморфизм $g_n[s] : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n[s]$, расширяющий $\psi_n[s]$. Ясно, что система $\mathfrak{B}_n[s]$ и изоморфизм $g_n[s]$, если таковые существуют, могут быть алгоритмически найдены с использованием оракула B'.

Построение.

Шаг $s = 0$. Полагаем $\varphi_n[0]$, $\delta_n[0]$ и $\psi_n[0]$ пустыми.

Шаг $s + 1$. Удовлетворяем требование R_s.

Случай 1: $R_s = G_{n,e}$. С помощью оракула B' выясняем, существует ли начальный сегмент σ такой, что $A(s, n, \sigma)$ и $\Phi_e(\sigma; e)\downarrow$. Если такого σ не существует, то полагаем $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s]$, $\delta_n[s+1] = \delta_n[s]$, $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$. Если имеется такой σ, то положим $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s] \cup \sigma^1$, $\delta_n[s+1] = \delta_n \cup \sigma^0$, $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$. (Отметим, что $\delta_n[s+1] \in \{\delta_n[s], \sigma^0\}$, так что снова существует система $\widehat{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_n[s+1]$ такая, что $\mathrm{dom}(\widehat{\mathfrak{B}}) = \omega$, $\delta_n[s+1] \subseteq D(\widehat{\mathfrak{B}})$, для которой существует изоморфизм $\widehat{g}_n : \mathfrak{B} \to \widehat{\mathfrak{B}}$, расширяющий $\psi_n[s+1] = \psi_n[s]$.)

В любом случае полагаем $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ при $k \neq n$ и $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ для всех k.

Случай 2: $R_s = N_{\Phi,\Psi,n,m}$, $n \neq m$. С помощью оракула B' выясняем, существуют ли начальные сегменты σ_n и σ_m такие, что $A(s, n, \sigma_n)$, $A(s, m, \sigma_m)$ и

$$\Phi(\sigma_n; x)\downarrow \neq \Psi(\sigma_m; x)\downarrow$$

для некоторого $x \in \omega$. Если таких σ_n и σ_m не существует, то полагаем $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s]$, $\delta_n[s+1] = \delta_n[s]$, $\varphi_m[s+1] = \varphi_m[s]$ и $\delta_m[s+1] = \delta_m[s]$.

Если имеются такие σ_n и σ_m, то положим $\varphi_n[s+1] = \varphi_n[s] \cup \sigma_n^1$, $\delta_n[s+1] = \delta_n[s] \cup \sigma_n^0$, $\varphi_m[s+1] = \varphi_m[s] \cup \sigma_m^1$ и $\delta_m[s+1] = \delta_m[s] \cup \sigma_m^0$.

В любом случае полагаем $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ при $k \neq n, m$, и $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ для всех k.

Случай 3: $R_s = P_{n,b}$. Если значение $\psi_n[s](b)$ не определено, то пусть $\psi_n[s+1] = \psi_n[s] \cup \{\langle b, g_n[s](b)\rangle\}$. В противном случае $\psi_n[s+1] = \psi_n[s]$.

В любом случае полагаем $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ при $k \neq n$, $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$, $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ для всех k.

Случай 4: $R_s = S_{n,c}$. Если не существует $b \in \mathfrak{B}$ такого, что $\psi_n[s](b) = c$, то пусть $\psi_n[s+1] = \psi_n[s] \cup \{\langle b, c\rangle\}$, где b таково, что $g_n[s](b) = c$. В противном случае $\psi_n[s+1] = \psi_n[s]$.

В любом случае полагаем $\psi_k[s+1] = \psi_k[s]$ при $k \neq n$, $\varphi_k[s+1] = \varphi_k[s]$ и $\delta_k[s+1] = \delta_k[s]$ для всех k.

Случай 5: $R_s = P_{\vec{b}}$ для $\vec{b} = (b_0, \dots, b_{r-1})$. Найдем такое достаточно большое $k \in \omega$, что не существует таких $m, n \in \omega$, что $\varphi_n[s](\langle k, m\rangle) = 1$. Тогда для каждого $n \in \omega$ начальный сегмент $\varphi_n[s+1]$ задается конкатенацией $\varphi_n[s]$ с подходящим сегментом вида $0 \dots 01$ так, что $\varphi_n[s+1](\langle k, m_n\rangle) = 1$ и $\alpha(m_n) = (g_n[s](b_1), \dots, g_n[s](b_{r-1}))$; такое m_n существует, поскольку прообраз каждого набора относительно α бесконечен. Кроме того, для каждого $n \in \omega$ определим $\psi_n[s+1] = \psi_n[s] \cup \{\langle b_i, g_n[s](b_i)\rangle : i < r\}$ и $\delta_n[s+1] = \delta_n[s]$.

Описание построения завершено.

Определим $A_n = \bigcup\limits_s \delta_n[s]$, $F_n = \bigcup\limits_s \varphi_n[s]$, $g_n = \bigcup\limits_s \psi_n[s]$ для каждого n.

Нетрудно убедиться, что по построению для каждого n множество D_n является атомной диаграммой некоторой системы $\mathfrak{B}_n$ такой, что $\mathrm{dom}(\mathfrak{B}_n) = \omega$ и $g_n : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}_n$ — изоморфизм алгебраических систем. Кроме того, описание случая 1 построения обеспечивает выполнение всех требований $G_{n,e}$.

Пользуясь индукцией, отметим также, что на каждом шаге построения имеется такое $k \in \omega$, для которого $\varphi_n[s](\langle k, m\rangle) \neq 1$ для всех $m, n \in \omega$. Поэтому все требования $P_{\vec{b}}$ оказываются выполненными (случай 5).

Осталось убедиться в выполнении каждого требования $R_s = N_{\Phi,\Psi,n,m}$, $n \neq m$. Предположим, что $\Phi(X_n) = \Psi(X_m)$, причем обе части равенства всюду определены. Нужно установить, что $\deg(\Phi(X_n)) \notin \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$.

Из построения следует, что если для сегментов σ_n и σ_m и некоторого $x \in \omega$ имеют место соотношения $A(s, n, \sigma_n)$, $A(s, m, \sigma_m)$, $\Phi(\sigma_n; x)\downarrow$ и $\Psi(\sigma_m; x)\downarrow$, то необходимо $\Phi(\sigma_n; x) = \Psi(\sigma_m; x)$. Так как каждый предикат $A(s, k, \sigma)$, $k \in \omega$, выполнен для любого начального семейства множества X_n, для любых $x, y \in \omega$ имеем

$$\Phi(X_n, x) = y \iff (\exists \sigma)[A(s, n, \sigma) \text{ и } \Phi(\sigma; x)\downarrow = y].$$

Кроме того, по определению предиката $A(s, n, \sigma)$ существует конечный набор $\vec{b}_s$ элементов из $\mathfrak{B}$ такой, что для некоторой вычислимой функции r_s имеет место

$$A(s, n, \sigma) \iff r_s(n, \sigma) \in \mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{B}, \vec{b}_s)$$

для всех $\langle n, \sigma\rangle$. Таким образом,

$$\Phi(X_n; x) = y \iff (\exists \sigma)[r_s(n, \sigma) \in \mathrm{Th}_\exists(\mathfrak{B}, \vec{b}_s) \text{ и } \Phi(\sigma; x)\downarrow = y]$$

для всех $x, y \in \omega$. Отсюда следует, что $\Phi(X_n) \leq_T D(\mathfrak{C})$ для произвольной системы $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{B}$ такой, что $\mathrm{dom}(\mathfrak{C}) \subseteq \omega$. Поэтому $\deg(\Phi(X_n)) \notin \mathbf{Sp}(\mathfrak{B})$, так как иначе $\deg(\Phi(X_n))$ являлась бы степенью системы $\mathfrak{B}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стукачев А. И.* О степенях представимости моделей. I // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 763–788.

2. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees: A study of computable functions and computably generated sets. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1987.

3. *Goncharov S. S., Harizanov V. S., Knight J. F., McCoy C., Miller R. G., Solomon R.* Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 136, N 3. P. 219–246.

Статья поступила 28 мая 2008 г.

Калимуллин Искандер Шагитович
Казанский гос. университет,
механико-математический факультет, кафедра алгебры и математической логики,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
`Iskander.Kalimullin@ksu.ru`