Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 514.765

О δ–ОДНОРОДНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. II

В. Н. Берестовский, Ю. Г. Никоноров

Аннотация. Продолжено изучение определенных ранее В. Н. Берестовским и К. П. Плаутом δ-однородных пространств для случая римановых многообразий. Каждое такое многообразие имеет неотрицательную секционную кривизну. В частности, доказано, что каждое компактное естественно редуктивное риманово однородное многообразие положительной эйлеровой характеристики δ-однородно.

Ключевые слова: однородное пространство, однородное пространство положительной эйлеровой характеристики, геодезически орбитальное пространство, переносы Клиффорда — Вольфа, геодезическая, естественно редуктивное риманово однородное пространство, нормальное однородное риманово многообразие, риманова субмерсия.

Введение

Продолжая нашу статью [1] (основные результаты которой анонсированы в [2]), мы изучаем определенные в статье [3] δ-однородные пространства в случае римановых многообразий. Эти пространства допускают очень простое, чисто метрическое определение, применимое к любым метрическим пространствам. Именно, метрическое пространство (M,ρ) называется *δ-однородным*, если для любых двух точек $x,y\in M$ существует изометрия f пространства (M,ρ) на себя, переводящая точку x в точку y и имеющая максимальное смещение в точке x, т. е. $f(x)=y$ и $\rho(x,f(x))\geq\rho(z,f(z))$ для всех точек $z\in M$. Если можно всегда взять такое движение f из группы изометрий G пространства (M,ρ), то (M,ρ) называется *G-δ-однородным.* В римановом случае мы будем рассматривать в качестве G только связные транзитивные группы Ли.

В статье [1] доказаны некоторые свойства δ-однородных пространств. Сформулируем здесь наиболее важные из них. Каждое δ-однородное риманово многообразие геодезически орбитально (г.о.) (см. определение в [4]). Каждое нормальное однородное риманово многообразие [5] δ-однородно. В частности, любая группа Ли с биинвариантной римановой метрикой является δ-однородным пространством. Каждое прямое метрическое произведение δ-однородных пространств δ-однородно; любой сомножитель разложения δ-однородного риманова многообразия в прямое метрическое произведение сам δ-однороден. Каждое δ-однородное риманово многообразие имеет неотрицательную секционную

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–5682.2008.1), работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00067–а).

кривизну. Из теоремы Топоногова [6] вытекает, что некомпактное однородное риманово многообразие неотрицательной секционной кривизны изометрично прямому метрическому произведению евклидова пространства и однородного компактного риманова многообразия неотрицательной кривизны. Отсюда и последних двух утверждений следует, что каждое δ-однородное риманово многообразие компактно или является прямым метрическим произведением единственного евклидова пространства и единственного компактного δ-однородного риманова многообразия.

В разд. 1 напоминаются некоторые другие общие свойства δ-однородных римановых многообразий, доказанные в статье [1].

В разд. 2 мы находим дополнительные изометрии δ-однородных римановых многообразий и некоторые их применения.

В разд. 3 обсуждаются (в основном известные) результаты о компактных односвязных однородных многообразиях $M = G/H$, в частности, теорема Хопфа — Самельсона, утверждающая, что $\chi(M) \geq 0$, и характеризующая случай $\chi(M) > 0$ условием $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(H)$. Отметим теорему 10, которая утверждает, что каждая собственная подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ произвольной простой компактной связной группы Ли G, включающая алгебру Ли $\mathfrak{t}$ максимального тора $T \subset G$, есть алгебра Ли единственной замкнутой связной подгруппы Ли $H \subset G$. При этом $M = G/H$ является компактным связным односвязным однородным пространством положительной эйлеровой характеристики. По теореме Костанта 12 отсюда вытекает алгебраическое описание всех компактных связных односвязных неразложимых однородных римановых многообразий (M, μ) с условием $\chi(M) > 0$.

В разд. 4 обсуждаются некоторые известные результаты о компактных односвязных однородных пространствах положительной эйлеровой характеристики. Также мы доказываем теорему 13, из которой следует, что каждое компактное естественно редуктивное [7] однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики нормально (следовательно, δ-однородно). Отметим, что нормальные однородные римановы многообразия составляют собственный подкласс класса естественно редуктивных однородных римановых многообразий [7, 8] и собственный подкласс класса δ-однородных римановых многообразий [1].

Первый автор весьма признателен математическому отделению университета Теннесси, Ноксвилл, США, за гостеприимство и позицию приглашенного профессора во время подготовки части этой статьи.

1. Общие свойства δ-однородных пространств

Лемма 1. *Предположим, что риманово многообразие (M, μ) изометрично прямому метрическому произведению $(K, \mu_1) \times (\mathbb{E}^m, \mu_2)$, где (K, μ_1) — компактное однородное риманово многообразие и $(\mathbb{E}^m, \mu_2)$ — конечномерное евклидово пространство. Тогда каждая изометрия f пространства (M, μ) имеет вид $f = f_1 \times f_2$, где f_1 (соответственно f_2) — изометрия пространства (K, μ_1) (соответственно $(\mathbb{E}^m, \mu_2)$).*

Доказательство. Легко видеть, что геодезическая в (M, μ) является метрической прямой тогда и только тогда, когда она расположена в некотором евклидовом подпространстве $\{k\} \times \mathbb{E}^m$. Поэтому каждая изометрия f пространства (M, μ) переставляет такие подпространства. Так как f сохраняет ортогональность, то f должна переставлять все слои вида $K \times \{e\}$. Это доказывает лемму.

Теорема 1. *Однородное пространство $M = G/H$ связной группы Ли G по ее компактной подгруппе H допускает инвариантную риманову δ-однородную метрику тогда и только тогда, когда G/H допускает инвариантную риманову метрику неотрицательной секционной кривизны.*

Доказательство. Необходимость следует из введения.

Докажем достаточность. Предположим, что $M = G/H$ допускает инвариантную риманову метрику μ неотрицательной секционной кривизны.

Если M компактно, то группа Ли G компактна и допускает биинвариантную риманову метрику γ. Тогда существует единственная риманова метрика ν на M такая, что каноническая проекция $p : (G,\gamma) \to (M,\nu)$ является римановой субмерсией. При этом ν G-инвариантна на G/H и $(G/H,\nu)$ — G-нормальное однородное риманово многообразие. Согласно введению $(G/H,\nu)$ есть δ-однородное пространство.

Предположим, что M некомпактно. Тогда по введению все условия леммы 1 выполняются и (K,μ_1) имеет неотрицательную секционную кривизну. Поэтому верны утверждения леммы 1. Очевидно, множество всех изометрий вида $\{f_1 \mid f = (f_1,f_2) \in G\}$ образует предкомпактную транзитивную группу изометрий G_1 компактного пространства (K,μ_1) (относительно компактно-открытой топологии) с замыканием $\Gamma_1 := \overline{G}_1$, являющимся компактной эффективной транзитивной группой Ли изометрий пространства (K,μ_1). Следовательно, многообразие K допускает Γ_1-инвариантную риманову метрику γ_1 такую, что (K,γ_1) — нормальное однородное пространство группы Ли Γ_1. Согласно введению (K,γ_1) есть δ-однородное пространство. Из последних рассуждений вытекает, что риманова метрика $g_0 = \gamma_1 \times \mu_2$ на M инвариантна относительно действия группы G. В этом случае риманово многообразие $(M,\mu_0) = (K,\gamma_1) \times (\mathbb{E}^m,\mu_2)$ является δ-однородным пространством как прямое метрическое произведение δ-однородных пространств.

Пусть $(G/H,\mu)$ — компактное однородное риманово многообразие со связной группой Ли G, и пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантное скалярное произведение на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Обозначим через $\mathfrak{h}$ алгебру Ли группы Ли H и рассмотрим $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Ясно, что $\mathfrak{p}$ $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантно. Как обычно, мы отождествляем метрику μ с соответствующим $\mathrm{Ad}(H)$-инвариантным скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ на $\mathfrak{p}$.

Теорема 2 [1]. *Компактное риманово многообразие $(G/H,\mu)$ G-δ-однородно для группы Ли G тогда и только тогда, когда существует $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантное центрально симметричное (относительно нуля) выпуклое тело B в $\mathfrak{g}$ такое, что*

$$P(B) = \{v \in \mathfrak{p} \mid (v,v) \leq 1\},$$

где $P : \mathfrak{g} \to \mathfrak{p}$ есть $\langle\cdot,\cdot\rangle$-ортогональная проекция.

Следствие 1. *Векторное пространство $\mathfrak{p}$ и скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ инвариантны относительно $\mathrm{Ad}(N_G(H_0))$, где $N_G(H_0)$ — нормализатор компоненты связности единицы H_0 группы H в G.*

Доказательство. Очевидно, $\mathfrak{h}$ $\mathrm{Ad}(N_G(H_0))$-инвариантно. Тогда $\mathfrak{p}$ также $\mathrm{Ad}(N_G(H_0))$-инвариантно, потому что $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантно. $\mathrm{Ad}(N_G(H_0))$-инвариантность скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$ следует из теоремы 2.

2. Дополнительные симметрии δ-однородных метрик

Напомним, что группа G действует на однородном пространстве G/H преобразованием $L_b : G/H \to G/H$ $(b \in G)$, где

$$L_b(cH) = bcH.$$

Пусть $N_G(H)$ — нормализатор группы H в группе G. Для каждого элемента $a \in N_G(H)$ можно корректно определить G-эквивариантный диффеоморфизм $R_a : G/H \to G/H$, действующий по следующему правилу:

$$R_a(cH) = cHa^{-1} = ca^{-1}H.$$

Определение 1. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Сюръективная изометрия $f : X \to X$ называется *переносом Клиффорда — Вольфа*, если f перемещает все точки в (X, d) на одно и то же расстояние, т. е. $d(y, f(y)) = d(x, f(x))$ для всех точек $x, y \in X$.

Теорема 3. *Пусть $(G/H, \rho)$ — компактное G-δ-однородное риманово многообразие со связной транзитивной группой Ли изометрий G и $N_G(H)$ — нормализатор подгруппы H в группе G. Тогда для каждого элемента $a \in N_G(H)$ диффеоморфизм $R_a : G/H \to G/H$ является переносом Клиффорда — Вольфа на римановом многообразии $(G/H, \rho)$.*

Доказательство. Ясно, что изометричность отображения R_a эквивалентна тому, что для всех элементов $c \in G$ дифференциал $dr_{a^{-1}}(c)$ сохраняет длину каждого вектора $u \in \mathrm{hor}_c \subset G_c$, где hor_c означает горизонтальное подпространство соответствующей римановой субмерсии $\mathrm{pr} : (G, \nu) \to (G/H, \mu)$ в G_c и $dr_{a^{-1}}(\mathrm{hor}_c) = \mathrm{hor}_{ca^{-1}}$. Здесь r, l обозначают операции правых и левых переносов в G. Имеются очевидное равенство

$$r_{a^{-1}} = l_c \circ l_{a^{-1}} \circ (l_a \circ r_{a^{-1}}) \circ l_{c^{-1}}$$

и соответствующее равенство для композиции дифференциалов отображений. Ясно, что $l_{c^{-1}}(c) = e$, $dl_{c^{-1}}(\mathrm{hor}_c) = \mathrm{hor}_e = \mathfrak{p}$ и $d(l_a \circ r_{a^{-1}})(e) = \mathrm{Ad}(a)$. Но последнее отображение сохраняет пространство $\mathfrak{p}$ и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на основании следствия 1 и очевидного включения $N_G H \subset N_G(H_0)$. Все дифференциалы левых переносов сохраняют горизонтальное распределение и длину горизонтальных векторов. Таким образом, отображение R_a — изометрия. Можно легко проверить, что это отображение есть перенос Клиффорда — Вольфа, потому что оно порождается правым переносом r_a на G, коммутирующим со всеми левыми переносами на G, порождающими транзитивную группу изометрий на $(G/H, \rho)$.

Лемма 2. *Преобразование R_a (эффективного) однородного пространства G/H для $a \in N_G(H)$ совпадает с преобразованием L_b для некоторого элемента $b \in G$ тогда и только тогда, когда a равно произведению некоторого центрального элемента группы G и некоторого элемента группы H.*

Доказательство. Пусть $R_a = L_b$ для некоторого $b \in G$. Так как R_a, очевидно, коммутирует с каждым преобразованием L_d, $d \in G$, получаем, что b лежит в центре группы G. Далее, условие $R_a = L_b$ эквивалентно следующему: $ca^{-1}H = bcH = cbH$ для каждого $c \in G$. Поэтому $a = \tilde{b}d$, где $\tilde{b} = b^{-1}$ — центральный элемент в G и d — некоторый элемент группы H. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 4. *Пусть $(G/H, \rho)$ — компактное δ-однородное риманово многообразие с полной связной транзитивной полупростой группой Ли изометрий G. Тогда группа $N_G(H)/H$ конечна.*

Доказательство. Согласно теореме 3 для каждого элемента $a \in N_G(H)$ диффеоморфизм $R_a := G/H \to G/H$, действующий по правилу $R_a(cH) = cHa^{-1} = ca^{-1}H$, есть изометрия пространства $(G/H, \rho)$.

Если $\dim(N_G(H)) > \dim(H)$, то можно выбрать непрерывное семейство изометрий вида R_a, не лежащих в группе G. В самом деле, рассмотрим вектор U, лежащий в алгебре Ли группы $N_G(H)$, но не в $\mathfrak{h}$. Рассмотрим $a = \exp(tU) \in N_G(H)$ для некоторого вещественного числа t. Преобразование R_a изометрично на $(G/H, \rho)$. Так как центр группы G дискретен, используя лемму 2, получаем, что для некоторого открытого множества $O \subset \mathbb{R}$ все преобразования R_a для $a = \exp(tU)$, $t \in O$, не лежат в группе G. Но это противоречит тому, что G — полная связная группа изометрий риманова многообразия $(G/H, \rho)$.

Поэтому мы заключаем, что $\dim(N_G(H)) = \dim(H)$ и группа $N_G(H)/H$ конечна, так как она компактна.

Пример 1. Пусть G — компактная связная полупростая группа Ли и μ — некоторая левоинвариантная риманова метрика на G такая, что G — компонента связности единицы полной группы изометрий риманова многообразия (G, μ). Тогда (G, μ) не δ-однородно. В самом деле, если (G, μ) δ-однородно, то согласно теореме 4 группа $N_G(H)/H$ конечна. Но в нашем случае $H = \{e\}$ тривиальна и $N_G(H)/H = G$ не дискретна.

Последний пример вызывает необходимость обсуждения δ-однородных левоинвариантных римановых метрик на группах Ли. Ясно, что любая биинвариантная метрика ρ на группе Ли G G-δ-однородна. Но существуют δ-однородные левоинвариантные небиинвариантные римановы метрики на группах Ли. Это можно показать следующим образом.

Пусть G — компактная связная полупростая группа Ли и K — связная подгруппа в G. Среди всех левоинвариантных римановых метрик на G рассмотрим подкласс $\mathscr{M}_{G,K}$ метрик, правоинвариантных относительно K. Легко видеть, что подкласс $\mathscr{M}_{G,K}$ состоит из $(G \times K)$-инвариантных римановых метрик на однородном пространстве $M = (G \times K)/\operatorname{diag}(K)$ (мы используем естественное включение $K \subset G$). В самом деле, каждая метрика из $\mathscr{M}_{G,K}$ имеет транзитивную группу движений $G \times K$ со стабилизатором $\operatorname{diag}(K)$ в единице $e \in G$. С другой стороны, ясно, что G транзитивна на пространстве $M = (G \times K)/\operatorname{diag}(K)$.

Рассмотрим теперь $(G \times K)$-нормальную однородную риманову метрику ρ на M. Тогда риманово однородное пространство (M, ρ) $(G \times K)$-δ-однородно (см. введение). Проведенное рассуждение показывает, что (M, ρ) изометрично группе Ли G с некоторой левоинвариантной метрикой ρ_1. Эта метрика может быть биинвариантной, но легко заметить, что множество $(G \times K)$-нормальных однородных римановых метрик ρ на M больше множества биинвариантных метрик на G (детали см. в [9]). Поэтому получаем δ-однородные левоинвариантные небиинвариантные римановы метрики на G.

Пример 2. Пусть F — связная компактная простая группа Ли, $G = F^k$, $k \geq 2$, и $H = \operatorname{diag}(F) \subset G$. Рассмотрим пространство $G/H = F^k/\operatorname{diag}(F)$, снабженное метрикой ρ, порожденной (минус) формой Киллинга на F^k. Тогда однородное риманово многообразие $(G/H, \rho)$ δ-однородно. С другой стороны, оно изометрично группе Ли F^{k-1} с некоторой левоинвариантной римановой метрикой ρ_1 (см., например, [10]). Если $k \geq 3$, то метрика ρ_1 не биинвариантна.

Замечание 1. Очевидно, что для компактного G-δ-однородного риманова многообразия $(G/H, \rho)$ с положительной эйлеровой характеристикой все условия теоремы 4 соблюдаются. Действительно, любая связная одномерная центральная подгруппа в G индуцировала бы на G/H векторное поле без нулей, что невозможно вследствие неравенства $\chi(G/H) > 0$. С другой стороны, в случае положительной эйлеровой характеристики утверждение теоремы 4 хорошо известно, так как группы H и G имеют один и тот же ранг.

3. О топологии компактных однородных многообразий

В общем случае подалгебра Картана $\mathfrak{k}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяется как нильпотентная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, совпадающая со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ компактна, т. е. является алгеброй Ли некоторой компактной группы Ли G, то $\mathfrak{k}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$, следовательно, есть алгебра Ли максимального тора T в G.

Теорема 5 [11]. *Любые два максимальных тора в компактной связной группе Ли G сопряжены посредством некоторого внутреннего автоморфизма группы Ли G.*

Таким образом, *ранг* $\mathrm{rk}(G)$ компактной связной группы Ли G (корректно) определяется как размерность подалгебры Картана $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ или, что эквивалентно, размерность максимального тора в G.

Теорема 6 [12, 13]. *Пусть $M = G/H$ — однородное пространство, где G, H — связные компактные группы Ли. Тогда $\chi(M) \geq 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $\chi(M) > 0$;

(ii) $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(H)$.

Если $\chi(M) > 0$, то многообразие M формально и $\chi(M) = \frac{|W_G|}{|W_H|}$, где $|W_G|$ (соответственно $|W_H|$) есть порядок группы Вейля W_G (соответственно W_H) группы Ли G (соответственно H).

Теорема 7. *Пусть $M = (G/H, \mu)$ — компактное односвязное однородное риманово многообразие с компактными группами Ли G и H и G связна. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\chi(M) = 0$;

2) $\mathrm{rk}\, G > \mathrm{rk}\, H$;

3) *существует правоинвариантное векторное поле на G, проектирующееся при каноническом отображении $p : G \to M$ на киллингово векторное поле на M без нулей;*

4) *все характеристические числа риманова многообразия M, определенные для главного расслоения $\pi : SO(M) \to M$ ортонормированных ориентированных базисов на M, равны нулю.*

Доказательство. Из гомотопической последовательности расслоения $p : G \to G/H$, связности G и односвязности G/H следует, что группа H связна. Таким образом, все условия теоремы 6 выполнены. Тогда условия 1 и 2 эквивалентны.

Ясно, что условие 3 влечет условие 1.

Мы покажем, что из условия 2 вытекает утверждение 3.

Рассмотрим элемент $U \in \mathfrak{g}$ такой, что размерность замыкания в G однопараметрической подгруппы $\exp(tU)$ совпадает с $\mathrm{rk}(G)$, что, в свою очередь, больше, чем $\mathrm{rk}(H)$. Мы утверждаем, что $\mathrm{Ad}(s)(U) \notin \mathfrak{h}$ для всех $s \in G$. Действительно, предположим, что $V := \mathrm{Ad}(s)(U) \in \mathfrak{h}$. Так как $\mathrm{Ad}(s)$ — внутренний автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то размерность замыкания в G однопараметрической подгруппы $\exp(tV)$ также равна $\mathrm{rk}(G)$. С другой стороны, это замыкание есть тор в H, потому что H — замкнутая подгруппа Ли группы Ли G. Это противоречит неравенству $\mathrm{rk}(H) < \mathrm{rk}(G)$. Ясно, что правоинвариантное векторное поле W на G с условием $W(e) = U$ проектируется при отображении p на киллингово векторное поле на M без нулей.

Так как любые два максимальных тора в компактной связной группе Ли сопряжены, можно легко доказать, что из условия 3 вытекает условие 2, потому что из равенства $\mathrm{rk}(G) = \mathrm{rk}(H)$ следовало бы, что каждый максимальный тор в G сопряжен посредством некоторого внутреннего автоморфизма группы Ли G некоторому тору в H. Поэтому каждое правоинвариантное векторное поле на G проектируется на киллингово векторное поле на M, обязательно обращающееся в нуль в некоторых точках.

Характеристические числа из условия 4 определены только для четномерных римановых многообразий. В этом случае эйлерова характеристика также является характеристическим числом (соответствующим характеристическому классу Эйлера) по теореме Гаусса — Бонне. Тогда условие 1 следует из условия 4. Утверждение 4 следует из условия 3 (даже из более слабого условия существования киллингова векторного поля без нулей на произвольном компактном гладком ориентированном римановом многообразии четной размерности) по теореме Ботта [14] (доказательство также дано в теореме 6.1 в [15, гл. 2]).

В нечетномерном случае $\chi(M) = 0$ и выполнено условие 1, а следовательно, условия 2 и 3, как было сказано ранее. Если предположить, что характеристические числа нечетномерного (компактного риманова) многообразия равны нулю по определению, то условие 4 автоматически выполняется. Тем самым в этом случае все четыре условия эквивалентны и всегда выполняются.

Предложение 1 [16]. *Каждое четномерное однородное риманово многообразие M положительной секционной кривизны имеет положительную эйлерову характеристику.*

Доказательство. Согласно теореме Берже [17] любое киллингово векторное поле на четномерном римановом многообразии положительной секционной кривизны обращается в нуль в некоторой точке. Если бы $M = G/H$ имело нулевую эйлерову характеристику, то по теореме 7 M допускало бы киллингово векторное поле без нулей. Поэтому $\chi(M) > 0$.

Замечание 2. Пример плоского четномерного тора, имеющего нулевую эйлерову характеристику, показывает, что утверждение предложения 1 неверно при условии неотрицательности секционной кривизны. Заметим, что вследствие двойственности Пуанкаре любое компактное нечетномерное триангулированное (в частности, гладкое) многообразие имеет нулевую эйлерову характеристику.

Следствие 2. *Все КРОСПы, кроме нечетномерных, т. е. кроме S^{2k+1} и $\mathbb{R}P^{2k+1}$, имеют положительную эйлерову характеристику.*

Теорема 8 [1]. *Пусть (M, r) — локально компактное G-δ-однородное пространство с внутренней метрикой. Предположим, что группа G нормализует некоторую замкнутую подгруппу H полной группы изометрий $\mathrm{Isom}(M)$ пространства M (снабженной компактно-открытой топологией). Тогда пространство орбит $H\backslash M$ с фактор-метрикой ρ — (G)-δ-однородное локально компактное пространство с внутренней метрикой.*

Теорема 9. *Каждое односвязное компактное однородное риманово многообразие (M, g) допускает полупростую компактную транзитивную группу изометрий. Кроме того, если компонента связности единицы группы всех изометрий пространства (M, g) не полупростая, то $\chi(M) = 0$ и (M, g) — тотальное пространство некоторой римановой субмерсии, являющейся нетривиальным главным расслоением с односвязным однородным римановым многообразием (M_1, g_1) в качестве базы и попарно изометричными вполне геодезическими плоскими торами в качестве слоев. Если (M, g) δ-однородно, то (M_1, g_1) также δ-однородно.*

Доказательство проводится в духе статьи [18]. Первое утверждение теоремы мы получаем на основании следствия 4 из [19, гл. 2, разд. 3]. При этом G_0 — компонента связности единицы группы всех изометрий пространства (M, g) не полупроста тогда и только тогда, когда G_0 имеет нетривиальную компоненту связности единицы C своего центра. Тогда группа C действует на (M, g) как нетривиальная связная группа переносов Клиффорда — Вольфа. Следовательно, $\chi(M) = 0$.

Ясно, что орбиты однопараметрических подгрупп группы C в (M, g) являются геодезическими (см. также [18]). Поэтому орбиты группы C являются попарно изометричными плоскими вполне геодезическими торами в (M, g).

Из односвязности M и связности слоев римановой субмерсии $q : (M, g) \to (C\backslash M, g_1) := (M_1, g_1)$ следуют нетривиальность расслоения q и односвязность пространства M_1.

На основании теоремы 8 метрическое фактор-пространство $(C\backslash M, g_1) := (M_1, g_1)$ — δ-однородное риманово многообразие, если (M, g) — δ-однородное риманово многообразие.

Замечание 3. Если (M, g) — однородное компактное риманово многообразие и $\chi(M) > 0$, то по теореме 9 компонента связности единицы группы всех изометрий пространства (M, g) полупроста. Обратное утверждение неверно: компонента связности единицы группы всех изометрий евклидовой сферы S^{2l-1}, $l \geq 3$, есть простая группа Ли $SO(2l)$ и полупростая группа Ли $SO(4)$ с алгеброй Ли $so(4) = so(3) \oplus so(3)$ в случае сферы S^3.

Замечание 4. Известный пример сфер Берже $S^{2n+1} = U(n+1)/U(n)$ показывает, что в общем случае компонента связности единицы группы G всех изометрий пространства (M, g) не полупроста (даже если (M, g) нормально); в этом случае универсальная накрывающая группа Ли группы G некомпактна. Необходимо также заметить, что для сфер Берже $U(n+1)/U(n)$ (с нормальной метрикой) алгебра Ли стабилизатора $U(n)$ не ортогональна центру алгебры Ли $u(n+1)$ относительно соответствующего $\mathrm{Ad}(U(n+1))$-инвариантного скалярного произведения. Детали см. в [20].

Из введения следует, что каждое нормальное однородное риманово многообразие δ-однородно и каждое δ-однородное риманово многообразие имеет неотрицательную секционную кривизну. В [18] (см. также [21]) доказано, что каждое компактное нормальное однородное риманово многообразие с конечной фундаментальной группой имеет положительную кривизну Риччи. Естественно возникает

Вопрос 1. *Верно ли, что каждое компактное δ-однородное риманово многообразие с конечной фундаментальной группой имеет положительную кривизну Риччи?*

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$ связной группы Ли G такая, что $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, где $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ — нормализатор алгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{h}$ является алгеброй Ли единственной замкнутой связной подгруппы Ли H в G.*

Доказательство. Пусть $H_1 = \{g \in G : \mathrm{Ad}(g)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}\}$. Тогда H_1 — замкнутая подгруппа группы G. Следовательно, ее компонента связности единицы H замкнута. По теореме Картана [11] H — подгруппа Ли группы Ли G. Очевидно, алгебра Ли группы H есть $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, что по условию совпадает с $\mathfrak{h}$, так что H — нужная подгруппа Ли.

Из этого нетрудно вывести следующие утверждения.

Предложение 3. *Если $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}$, содержащая максимальную коммутативную подалгебру Ли $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{g}$, то $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$.*

Теорема 10. *Пусть G — простая компактная связная группа Ли и $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли максимального тора $T \subset G$. Тогда каждая собственная подалгебра Ли $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ с условием $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{h}$ является алгеброй Ли единственной замкнутой связной подгруппы Ли $H \subset G$. При этом G/H — связное односвязное компактное однородное пространство положительной эйлеровой характеристики.*

4. Однородные пространства положительной эйлеровой характеристики

Напомним некоторые свойства компактных однородных пространств положительной эйлеровой характеристики. Отметим, что все такие пространства четномерны (см. замечание 2).

Теорема 11 [22]. *Если M и M' — однородные пространства связных компактных групп Ли, $\chi(M) > 0, \chi(M') > 0$ и M гомотопно эквивалентно M', то M и M' диффеоморфны.*

Теперь приведем некоторые структурные результаты об однородных пространствах положительной эйлеровой характеристики (см. [13, 19.5]). Пусть G/H — почти эффективное компактное однородное пространство положительной эйлеровой характеристики со связной группой Ли G. Из теоремы 7 следует, что центр группы G дискретен (значит, G полупроста) и существует максимальный тор $T \subset G$ такой, что $T \subset H$. Так как центр группы G содержится в каждом максимальном торе группы G [11], получаем

Предложение 4 [23]. *Если компактная связная группа Ли G действует эффективно на пространстве $M = G/H$ положительной эйлеровой характеристики, то центр группы G тривиален.*

Теорема 12 [24]. *Пусть $(G/H, \mu)$ — связное односвязное компактное почти эффективное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики. Тогда $(G/H, \mu)$ неразложимо тогда и только тогда, когда G проста. В частности, простая и непростая компактные группы Ли не могут одновременно действовать транзитивно и эффективно как группы движений на компактном римановом многообразии M с положительной эйлеровой характеристикой.*

Борель и де Зибенталь получили в статье [25] классификацию подгрупп Ли максимального ранга в компактных группах Ли (см. также разд. 8.10 в [26]). Эта классификация дает описание компактных однородных многообразий с положительной эйлеровой характеристикой. Полное описание однородных пространств классических простых групп Ли с положительной эйлеровой характеристикой получено также в [23].

Работа [1] тесно связана со специальным случаем компактных однородных многообразий положительной эйлеровой характеристики, именно (обобщенными) флаговыми многообразиями. Их можно характеризовать как орбиты M присоединенных представлений компактных связных групп Ли G. Другими словами, $M = G/H$, где $H = Z_G(S)$ — централизатор некоторого нетривиального тора $S \subset G$; группа Ли H всегда связна. При этом орбиты регулярных элементов в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G называются (*полными*) *флаговыми многообразиями*.

Гл. 8 книги [8] содержит следующие утверждения: класс односвязных компактных однородных кэлеровых многообразий совпадает с классом (обобщенных) флаговых многообразий. Каждое из последних многообразий (допускающее единственную «каноническую» структуру Кэлера — Эйнштейна) есть рациональное комплексное алгебраическое (следовательно, комплексное проективное) многообразие. В специальном случае $G = Sp(l)$, подгруппы-стабилизаторы, центры которых одномерны, совпадают с подгруппами $U(l-m) \times Sp(m)$. Среди соответствующих орбит $M_{l-m}^{Sp(l)}$ единственными орбитами, для которых нормальные римановы метрики кэлеровы (следовательно, кэлерово-симметрические), являются пространства $M_1^{Sp(l)}$, т. е. $\mathbb{C}P^{2l-1} = Sp(l)/U(1) \times Sp(l-1)$, и $M_l^{Sp(l)}$ изоморфно $Sp(l)/U(l)$, многообразию вполне изотропных комплексных l-подпространств пространства $\mathbb{C}^{2l}$. Пространство $M_l^{SO(2l+1)} = SO(2l+1)/U(l)$ — многообразие комплексных флагов типа l.

Используя гл. 15 книги [13], можно сказать больше. Любое (компактное обобщенное) флаговое многообразие M, снабженное упомянутой канонической структурой Кэлера — Эйнштейна, изоморфно многообразию $\mathbb{G}/\mathbb{H}$, где $\mathbb{G}$ — комплексная связная группа Ли и $\mathbb{H}$ — замкнутая комплексная параболическая подгруппа Ли в $\mathbb{G}$. Напомним, что связная комплексная подгруппа Ли группы Ли $\mathbb{G}$ называется *параболической*, если она содержит борелевскую подгруппу группы $\mathbb{G}$. *Борелевская подгруппа* группы $\mathbb{G}$ — любая ее максимальная связная разрешимая комплексная подгруппа Ли. Таким образом, M — так называемое *флаговое однородное пространство*. При этом соответствующая комплексная структура на M индуцируется комплексной структурой на $\mathbb{G}$. Любая параболическая подгруппа группы $\mathbb{G}$ включает подгруппу $\mathrm{Rad}(\mathbb{G})$, являющуюся нормальной подгруппой группы $\mathbb{G}$. Следовательно, M — флаговое однородное пространство полупростой комплексной группы Ли $\mathbb{G}_0 := \mathbb{G}/\operatorname{Rad}(\mathbb{G})$. При этом $M = G_0/H_0$, где G_0 — любая компактная вещественная форма группы $\mathbb{G}_0$ и $H_0 = G_0 \cap \mathbb{H}_0$ для $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}/\operatorname{Rad}(\mathbb{G})$.

В [27, следствие 7.12] доказано, что максимальная связная подгруппа Ли H максимального ранга в компактной связной группе Ли G есть компонента связности единицы нормализатора (т. е. централизатора) некоторого элемента $g \in G$. На основании этого следствия и некоторых связанных с этим результатов приводится табл. 5.1 в [27] всех максимальных связных компактных подгрупп H максимального ранга (более точно, их подалгебр Ли) компактных связных простых групп Ли G. В частности, G/H есть орбита упомянутого выше элемента $g \in G$ относительно действия группы $I(G)$ всех внутренних автоморфизмов группы Ли G. (Обобщенные) флаговые многообразия можно также рассматривать как орбиты такие, что $g \in G$ берется в диффеоморфном образе $\exp_G(U)$, где U — открытый шар с центром $0 \in \mathfrak{g}$ относительно некоторой $\mathrm{Ad}(G)$-инвариантной евклидовой метрики на $\mathfrak{g}$.

Теперь мы дадим простое описание естественно редуктивных однородных пространств с положительной эйлеровой характеристикой, основанное на теореме 12.

Теорема 13. *Пусть M — компактное естественно редуктивное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики. Тогда M G_1-нормально однородно для некоторой (транзитивной на M) полупростой группы Ли $G_1 \subset G$, где G — полная связная группа изометрий пространства M.*

Доказательство. Группа G полупроста, так как $\chi(M) > 0$ (см. теорему 9).

В доказательстве теоремы можно без ограничения общности предполагать, что M односвязно. Действительно, универсальное риманово накрытие $\widetilde{M}$ пространства M имеет полупростую транзитивную группу движений $\widetilde{G}$, накрывающую группу G. Так как G и $\widetilde{G}$ имеют одну и ту же алгебру Ли и $\widetilde{G}$ компактна, то $\widetilde{M}$ также компактно. Если $\widetilde{M}$ нормально однородно относительно некоторой полупростой подгруппы $\widetilde{G}_1 \subset \widetilde{G}$, то M G_1-нормальное однородное, где $G_1 \subset G$ есть образ группы $\widetilde{G}_1$ при естественном накрывающем эпиморфизме $\pi : \widetilde{G} \to G$.

Далее, можно предполагать дополнительно, что M неразложимо. Действительно, если $M = M_1 \times \dots \times M_s$ — разложение де Рама для M, то каждое M_i — естественно редуктивное однородное риманово многообразие положительной эйлеровой характеристики [28, следствие 7] (см. также [7, гл. X, теорема 5.2]). Если мы докажем, что каждое M_i нормально однородно (относительно некоторой транзитивной подгруппы своей полной связной группы изометрий), то M также нормально однородно.

Пусть M — компактное односвязное неразложимое естественно редуктивное однородное риманово многообразие с условием $\chi(M) > 0$ и G — его (полупростая) наибольшая связная группа изометрий. Из теоремы Костанта [28, теорема 4] получаем, что найдется некоторая подгруппа $G_1 \subset G$, транзитивная на M, со следующим свойством: существует некоторая $\mathrm{Ad}(G_1)$-инвариантная невырожденная квадратичная форма Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}_1$ группы Ли G_1 такая, что риманова метрика пространства M порождается сужением формы Q на Q-ортогональное дополнение $\mathfrak{p}$ к $\mathfrak{h}_1$ в $\mathfrak{g}_1$ (H_1 — стабилизатор некоторой точки из M относительно действия группы G_1, а $\mathfrak{h}_1$ — соответствующая подалгебра Ли алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$).

Заметим, что группа G_1 проста согласно теореме 12. Но так как G_1 простая, то Q кратна форме Картана — Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$, поэтому Q положительно определена на $\mathfrak{g}_1$, и M G_1-нормально. Теорема доказана.

Очевидно, из теоремы 13 и введения вытекает

Следствие 3. *Каждое компактное естественно редуктивное однородное риманово многообразие с положительной эйлеровой характеристикой δ-однородно.*

Согласно следствию 3 и теореме 6 компактное естественно редуктивное однородное риманово многообразие M, не являющееся δ-однородным, удовлетворяет условию $\chi(M) = 0$. Напомним, что в статье [1] получены примеры δ-однородных римановых многообразий с положительной эйлеровой характеристикой, не являющихся нормальными однородными (следовательно, естественно редуктивными).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berestovskii V. N., Nikonorov Yu. G.* On δ-homogeneous Riemannian manifolds // Differ. Geom. Appl. 2008. V. 26, N 5. P. 514–535.

2. *Берестовский В. Н., Никоноров Ю. Г.* О δ-однородных римановых многообразиях // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 6. С. 727–729.

3. *Berestovskii V., Plaut C.* Homogeneous spaces of curvature bounded below // J. Geom. Anal. 1999. V. 9, N 2. P. 203–219.

4. *Kowalski O., Vanhecke L.* Riemannian manifolds with homogeneous geodesics // Boll. Unione Mat. Ital. Ser. B. 1991. V. 5, N 1. P. 189–246.

5. *Berger M.* Les varietes riemanniennes homogenes normales a courbure strictement positive // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., III Ser. 1961. V. 15. P. 179–246.

6. *Топоногов В. А.* Метрическое строение римановых пространств неотрицательной кривизны, содержащих прямые линии // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 6. С. 1358–1369.

7. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т. 1, 2.

8. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
9. *D'Atri J. E., Ziller W.* Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups // Mem. Amer. Math. Soc. 1979. V. 18, N 215. P. 1–72.
10. *Wang M., Ziller W.* On isotropy irreducible Riemannian manifolds // Acta Math. 1991. V. 166, N 3–4. P. 223–261.
11. *Адамс Дж.* Лекции по группам Ли. М.: Наука, 1979.
12. *Hopf H., Samelson H.* Ein Satz über die Wirkungräume geschlossener Liescher Gruppen (German) // Comment. Math. Helv. 1940–41. V. 13, N 1. P. 240–251.
13. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физматлит, 1995.
14. *Bott R.* Vector fields and characteristic numbers // Michigan Math. J. 1967. V. 14, N 2. P. 231–244.
15. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986.
16. *Wallach N. R.* Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature // Ann. Math. 1972. V. 96, N 2. P. 277–295.
17. *Berger M.* Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B. 1966. V. 263. P. 76–78.
18. *Берестовский В. Н.* Однородные римановы многообразия положительной кривизны Риччи // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 3. С. 334–340.
19. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 20. С. 103–240. (Итоги науки и техники).
20. *Ziller W.* Homogeneous Einstein metrics on spheres and projective spaces // Math. Ann. 1982. V. 259, N 3. P. 351–358.
21. *Nash J. C.* Positive Ricci curvature on fibre bundles // J. Differential Geom. 1979. V. 14, N 2. P. 241–254.
22. *Shchetinin A. N.* On a class of compact homogeneous spaces // I: Ann. Global Anal. Geom. 1988, V. 6. P. 119–140; II: Ann. Global Anal. Geom., 1990, V. 8. P. 227–247.
23. *Wang H. C.* Homogeneous spaces with non-vanishing Euler characteristic // Ann. Math. (2). 1949. V. 50, N 4. P. 925–953.
24. *Kostant B.* On holonomy and homogeneous spaces // Nagoya Math. J. 1957. V. 12, N 1. P. 31–54.
25. *Borel A., de Siebenthal J.* Les sous-groups fermés de rang maximum des groups de Lie clos // Comment. Math. Helv. 1949. V. 23, N 1. P. 200–221.
26. *Вольф Дж.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
27. *Mimura M., Toda H.* Topology of Lie groups. I, II. Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1991. (Amer. Math. Soc. Translations; 91).
28. *Kostant B.* On differential geometry and homogeneous spaces // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1956. V. 42. I: N 5. P. 258–261. II: N 6. P. 354–357.

Статья поступила 20 сентября 2007 г.

Берестовский Валерий Николаевич
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова, 13, Омск 644099
`berestov@ofim.oscsbras.ru`

Никоноров Юрий Геннадьевич
Рубцовский индустриальный институт
Алтайского гос. технического университета им. И. И. Ползунова,
ул. Тракторная, 2/6, Рубцовск 658207
`nik@inst.rubtsovsk.ru`