Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 514.76

ТЭТА–ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ КОДАИРЫ —– ТЕРСТОНА

Д. В. Егоров

Аннотация. Строится аналог классической тэта-функции на абелевом многообразии для нильмногообразия Кодаиры — Терстона, которая определяется как сечение (не голоморфное) специального линейного комплексного расслоения над многообразием Кодаиры — Терстона. Введенные тэта-функции используются для канонического симплектического вложения многообразия Кодаиры — Терстона в комплексное проективное пространство (аналог теоремы Лефшеца).

Ключевые слова: тэта-функция, многообразие Кодаиры — Терстона, симплектическое вложение.

1. Введение

В работе мы строим аналог классической тэта-функции на абелевом многообразии для нильмногообразия Кодаиры — Терстона M_{KT}. Классическая тэта-функция, как известно, с геометрической точки зрения является сечением линейного голоморфного расслоения над комплексным тором. Тэта-функция многообразия Кодаиры — Терстона определяется как сечение (не голоморфное) специального линейного комплексного расслоения L над M_{KT}.

Аналоги тэта-функций для нильмногообразий уже определялись ранее [1, 2], однако эти обобщения исходили из теории представлений. Мы же строим аналог тэта-функций с характеристиками, задающими каноническое симплектическое вложение M_{KT} в комплексное проективное пространство (аналог теоремы Лефшеца).

Многообразие Кодаиры — Терстона M_{KT} является фактор-многообразием $\mathbb{R}^4$ по действию дискретной группы Γ, которая задается следующими образующими:

$$\begin{aligned} a &: (x, y, z, t) \to (x+1, y, z+y, t), \\ b &: (x, y, z, t) \to (x, y+1, z, t), \\ c &: (x, y, z, t) \to (x, y, z+1, t), \\ d &: (x, y, z, t) \to (x, y, z, t+1). \end{aligned} \tag{1}$$

Многообразие Кодаиры — Терстона замечательно тем, что оно является первым известным примером симплектического, но не кэлерова многообразия [3].

Заметим, что данное вложение M_{KT} в $\mathbb{CP}^n$ не может быть голоморфным, так как многообразие M_{KT} не кэлерово. Тем не менее мы докажем, что оно симплектическое. Другими словами, форма Фубини — Штуди на $\mathbb{CP}^n$ индуцирует симплектическую структуру на многообразии M_{KT}.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00094–a).

В п. 2 мы напоминаем необходимые сведения из классической теории тэта-функций, в п. 3 даем определение тэта-функции на многообразии M_{KT} и изучаем некоторые ее свойства, в п. 4 строим вложение M_{KT} в комплексное проективное пространство (теорема 1) и в п. 5 доказываем симплектичность вложения (теорема 2).

Автор благодарит И. А. Тайманова за постановку задачи и А. Е. Миронова за полезные обсуждения.

2. Классическая тэта-функция

Напомним некоторые известные факты о тэта-функции Якоби на одномерном комплексном торе. Рассмотрим формальный ряд

$$\theta(z,\tau) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikz+\pi ik(k-1)\tau}.$$

При $\operatorname{Im}\tau > 0$ он сходится в любой компактной области в $\mathbb{C}$ и определяет целую функцию. В обозначениях [4] эта тэта-функция принимает вид

$$\exp(-\pi i\tau/4 + \pi iz)\theta_{-1/2,0}(z,\tau).$$

Наш выбор именно этой тэта-функции связан с тем, что она инвариантна относительно сдвига периода на единицу: $\tau \to \tau + 1$. Это свойство тэта-функции понадобится в дальнейшем.

Тэта-функция ведет себя при сдвигах следующим образом:

$$\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau), \tag{2}$$

$$\theta(z+\tau,\tau) = \exp(-2\pi iz)\theta(z,\tau). \tag{3}$$

Обобщением тэта-функции является тэта-функция степени k, где k — натуральное число. *Тэта-функция степени* k — это целая функция на $\mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами периодичности:

$$\theta_k(z+1,\tau) = \theta_k(z,\tau), \quad \theta_k(z+\tau,\tau) = e^{-2\pi ikz}\theta_k(z,\tau).$$

Несложно убедиться, что тэта-функции степени k образуют линейное пространство размерности k. Обозначим его через $\mathscr{L}_k$.

При перемножении тэта-функций можно получить тэта-функцию более высокой степени. Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ — набор констант такой, что их сумма равна нулю. Тогда произведение

$$\prod_{i=1}^{k}\theta(z+\alpha_i,\tau) \in \mathscr{L}_k$$

является тэта-функцией степени k.

Тэта-функция равна нулю в точке $z = 1/2$. В фундаментальной области решетки $\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ находится единственный с учетом кратности нуль.

Тэта-функция удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial\theta(z,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{4\pi i}\frac{\partial^2\theta(z,\tau)}{\partial z^2} - \frac{\theta(z,\tau)}{2}. \tag{4}$$

Пусть $\left\{\theta_k^p(z,\tau)\right\}_{p=1}^k$ — базис в пространстве тэта-функций степени k. Тогда отображение, записанное в однородных координатах:

$$\varphi_k(z) = \left[\theta_k^1(z,\tau) : \dots : \theta_k^k(z,\tau)\right],$$

является корректно определенным отображением комплексного тора в $\mathbb{CP}^{k-1}$.

Имеет место теорема Лефшеца, верная для абелевых торов любой размерности: при $k \geq 3$ отображение φ_k является вложением.

3. Определение тэта-функции многообразия Кодаиры — Терстона

Многообразие M_{KT} расслаивается над двумерным тором T^2 при проекции

$$(x, y, z, t) \to (y, t).$$

Слои являются также двумерными торами.

Левоинвариантная симплектическая форма $\omega_{KT} = (dz - x\,dy) \wedge dx + dy \wedge dt$ совместна со структурой расслоения. Это значит, что ω_{KT} является суммой двух форм. Ограничение формы $(dz - x\,dy) \wedge dx$ на любой слой невырожденно, а форма $dy \wedge dt$ является образом симплектической формы на базе при проектировании.

Исходя из этих фактов, определим пространство тэта-функций степени $k \in \mathbb{N}$ на многообразии M_{KT} как линейную оболочку попарных произведений обыкновенных базисных тэта-функций степени k на слое и на базе:

$$\theta_k^p(z + ix, y + i)\theta_k^q(y + it, i), \quad p, q = 1, \dots, k.$$

Обозначим данное пространство через $\mathscr{L}_k$. Заметим, что размерность данного пространства равна k^2.

Тэта-функцию степени один будем обозначать через

$$\theta_{KT}(x, y, z, t) = \theta(z + ix, y + i)\theta(y + it, i).$$

3.1. Тэта-функция — сечение линейного комплексного расслоения. Тэта-функция на многообразии M_{KT} обладает определенным поведением при сдвигах из группы Γ с образующими (1):

$$\begin{aligned} \theta_{KT}(x + 1, y, z + y, t) &= \exp(-2\pi i(z + ix))\theta_{KT}(x, y, z, t), \\ \theta_{KT}(x, y + 1, z, t) &= \theta_{KT}(x, y, z, t), \\ \theta_{KT}(x, y, z + 1, t) &= \theta_{KT}(x, y, z, t), \\ \theta_{KT}(x, y, z, t + 1) &= \exp(-2\pi i(y + it))\theta_{KT}(x, y, z, t). \end{aligned} \tag{5}$$

Из этих формул следует, что тэта-функция является сечением линейного комплексного расслоения над многообразием M_{KT}, которое получается при факторизации $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$ по действию группы Γ:

$$(u, w) \sim (\lambda \cdot u, e_\lambda(u)w), \quad u \in \mathbb{R}^4,\ w \in \mathbb{C},\ \lambda \in \Gamma,$$

где $e_\lambda(u)$ — мультипликаторы, т. е. ненулевые функции $e_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^*$, удовлетворяющие тождествам

$$e_\lambda(\mu \cdot u)e_\mu(u) = e_{\lambda\mu}(u),\ \lambda, \mu \in \Gamma, \quad e_0(u) = 1.$$

Сечения расслоения, заданного мультипликаторами, находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями f на $\mathbb{R}^4$ такими, что

$$f(\lambda \cdot u) = e_\lambda(u)f(u), \quad \lambda \in \Gamma,\ u \in \mathbb{R}^4.$$

При этом необходимо проверить выполнение соотношений в группе Γ и для мультипликаторов. Образующие (1) группы Γ связаны одним нетривиальным соотношением

$$c = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Это означает, что мультипликаторы линейного комплексного расслоения над M_{KT} должны удовлетворять следующему тождеству:

$$e_c(u) = \frac{e_b(u)e_a(b \cdot u)}{e_b(b^{-1}ab \cdot u)e_a(c \cdot u)}, \quad u \in \mathbb{R}^4.$$

Легко проверить, что мультипликаторы (5) удовлетворяют этому тождеству.

3.2. Мультипликативное свойство θ_{KT}. Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ — набор констант. Как и для классической тэта-функции, нам хотелось, чтобы произведение $\prod_{i=1}^{k} \theta(z + \alpha_i, \tau)$ было тэта-функцией степени k при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0. \tag{6}$$

Данное свойство тэта-функции ключевое при доказательстве теоремы о вложении в комплексное проективное пространство. Однако у θ_{KT} период зависит от аргумента функции. Мы не можем перемножить тэта-функции со сдвинутыми периодами и получить тэта-функцию степени k. Поэтому мы не будем сдвигать периоды. Более формально, введем действие $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in \mathbb{C}^2$:

$$(\zeta\theta_{KT})(x, y, z, t) = \theta(z + ix + \zeta^1, y + i)\theta(y + it + \zeta^2, i).$$

Тогда, как нетрудно убедиться, при выполнении условия (6), произведение

$$\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i \theta_{KT})(x, y, z, t) \in \mathscr{L}_k \tag{7}$$

является тэта-функцией степени k.

4. Вложение M_{KT} в комплексное проективное пространство

Перенумеруем базисные тэта-функции пространства $\mathscr{L}_k$: $\{s_i\}_{i=1}^{k^2}$. Тогда отображение $\varphi_k = (s_1, s_2, \ldots, s_{k^2})$ будет корректно построенным отображением многообразия M_{KT} в $\mathbb{CP}^{k^2-1}$.

Теорема 1. *Отображение φ_k является вложением при $k \geq 3$.*

Доказательство. Докажем теорему для $k = 3$. При $k > 3$ доказательство аналогичное.

Сначала установим инъективность отображения φ_k. Здесь мы будем следовать доказательству классической теоремы Кодаиры о вложении для алгебраических многообразий (см. ее изложение, например, в [5, гл. 1, § 4]).

Прежде всего заметим, что пространство тэта-функций степени k состоит из глобальных сечений k-й тензорной степени расслоения, заданного мультипликаторами (5).

Если для любых точек $u \neq v \in M_{KT}$ существует сечение $s \in \mathscr{L}_k$ такое, что $s(u) = 0$ и $s(v) \neq 0$, то отображение φ_k инъективно. Действительно, допустим отображение «склеивает» точки u и v. Это значит, что для всех сечений $s \in \mathscr{L}_k$ верно, что $s(v) = \zeta s(u)$, где ζ — некоторая ненулевая константа. Если s — сечение, удовлетворяющее вышеуказанному условию, то приходим к противоречию.

Также заметим, что при выполнении данного условия верно, что для любой точки $u \in M_{KT}$ не все сечения обращаются в нуль в точке u.

Будем подбирать требуемую тэта-функцию степени 3 в виде произведения двух функций $s = f \cdot g$:

$$f(x, y, z, \alpha, \beta) = \theta(z + ix + \alpha, y + i)\theta(z + ix + \beta, y + i)\theta(z + ix - \alpha - \beta, y + i), \quad (8)$$

$$g(y, t, \gamma, \delta) = \theta(y + it + \gamma, i)\theta(y + it + \delta, i)\theta(y + it - \gamma - \delta, i). \quad (9)$$

Из (7) следует, что функция $f \cdot g$ действительно является тэта-функцией степени 3 на многообразии M_{KT}.

Обозначим координаты точек u, v через (x, y, z, t) и (x', y', z', t') соответственно. Выберем γ так, что $\theta(y + it + \gamma, i) = 0$. Теперь подберем δ так, что остальные сомножители в определении функции g не равны нулю в точке v:

$$\theta(y' + it' + \delta, i)\theta(y' + it' - \gamma - \delta, i) \neq 0.$$

Мы можем этого добиться, так как нули тэта-функции изолированные. Малым шевелением α, β можно добиться отличия от нуля функции f в точке v.

Построенное сечение решит задачу, если $\theta(y' + it' + \gamma, i) \neq 0$. Допустим, что это так. Так как у тэта-функции в фундаментальной области решетки, образованной ее периодами, единственный нуль, отсюда следует, что $y = y'$, $t = t'$. Последние равенства понимаются по модулю решетки, и без ограничения общности можно считать, что u, v находятся в фундаментальной области, а именно единичном кубе, $0 \leq x, y, z, t < 1$.

Выберем α так, что $\theta(z + ix + \alpha, y + i) = 0$. Тогда $\theta(z' + ix' + \alpha, y' + i) \neq 0$, ибо иначе $u = v$. Подберем β так, что $f(v) \neq 0$, и γ, δ так, что $g(v) \neq 0$.

Мы построили необходимое сечение и доказали инъективность отображения φ_k.

Докажем, что ранг φ_k максимален. Будем следовать доказательству теоремы Лефшеца, изложенному в [6]. Сначала покажем, что ранг отображения максимален, если максимален ранг (над $\mathbb{C}$) следующей матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{k^2} \\ \partial_x s_1 & \dots & \partial_x s_{k^2} \\ \partial_y s_1 & \dots & \partial_y s_{k^2} \\ \partial_z s_1 & \dots & \partial_z s_{k^2} \\ \partial_t s_1 & \dots & \partial_t s_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что отображение φ_k, записанное в однородных координатах, является композицией отображения $\widetilde{\varphi}_k$ в $\mathbb{C}^{k^2}$ и дальнейшей проекции $\pi : \mathbb{C}^{k^2} \backslash \{0\} \to \mathbb{CP}^{k^2-1}$. Очевидно, дифференциал $\widetilde{\varphi}_k$ совпадает с подматрицей J, получающейся при вычеркивании первой строки.

Теперь допустим, что в точке $u \in M_{KT}$ первая строка J есть линейная комбинация остальных. Это означает, что радиус-вектор $\widetilde{\varphi}_k(u)$ коллинеарен образу некоторого касательного вектора в точке u. Так как π проецирует вдоль комплексных прямых, проходящих через начало координат, ядро дифференциала π как раз и состоит из таких векторов. Следовательно, максимальность ранга матрицы J является необходимым и достаточным условием максимальности ранга φ_k.

Преобразуем матрицу J к удобному для нас виду. Ранг следующей матрицы совпадает с рангом J:

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{k^2} \\ (\partial_y - i\partial_t)s_1 & \dots & (\partial_y - i\partial_t)s_{k^2} \\ (\partial_z - i\partial_x)s_1 & \dots & (\partial_z - i\partial_x)s_{k^2} \\ (\partial_y + i\partial_t)s_1 & \dots & (\partial_y + i\partial_t)s_{k^2} \\ (\partial_z + i\partial_x)s_1 & \dots & (\partial_z + i\partial_x)s_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Последние две строки $\widetilde{J}$ формируют условия Коши — Римана. Так как сечения s_j голоморфны относительно $z + ix$, последняя строка $\widetilde{J}$ всегда нулевая.

Предположим, что ранг $\widetilde{J}$ (над $\mathbb{C}$) в некоторой фиксированной точке $u = u^* = (x^*, y^*, z^*, t^*) \in M_{KT}$ меньше 4. Это означает, что существует нетривиальный набор констант a, b, c, d такой, что

$$as_j(u^*) + \frac{b}{2}(\partial_y - i\partial_t)s_j(u^*) + \frac{c}{2}(\partial_z - i\partial_x)s_j(u^*) + \frac{d}{2}(\partial_y + i\partial_t)s_j(u^*) = 0,\ j = 1, \dots, k^2.$$

Из (7) следует, что функция

$$s(u, \mu, \nu) = (\mu\theta_{KT})(u)(\nu\theta_{KT})(u)((-\mu - \nu)\theta_{KT})(u)$$

лежит в $\mathscr{L}_k$ ($k = 3$) при любых μ, ν. Значит, она раскладывается по базису s_j, и для нее верно равенство

$$as(u^*, \mu, \nu) + \frac{b}{2}(\partial_y - i\partial_t)s(u^*, \mu, \nu) + \frac{c}{2}(\partial_z - i\partial_x)s(u^*, \mu, \nu) + \frac{d}{2}(\partial_y + i\partial_t)s(u^*, \mu, \nu) = 0. \quad (10)$$

Введем обозначение

$$L = \frac{b}{2}(\partial_y - i\partial_t) + \frac{c}{2}(\partial_z - i\partial_x) + \frac{d}{2}(\partial_y + i\partial_t)$$

и перепишем равенство (10) в виде

$$L \log(\mu\theta_{KT})(u^*) = -a - L\log(\nu\theta_{KT})(u^*) - L\log((-\mu - \nu)\theta_{KT})(u^*). \quad (11)$$

Для любых u, μ существует ν такое, что

$$(\nu\theta_{KT})(u)((-\mu - \nu)\theta_{KT})(u) \neq 0. \quad (12)$$

Из (11), (12) следует, что

$$\xi(\mu) = L\log(\mu\theta_{KT})(u^*) \quad (13)$$

является целой функцией от $\mu = (\mu^1, \mu^2)$. Согласно (5) функция $\xi(\mu)$ удовлетворяет следующим условиям периодичности:

$$\xi(\mu^1 + 1, \mu^2) = \xi(\mu^1, \mu^2), \quad (14)$$

$$\xi(\mu^1 + y^* + i, \mu^2) = \xi(\mu^1, \mu^2) - 2\pi ic, \quad (15)$$

$$\xi(\mu^1, \mu^2 + 1) = \xi(\mu^1, \mu^2), \quad (16)$$

$$\xi(\mu^1, \mu^2 + i) = \xi(\mu^1, \mu^2) - 2\pi ib. \quad (17)$$

Следовательно, производные $\partial_{\mu^j}\xi$ — целые двоякопериодические функции. Это означает, что они постоянны, и $\xi = \alpha\mu^1 + \beta\mu^2 + \gamma$. Из (14), (16) получаем, что $\alpha = \beta = 0$ и функция ξ постоянна. Из (15), (17) вытекает, что $b = c = 0$. Тогда

$$\xi(\mu) = \frac{d}{2}\left[\frac{\partial_y\theta(z+ix+\mu^1, y+i)}{\theta(z+ix+\mu^1, y+i)}\right]_{u=u^*} = \gamma. \tag{18}$$

Здесь мы неявно использовали условия Коши — Римана:

$$(\partial_y + i\partial_t)\theta(y+it, i) = 0.$$

Обозначим через D дифференцирование по переменной $z+ix$, т. е. $D = \frac{1}{2}(\partial_z - i\partial_x)$. Из (4) следует, что

$$\partial_y\theta(z+ix, y+i) \equiv \frac{1}{4\pi i}(D^2\theta)(z+ix, y+i) - \frac{1}{2}(D\theta)(z+ix, y+i). \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18) и учитывая, что

$$(D\theta)(z+ix+\mu^1, y+i) = \partial_{\mu^1}\theta(z+ix+\mu^1, y+i),$$

получим, что функция $\theta(z^*+ix^*+\mu^1, y^*+i)$ как функция от μ^1 удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d}{4\pi i}\theta'' - \frac{d}{2}\theta' - 2\gamma\theta = 0.$$

Выписав общее решение, можно легко убедиться, что это приводит к противоречию с условиями периодичности тэта-функции (5) и, значит, $d = \gamma = 0$. Из (10) следует, что $a = 0$.

Тем самым набор постоянных a, b, c, d тривиален и матрица $\widetilde{J}$ имеет максимальный ранг. Так как точка u^* выбрана произвольной, ранг φ_k всюду равен четырем. Теорема доказана.

Замечание. Интересно исследовать связь этой тэта-функции с какими-либо нелинейными уравнениями в духе получения солитонных уравнений из тождеств секущих для многообразий Якоби [6].

5. Симплектичность

Многообразие M_{KT} является симплектическим многообразием, где симплектическая форма может быть, к примеру, задана следующей левоинвариантной 2-формой: $\omega_{KT} = (dz - x\,dy)\wedge dx + dy\wedge dt$. В этом разделе мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. 1. *При $k \geq 3$ отображение φ_k индуцирует симплектическую структуру на многообразии M_{KT}.*

2. *Индуцированная симплектическая форма когомологична $k\cdot\omega_{KT}$.*

Доказательство. В определении отображения φ_k выберем в качестве базисных тэта-функций из $\mathscr{L}_k$ следующие функции:

$$\theta_k^p(z+ix, y+i)\cdot\theta_k^q(y+it, i), \quad p, q = 1, \dots, k.$$

Отображение φ_k является композицией отображения Сегре $\sigma_k : \mathbb{CP}^{k-1}\times\mathbb{CP}^{k-1}\to\mathbb{CP}^{k^2-1}$, которое задается в однородных координатах формулой

$$\sigma_k([z^1:\dots:z^k],[w^1:\dots:w^k]) = [z^1w^1 : z^1w^2 : \dots : z^kw^{k-1} : z^kw^k],$$

и отображения $\psi_k : M_{KT} \to \mathbb{CP}^{k-1} \times \mathbb{CP}^{k-1}$, $\psi_k = (\psi'_k, \psi''_k)$, где

$$\psi'_k(x,y,z) = \big[\theta^1_k(z+ix, y+i) : \dots : \theta^k_k(z+ix, y+i)\big],$$

$$\psi''_k(y,t) = \big[\theta^1_k(y+it, i) : \dots : \theta^k_k(y+it, i)\big].$$

Итак, $\varphi_k = \sigma_k \circ \psi_k$. Обозначим через Ω' симплектическую форму (ассоциированную с метрикой Фубини — Штуди) на первом сомножителе $\mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^k$, через Ω'' — на втором. Тогда $\Omega' + \Omega''$ является симплектической формой на произведении. Так как отображение Сегре — голоморфное вложение, достаточно доказать, что индуцированная форма $\psi^*_k(\Omega' + \Omega'')$ симплектическая.

Заметим, что базис алгебры левоинвариантных форм можно выбрать в следующем виде: $dx, dy, dz - x\,dy, dt$.

Отображение ψ''_k является голоморфным вложением комплексного тора в $\mathbb{CP}^k$ из классической теоремы Лефшеца, и, значит, форма Фубини — Штуди индуцирует симплектическую форму на торе: $(\psi''_k)^*(y,t)(\Omega'') = \alpha \cdot dy \wedge dt$, где функция α нигде на M_{KT} не равна нулю.

Пусть

$$(\psi'_k)^*(x,y,z)(\Omega') = f \cdot (dz - x\,dy) \wedge dx + g \cdot (dz - x\,dy) \wedge dy + h \cdot dx \wedge dy.$$

Здесь f, g, h — некоторые функции на M_{KT}. Это общий вид 2-формы на M_{KT}, индуцированной отображением, зависящим от x, y, z.

Для любого фиксированного y отображение ψ'_k также является голоморфным вложением из теоремы Лефшеца и, следовательно,

$$(\psi'_k)^*(\Omega') = \beta \cdot dz \wedge dx,$$

где функция β нигде на M_{KT} не равна нулю. Отсюда следует, что $f \equiv \beta$. В итоге получим

$$\begin{aligned}(\psi^*_k(\Omega' + \Omega''))^2 &= ((\psi'_k)^*(\Omega') + (\psi''_k)^*(\Omega''))^2 \\ &= (\beta \cdot (dz - x\,dy) \wedge dx + g \cdot (dz - x\,dy) \wedge dy + h \cdot dx \wedge dy + \alpha \cdot dy \wedge dt)^2.\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, имеем

$$(\psi^*_k(\Omega' + \Omega''))^2 = 2\alpha\beta \cdot dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

Последнее равенство эквивалентно условию невырожденности индуцированной формы. Замкнутость следует из того, что дифференциал коммутирует с ψ^*_k. Следовательно, $\psi^*_k(\Omega' + \Omega'')$ является замкнутой и невырожденной, т. е. симплектической, формой. Мы доказали п. 1 утверждения теоремы.

Докажем п. 2. Обозначим через L расслоение, заданное мультипликаторами (5). При доказательстве вложения мы отмечали, что тэта-функции степени k являются сечениями $L^{\otimes k}$.

Вспомним, что любое линейное комплексное расслоение над многообразием M индуцируется универсальным расслоением над $\mathbb{CP}^n$ при отображении M в комплексное проективное пространство. Следовательно, расслоение $L^{\otimes k}$ и его форма кривизны суть образы универсального расслоения и его формы кривизны, которая представляют собой форму Фубини — Штуди. Также вспомним, что первый класс Чжэня линейных расслоений реализуется именно формой кривизны. Следовательно, когомологический класс индуцированной формы совпадает с первым классом Чжэня $c_1(L^{\otimes k}) = k \cdot c_1(L)$, и нам нужно доказать, что

$$c_1(L) = [(dz - x\,dy) \wedge dx + dy \wedge dt].$$

Воспользуемся теорией когомологий Чеха, для того чтобы вычислить $c_1(L)$. Введем покрытие $\mathbb{R}^4$ множествами

$$U_\lambda = \lambda U_0, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Для этого разнесем сдвигами из решетки Γ множество $U_0 = \{|u^k| < 3/4\}$. Заметим, что данное покрытие хорошее — все непустые конечные пересечения диффеоморфны $\mathbb{R}^4$. Поэтому когомологии нерва этого покрытия изоморфны когомологиям всего пространства M_{KT}.

Функции перехода $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathbb{C}^*$ можно выразить через мультипликаторы

$$g_{\lambda\mu}(u) = e_\lambda(u) \cdot e_{\mu^{-1}}(\mu \cdot u), \quad \lambda, \mu \in \Gamma. \tag{20}$$

Нерв $N(\mathscr{U})$ минимального подпокрытия покрытия U_λ гомеоморфен M_{KT}, и его когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ совпадают с $H^*(M_{KT}; \mathbb{Z})$. Коцикл

$$z_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i}(\log(g_{\lambda\mu}) + \log(g_{\mu\nu}) - \log(g_{\nu\lambda})) \in C^2(\mathscr{U}; \mathbb{Z}) \tag{21}$$

по определению реализует первый класс Чжэня расслоения L. Данная формула задает значение z на двумерном симплексе $(\lambda, \mu, \nu) \in N(\mathscr{U})$.

Второе число Бетти многообразия M_{KT} равно четырем. Базисные 2-циклы реализуются двумерными торами $T_{ac}, T_{bc}, T_{da}, T_{db}$, образованными коммутирующими сдвигами (1).

Определим функции $f_\lambda(u)$ по формуле

$$e_\lambda(u) = e^{2\pi i f_\lambda(u)}. \tag{22}$$

Согласно (20)–(22)

$$c_1([T_{\lambda\mu}]) = f_\mu(u) + f_\lambda(\mu \cdot u) - f_\lambda(u) - f_\mu(\lambda \cdot u).$$

Вычисляя первый класс Чжэня на базисных 2-циклах, получим

$$c_1([T_{ca}]) = c_1([T_{bd}]) = 1, \quad c_1([T_{cb}]) = c_1([T_{ad}]) = 0. \tag{23}$$

Так как многообразие M_{KT} является однородным пространством нильпотентной группы Ли, любой элемент из $H^2(M_{KT}; \mathbb{R})$ реализуется левоинвариантными формами, двойственными к базисным 2-циклам. Группа $H^2(M_{KT}; \mathbb{R})$ порождается классами когомологий форм $(dz - x\,dy) \wedge dx, dy \wedge dt, (dz - x\,dy) \wedge dy$ и $dx \wedge dt$.

Из (23) следует, что $c_1(L) = [(dz - x\,dy) \wedge dx + dy \wedge dt]$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Auslander L.* Lecture notes on nil-theta functions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977. (Regional Conf. Ser. Math; N 34).
2. *Kirwin W. D., Uribe A.* Theta-functions on the Kodaira–Thurston manifold. http://arxiv.org/abs/0712.4016.
3. *Thurston W. P.* Some simple examples of symplectic manifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 55, N 2. P. 467–468.
4. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.
5. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
6. *Тайманов И. А.* Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи мат. наук. 1997. Т. 52, № 1. С. 149–224.

Статья поступила 5 декабря 2008 г.

Егоров Дмитрий Владимирович
Суперкомпьютерный центр при Институте математики и информатики
Якутского гос. университета им М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского 48, Якутск 677000
egorov.dima@gmail.com