Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 517.982.27

СИЛЬНО ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

С. В. Асташкин, К. В. Лыков

Аннотация. Введен новый класс симметричных пространств на отрезке $[0,1]$, содержащий все наиболее известные до сих пор пространства, экстраполяционные относительно шкалы L_p при $p \to \infty$. Найдена его характеризация, а также показано, что при определенных условиях $\mathscr{K}$-функционал Петре в паре (E, L_∞) имеет экстраполяционное описание, если и только если пространство E принадлежит этому классу. Как приложение получена новая экстраполяционная теорема для операторов, ограниченных в L_p-пространствах.

Ключевые слова: симметричное пространство; пространства Лоренца, Марцинкевича, Орлича; экстраполяция операторов; K-функционал Петре.

Введение

Самыми известными и важными примерами симметричных (или перестановочно инвариантных) пространств являются пространства L_p. В то же время нормы многих других симметричных пространств с точностью до эквивалентности выражаются с помощью L_p-норм. Классическим примером в этом смысле является пространство Зигмунда $\operatorname{Exp} L^\beta$ $(\beta > 0)$, состоящее из всех функций $x(t)$, измеримых на $[0,1]$, для которых конечна квазинорма

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^\beta} = \sup_{0<t\le 1} \log_2^{-1/\beta}(2/t)x^*(t) \tag{1}$$

(здесь и всюду далее $x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$). Хорошо известно (см., например, [1, с. 22, 23] или [2]), что

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^\beta} \asymp \sup_{1<p<\infty} (p^{-1/\beta}\|x\|_{L_p}). \tag{2}$$

Соотношения такого рода интересны как сами по себе, так и с точки зрения приложений, потому что они позволяют описывать предельные пространства экстраполяционных теорем типа теоремы Яно [3], применяемых при изучении различных важных операторов анализа [1, 4, 5].

Более общие пространства и конструкции рассматривались в работах [6, 7]. В частности, там получено экстраполяционное описание экспоненциальных пространств Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi$ (Φ — возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$), состоящих из всех функций $x = x(t)$, $t \in [0,1]$, для которых

$$\|x\|_{\operatorname{Exp} L^\Phi} = \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 \left(\exp\Phi\left(\frac{|x(t)|}{u}\right) - 1\right) dt \le 1\right\} < \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–96603).

А именно, справедливо следующее обобщение соотношения (2) [7, следствие 1]:

$$\|x\|_{\mathrm{Exp}\,L^{\Phi}} \asymp \sup_{1<p<\infty} \frac{\|x\|_{\Phi(p)}}{p}. \tag{3}$$

Анализ этих и других примеров привел авторов к введению в предыдущей работе [8] следующего общего определения. Симметричное пространство E называется *экстраполяционным* (при $p \to \infty$), если найдется такое банахово идеальное пространство F на $[1,\infty)$, что $\|x\|_E \asymp \|\|x\|_{L_p}\|_F$. На основе этого определения в [8] найдены необходимые и достаточные условия экстраполяционности важных в приложениях пространств Марцинкевича и Лоренца, исследованы границы экстраполяционного описания симметричных пространств. Попутно выяснилось весьма интересное обстоятельство, состоящее в том, что нормы многих экстраполяционных в этом смысле пространств E (хотя и не всех) допускают вышеприведенное представление с параметром $F = \widetilde{E}$, состоящим из всех функций $x(u)$, измеримых на $[1,\infty)$, таких, что функция $\tilde{x}(t) := x(\log_2(2/t))$ $(0 < t \le 1)$ принадлежит самому E; при этом $\|x\|_{\widetilde{E}} = \|\tilde{x}\|_E$. Примерами подобных соотношений являются соотношения (2) и (3). Основная цель этой работы состоит в изучении свойств таких пространств (мы будем называть их *сильно экстраполяционными*).

Работа построена следующим образом. В § 1 содержатся основные определения и некоторые предварительные сведения из теории симметричных пространств. Основные результаты располагаются в § 2. Здесь получена характеризация сильно экстраполяционных пространств: доказано, что симметричное пространство E обладает указанным выше свойством тогда и только тогда, когда в E ограничен оператор $Sx(t) = x(t^2)$. Этот критерий упрощается в одном важном частном случае, который включает пространства Лоренца и Марцинкевича, и сводится к тому, что фундаментальная функция пространства удовлетворяет так называемому Δ^2-условию. В то же время в заключительной части параграфа приведен пример не сильно экстраполяционного пространства, фундаментальная функция которого тем не менее этому условию удовлетворяет. В § 3 изучается возможность экстраполяционного описания $\mathscr{K}$-функционала $\mathscr{K}(t,f;E,L_\infty)$ при условии, что E экстраполяционно. Прежде всего, как здесь показано, гарантией такого описания является сильная экстраполяционность пространства E; это обобщает соответствующие результаты в случае экспоненциальных пространств Орлича, полученные ранее в работах [2, 7]. Кроме того, что более неожиданно, при определенных условиях верно и обратное утверждение: если этот $\mathscr{K}$-функционал допускает экстраполяционное описание, то E сильно экстраполяционно. И, наконец, в § 4 доказана новая и в определенном смысле точная экстраполяционная теорема, обобщающая теорему Яно.

§ 1. Основные обозначения и предварительные сведения

Всюду далее вложение одного банахова пространства в другое понимается как непрерывное, т. е. $X_1 \subset X_0$ означает, что из $x \in X_1$ следует: $x \in X_0$ и $\|x\|_{X_0} \le C\|x\|_{X_1}$ для некоторого $C > 0$. Под равенством $X_1 = X_0$ для банаховых пространств будем подразумевать их совпадение с эквивалентностью норм. Мы будем рассматривать вещественные функции, заданные на отрезке $[0,1]$ или на полуоси $[1,\infty)$ с обычной мерой Лебега μ, измеримые и почти всюду конечные. Как обычно, функции, равные почти всюду, отождествляются.

Напомним, что банахово функциональное пространство X называется *идеальным*, если из того, что $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \le |y(t)|$, вытекает, что $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \le \|y\|$.

Функция распределения $n_x(\tau)$ функции $x(t)$ определяется следующим образом:

$$n_x(\tau) = \mu\{t : |x(t)| > \tau\}, \quad \tau > 0.$$

Две функции $x(t)$ и $y(t)$ называются *равноизмеримыми*, если их функции распределения совпадают. *Перестановкой* функции $x(t)$ называется неотрицательная функция $x^*(t)$, определенная на $[0, \infty)$, равноизмеримая с $x(t)$, убывающая и непрерывная слева. Перестановка всегда существует и единственна и ее можно определить по формуле [9, с. 83]

$$x^*(t) = \inf\{\tau : n_x(\tau) < t\}.$$

В работе речь будет идти о симметричных функциональных пространствах, подробное изложение теории которых можно найти в монографиях [9, 10]. Банахово идеальное пространство E измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется *симметричным* (с.п.), если из того, что $y = y(t) \in X$ и $n_x(\tau) = n_y(\tau)$ $(\tau > 0)$, следует, что $x \in X$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Важным и наиболее простым примером с.п. являются L_p-пространства $(1 \le p \le \infty)$ с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p} \quad (1 \le p < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0 \le t \le 1} |x(t)|.$$

Если $p > q$, то $L_p \subset L_q$ (с константой 1). Кроме того, L_∞ является самым узким из всех с.п. на $[0, 1]$, а L_1 — самым широким [9, теорема 2.4.1]. Пространства L_p — частный случай более широкого класса пространств $L_{p,q}$, нормы в которых определяются следующим образом:

$$\|x\|_{p,q} := \left(\frac{q}{p}\int_0^1 (t^{\frac{1}{p}} x^*(t))^q\, \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \quad (1 \le q < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_{p,\infty} = \sup_{0 \le t \le 1} t^{\frac{1}{p}} x^*(t).$$

Другие примеры с.п. — пространства Лоренца и Марцинкевича. Пусть $\varphi(t)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0, 1]$ такая, что $\varphi(0) = 0$. Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < s \le 1} \frac{\varphi(s)}{s} \int_0^s x^*(t)\, dt.$$

Пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ определяется нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t)\, d\varphi(t).$$

Важной характеристикой с.п. E является его фундаментальная функция $\phi_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$, где через $\chi_{(0,t)}$ обозначена характеристическая функция (индикатор) интервала $(0, t)$. В частности,

$$\phi_{M(\varphi)}(t) = \varphi(t),\ \phi_{\Lambda(\varphi)}(t) = \varphi(t) \text{ и } \phi_{L_{p,q}}(t) = t^{1/p} \quad (1 < p < \infty,\ 1 \le q \le \infty).$$

При этом пространство $\Lambda(\varphi)$ самое узкое, а пространство $M(\varphi)$ самое широкое из всех с.п. с фундаментальной функцией $\varphi(t)$ [9, теоремы 4.5.5 и 4.5.7]. Фундаментальная функция всегда квазивогнута (напомним, что функция $\psi(t)$, определенная на $[0,1]$, называется *квазивогнутой*, если $\psi(0)=0$, $\psi(t)$ положительна и возрастает, а $\psi(t)/t$ убывает). Всякая квазивогнутая функция $\psi(t)$ эквивалентна своей наименьшей вогнутой мажоранте $\widetilde{\psi}(t)$, точнее, $1/2\widetilde{\psi}(t) \le \psi(t) \le \widetilde{\psi}(t)$ $(0 \le t \le 1)$ [9, теорема 4.1.1].

Функция растяжения положительной функции $\varphi(t)$, $t \in (0,1]$, определяется соотношением

$$\mathscr{M}_\varphi(s) = \sup_{0<t\le\min(1,1/s)} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}, \quad 0<s<\infty.$$

При этом числа

$$\gamma_\varphi = \lim_{s\to 0+} \frac{\ln \mathscr{M}_\varphi(s)}{\ln s}, \quad \delta_\varphi = \lim_{s\to\infty} \frac{\ln \mathscr{M}_\varphi(s)}{\ln s}$$

называются *нижним* и *верхним показателями растяжения функции* $\varphi(t)$. Если φ квазивогнута, то $0 \le \gamma_\varphi \le \delta_\varphi \le 1$ [9, с. 76].

Если (X_0, X_1) — банахова пара (т. е. банаховы пространства X_0 и X_1, линейно и непрерывно вложенные в некоторое отделимое линейное топологическое пространство), то естественным образом определяются пересечение $X_0 \cap X_1$ и сумма $X_0 + X_1$ с нормами

$$\|x\|_{X_0\cap X_1} = \max_{i=0,1} \|x\|_{X_i},$$

$$\|x\|_{X_0+X_1} = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_i \in X_i,\ i=0,1\}$$

соответственно. Банахово пространство X такое, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, называется *интерполяционным относительно пары* (X_0, X_1), если любой линейный оператор T, определенный на $X_0 + X_1$ и ограниченный в X_0 и в X_1, ограничен в X. Важную роль в различных вопросах теории интерполяции операторов играет $\mathscr{K}$-функционал Петре [11, § 3.1]

$$\mathscr{K}(t, x; X_0, X_1) = \inf\{\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1} : x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1\}.$$

При фиксированном $t>0$ он является нормой на сумме пространств $X_0 + tX_1$, а при фиксированном $x \in X_0 + X_1$ представляет собой возрастающую вогнутую функцию относительно переменной t.

Если F — банахово идеальное пространство функций, определенных на $[1,\infty)$, а $w = w(p)$ — положительная функция (вес), то через $F(w)$ будем обозначать идеальное пространство функций $x = x(p)$ с нормой $\|x\|_{F(w)} = \|x \cdot w\|_F$. Наконец, выражение вида $f \asymp g$ означает, что $cf \le g \le Cf$ для некоторых $c>0$ и $C>0$, причем эти константы не зависят от всех или части аргументов функций (квазинорм) f и g.

§ 2. Сильно экстраполяционные пространства и их характеризация

Пусть F — банахово идеальное пространство функций, определенных на $[1,\infty)$. Через $\mathscr{L}_F$ обозначим пространство, состоящее из всех функций $x(t)$, измеримых на $[0,1]$, для которых $\xi_x = \xi_x(p) := \|x\|_p \in F$, с нормой

$$\|x\|_{\mathscr{L}_F} := \|\xi_x\|_F.$$

Нетрудно проверить, что $\mathscr{L}_F$ — с.п. на $[0,1]$ такое, что для всех $1 \le p < \infty$

$$L_p \supset \mathscr{L}_F \supset L_\infty.$$

Определение 2.1. Будем говорить, что с.п. E *экстраполяционно* (при $p \to \infty$), если найдется такое банахово идеальное пространство F на $[1,\infty)$, что $E = \mathscr{L}_F$ (с эквивалентностью норм). В этом случае будем писать $E \in \mathscr{E}$.

Определим теперь некоторый подкласс множества экстраполяционных пространств $\mathscr{E}$ (см. [12]). Если E — с.п. на $[0,1]$, то через $\widetilde{E}$ обозначим банахово идеальное пространство функций на $[1,\infty)$ с нормой

$$\|f\|_{\widetilde{E}} := \|f(\log_2(2/t))\|_E.$$

Определение 2.2. Будем называть с.п. E *сильно экстраполяционным* ($E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$), если $E = \mathscr{L}_{\widetilde{E}}$ (с эквивалентностью норм).

В частности, соотношения (2) и (3) показывают сильную экстраполяционность пространства Зигмунда $\operatorname{Exp} L^\beta$ $(\beta > 0)$ и экспоненциального пространства Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi$ соответственно.

Одним из основных результатов работы является следующая характеризация сильно экстраполяционных пространств.

Теорема 2.3. *Для любого с.п. E на $[0,1]$ следующие условия эквивалентны:*

(a) $E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$;

(b) *в E ограниченно действует оператор $Sx(t) = x(t^2)$.*

Для доказательства теоремы 1, а также некоторых других утверждений нам понадобится следующая

Лемма 2.4. *Оператор $Sx(t) = x(t^2)$ ограничен в с.п. E тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\|Sx^*\|_E \le C\|x\|_E$$

для некоторого $C > 0$ и всех $x \in E$.

Доказательство. Так как необходимость очевидна, нужно доказать только достаточность. Пусть $x \in E$ и $\tau > 0$. Если

$$A = \{t \in [0,1] : |x(t)| > \tau\} \text{ и } B = \{t \in [0,1] : |x(t^2)| > \tau\},$$

то $B = \kappa(A)$, где $\kappa(u) = \sqrt{u}$. Поэтому (см., например, [13, лемма 9.5.1])

$$\mu\{t : |Sx(t)| > \tau\} = \mu(B) = \int\limits_A \frac{du}{2\sqrt{u}} \le \int\limits_0^{\mu\{t: x^*(t) > \tau\}} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \mu\{t : Sx^*(t) > \tau\}.$$

Тем самым $(Sx)^*(t) \le Sx^*(t)$ и, значит, по условию

$$Sx \in E \text{ и } \|Sx\|_E \le \|Sx^*\|_E \le C\|x\|_E. \quad \square$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $x = x(t)$ измерима на $[0,1]$. Рассмотрим функцию

$$\tilde{x}(t) := \|x\|_{\log_2(2/t)} \quad (0 < t \le 1).$$

Так как

$$\|x\|_p \ge \|x^* \chi_{[0,2^{-p+1}]}\|_p \ge \frac{1}{2} x^*(2^{-p+1}) \quad (p \ge 1),$$

то всегда $\|\tilde{x}\|_E \ge \frac{1}{2}\|x\|_E$. Поэтому по определению сильно экстраполяционного пространства условие (а) теоремы равносильно выполнению неравенства

$$\|\tilde{x}\|_E \le C\|x\|_E \tag{4}$$

для всех $x \in E$ и некоторого $C > 0$.

Пусть сначала оператор S ограничен в E. Так как тогда $\|S^n x\|_E \le \|S\|^n \|x\|_E$ $(n = 1, 2, \dots)$, для всех $p \ge 1$

$$\tilde{x}(2^{-p+1}) = \|x\|_p \le 2\|x^*\chi_{[0,2^{-p})}\|_p \\ \le 2\sum_{n=0}^{\infty} \|x^*\chi_{[2^{-2^{n+1}p},2^{-2^n p})}\|_p \le 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} x^*(2^{-2^{n+1}p})$$

или, равносильно,

$$\tilde{x}(2t) \le 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n} S^{n+1}x^*(t) \quad (0 < t \le 1/2).$$

Поэтому

$$\|\tilde{x}(2t)\|_E \le 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2^n}\|S\|^{n+1}\|x\|_E \le C_1\|x\|_E,$$

откуда ввиду ограниченности нормы оператора растяжения $\sigma x(t) = x(t/2)$ в любом с.п. [9, теорема 2.4.4] получаем неравенство (4) с $C = 2C_1$.

Пусть теперь $E = \mathscr{L}_{\widetilde{E}}$, т. е. из условия $x \in E$ следует $\tilde{x} \in E$, а также выполнено (4). Если $t = 2^{-p+1}$ $(p \ge 1)$, то

$$x^*(t^2) \le x^*(2^{-2p}) \le 4\|x^*\chi_{[0,2^{-2p}]}\|_p \le 4\|x^*\|_p = 4\tilde{x}(t).$$

Поэтому $\|Sx^*\|_E \le 4\|\tilde{x}\|_E \le 4C\|x\|_E$. Применяя лемму 2.4, заключаем, что оператор S ограничен в пространстве E. $\square$

Следствие 2.5. *С.п. E сильно экстраполяционно тогда и только тогда, когда существует такое $C > 0$, что для всех $x \in E$*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \|x^*\chi_{[2^{-2n},2^{-2n+1})}\|_n \chi_{[2^{-n},2^{-n+1})}\right\|_E \le C\|x\|_E.$$

Доказательство. Прежде всего опять ввиду ограниченности оператора растяжения в с.п. E [9, теорема 2.4.4]

$$\frac{1}{2}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k})\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\right\|_E \le \|x\|_E \le 2\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x^*(2^{-k+1})\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\right\|_E.$$

Отсюда, а также из элементарного неравенства

$$x^*(2^{-k+1}) \le 2\|x^*\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\|_k \le x^*(2^{-k}) \quad (1 \le k < \infty)$$

получаем, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \|x^*\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\|_k \chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\right\|_E \le \|x\|_E \\ \le 4\left\|\sum_{k=1}^{\infty} \|x^*\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\|_k \chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\right\|_E. \tag{5}$$

Утверждение вытекает теперь из последнего соотношения и теоремы 2.3. □

Замечание 2.6. В работе [14] при обсуждении соотношения (2) обращается внимание на то, что оно остается справедливым при замене L_p-нормы функции $x(t)$ «срезанными»: L_p-нормами $\|x^*\chi_{[2^{-k},2^{-k+1}]}\|_k$ $(k=1,2,\dots)$. Нисколько не умаляя значения этого феномена, используемого авторами при изучении целого ряда вопросов [14, 15], заметим, однако, что он лишен какого-либо экстраполяционного смысла, так как подобное соотношение справедливо в любом с.п. (см. (5)). Как показывает теорема 2.3, проблема состоит как раз в обратной замене «срезанных» L_p-норм «полными» (или же, как в следствии 2.5, «смещенными» L_p-нормами $\|x^*\chi_{[2^{-2k},2^{-2k+1})}\|_k$ $(k=1,2,\dots)$).

Замечание 2.7. Нетрудно видеть, что в условиях теоремы 2.3 вместо нормы в $\widetilde{E}$ можно использовать полунорму

$$\|f\|_{\widetilde{E},p_0}=\|f\chi_{[p_0,\infty)}\|_{\widetilde{E}}$$

для произвольного фиксированного $p_0>1$.

Замечание 2.8. Вместо шкалы L_p-пространств можно рассматривать также шкалу пространств $L_{p,q}$ $(1<p<\infty)$ при фиксированном $q\in[1,\infty]$, определив пространство $\mathscr{L}_{F,q}$, состоящее из всех функций $x=x(t)$, для которых $\xi_{x,q}=\xi_{x,q}(p):=\|x\|_{p,q}\in F$. Тогда, действуя точно так же, как при доказательстве теоремы 2.3, можно показать, что условия (a) и (b) из ее формулировки эквивалентны следующим:

(c) $E=\mathscr{L}_{\widetilde{E},q}$ для любого $q\in[1,\infty]$ (т. е. $\|x\|_E\asymp\|\,\|x\|_{\log_2(2/t),q}\|_E$ $(x\in E)$);

(d) существует такое $q\in[1,\infty]$, что $E=\mathscr{L}_{\widetilde{E},q}$.

В некоторых важных случаях условие (b) сильной экстраполяционности с.п. эквивалентно некоторому гораздо более простому. Напомним [8], что неотрицательная функция $\varphi(t)$ на $[0,1]$ удовлетворяет Δ^2-условию ($\varphi\in\Delta^2$), если существует такое $C>0$, что для всех $0\le t\le 1$ выполнено

$$\varphi(t)\le C\varphi(t^2),\quad 0\le t\le 1. \tag{6}$$

Предложение 2.9. *Для произвольного с.п.* E *на* $[0,1]$ *рассмотрим следующие условия:*

(i) *в* E *ограниченно действует оператор* $Sx(t)=x(t^2)$,

(ii) *фундаментальная функция* $\varphi(t)$ *пространства* E *удовлетворяет* Δ^2-*условию.*

Тогда из (i) *следует* (ii). *Обратно, если* E *интерполяционно относительно пары* $(\Lambda(\varphi),M(\varphi))$ *пространств Лоренца и Марцинкевича (в частности, совпадает с* $\Lambda(\varphi)$ *или* $M(\varphi)$*), то из* (ii) *вытекает* (i).

Доказательство. Для доказательства импликации (i)⇒(ii) достаточно условие ограниченности оператора S записать для характеристических функций $\chi_{[0,t]}$ $(0<t\le 1)$.

(ii)⇒(i). Для $E=\Lambda(\varphi)$ ограниченность произвольного линейного оператора, непрерывного в пространстве всех измеримых функций относительно сходимости по мере, равносильна его ограниченности на множестве характеристических функций [9, лемма 2.5.2]. Для оператора S последнее, в свою очередь, равносильно условию (6).

Рассмотрим случай пространства Марцинкевича. Прежде всего если $\varphi\in\Delta^2$, то для произвольного $x\in M(\varphi)$

$$\varphi(t)Sx^*(t)=\varphi(t)x^*(t^2)\le C\varphi(t^2)x^*(t^2)\le C\sup_{0<s\le 1}\varphi(s)x^*(s)\le C\|x\|_{M(\varphi)}.$$

Как легко проверить, из условия $\varphi \in \Delta^2$ следует, что $\delta_\varphi = 0$. Поэтому ввиду последнего соотношения, а также [9, теорема 2.5.3] получаем

$$\|Sx^*\|_{M(\varphi)} \le C' \sup_{0<t\le 1} Sx^*(t)\varphi(t) \le C'C\|x\|_{M(\varphi)}.$$

Тем самым остается применить лемму 2.4.

Наконец, если E интерполяционно относительно пары $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$, где $\varphi \in \Delta^2$, то по предыдущему оператор S ограничен в $\Lambda(\varphi)$ и в $M(\varphi)$, а значит, и в E. $\square$

Из теоремы 2.3 и последнего предложения получаем следующий результат, усиливающий теорему 2.3 из [12].

Теорема 2.10. *Любое с.п. E, интерполяционное относительно пары* $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$ (*в частности, $E = \Lambda(\varphi)$ или $E = M(\varphi)$*), *сильно экстраполяционно тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Delta^2$.*

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из последней теоремы, впервые получено в [8] (см. теоремы 2 и 3).

Следствие 2.11. *Если $\varphi \in \Delta^2$, то*

$$\|x\|_{M(\varphi)} \asymp \sup_{1\le p<\infty} \varphi(2^{-p})\|x\|_p \quad \text{и} \quad \|x\|_{\Lambda(\varphi)} \asymp \int_1^\infty \|x\|_p 2^{-p}\varphi'(2^{-p})\,dp.$$

В заключительной части параграфа покажем, что существуют не сильно экстраполяционные с.п., фундаментальная функция которых удовлетворяет Δ^2-условию. Более точно, мы построим замкнутое подпространство пространства Марцинкевича $M(\varphi)$, $\varphi \in \Delta^2$, в котором оператор S не действует.

Пример 2.12. Пусть φ — возрастающая вогнутая функция на $[0,1]$, $\varphi(+0) = \varphi(0) = 0$, такая, что $\varphi \in \Delta^2$. Определим индуктивно последовательность точек $t_n \in [0,1]$ следующим образом: $t_0 = 1$, а t_n будем выбирать произвольно так, чтобы

$$\frac{\varphi(t_{n-1}^2)}{\varphi(t_n)} > n.$$

Ясно, что $t_n \to 0$. Положим

$$\bar{x}(t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\varphi(t_{n-1}^2)} \chi_{(t_n^2, t_{n-1}^2]}(t)$$

и $E_0 = \{y \in M(\varphi) :$ найдутся $B > 0$ и $\beta > 0$, для которых $y^*(t) \le B\bar{x}(\beta t)$ $(0 < t \le 1)\}$. Легко видеть, что E_0 — линейное подмножество пространства Марцинкевича $M(\varphi)$. Определим пространство E как замыкание E_0 в $M(\varphi)$. Тогда E — с.п. с нормой, наследуемой из $M(\varphi)$. В частности, фундаментальная функция этого пространства $\varphi_E(t) = \varphi(t) \in \Delta^2$.

Покажем теперь, что $x_1(t) := \bar{x}(t^2) \notin E$. Для этого достаточно проверить, что

$$\inf_{y\in E_0} \|x_1 - y\|_{M(\varphi)} > 0. \tag{7}$$

Пусть $y \in E_0$. Применяя следующее известное неравенство [9, теорема 2.3.1]:

$$\|a - b\|_{M(\varphi)} \ge \|a^* - b^*\|_{M(\varphi)},$$

получим
$$\|x_1-y\|_{M(\varphi)}\ge\|x_1-y^*\|_{M(\varphi)}\ge\|(x_1-y^*)\chi_{(t_n^2,t_n]}\|_{M(\varphi)}. \tag{8}$$
Выберем $n\in\mathbb{N}$ настолько большим, чтобы выполнялись условия
$$\frac{\varphi(t_{n-1}^2)}{\varphi(t_n)}>2B \quad\text{и}\quad \left(1+\frac{1}{\beta}\right)t_n^2\le t_n,$$
где $B>0$ и $\beta\in(0,1)$ такие, что
$$y^*(t)\le B\bar{x}(\beta t).$$
Тогда
$$\begin{aligned}\|(x_1-y^*)\chi_{(t_n^2,t_n]}\|_{M(\varphi)} &\ge \|(x_1(t_n)-B\bar{x}(\beta t))\chi_{(t_n^2/\beta,t_n]}\|_{M(\varphi)}\\ &= \big(x_1(t_n)-B\bar{x}(t_{n-1}^2)\big)\varphi(t_n-t_n^2/\beta)\ge\big(\bar{x}(t_n^2)-B\bar{x}(t_{n-1}^2)\big)\varphi(t_n^2)\\ &= \left(\frac{1}{\varphi(t_n^2)}-\frac{B}{\varphi(t_{n-1}^2)}\right)\varphi(t_n^2)\ge\left(\frac{1}{\varphi(t_n)}-\frac{B}{\varphi(t_{n-1}^2)}\right)\varphi(t_n^2)\\ &= \frac{1}{\varphi(t_n)}\left(1-\frac{B\varphi(t_n)}{\varphi(t_{n-1}^2)}\right)\varphi(t_n^2)>\frac{\varphi(t_n^2)}{\varphi(t_n)}\cdot\frac{1}{2}\ge\frac{1}{2C}.\end{aligned}$$
Поэтому ввиду (8) для всех $y\in E_0$
$$\|x_1-y\|_{M(\varphi)}\ge\frac{1}{2C},$$
и, значит, (7) доказано. Тем самым по теореме 2.3 с.п. E не сильно экстраполяционно.

§ 3. Экстраполяционное описание $\mathscr{K}$-функционала банаховой пары $(\mathscr{L}_F, L_\infty)$

Из теоремы 2.3 следует, что любое с.п., интерполяционное относительно пары сильно экстраполяционных пространств (E_0,E_1), само сильно экстраполяционно. Здесь мы покажем, что $\mathscr{K}$-функционал $\mathscr{K}(t,f;E,L_\infty)$, где $E\in\mathscr{SE}$, имеет экстраполяционное описание, обобщив тем самым соответствующие результаты в случае экспоненциальных пространств Орлича, полученные ранее в работах [6, 7]. Кроме того, будет доказано, что при определенных условиях верно и обратное: если этот $\mathscr{K}$-функционал допускает экстраполяционное описание, то $E\in\mathscr{SE}$.

Теорема 3.1. *Пусть E — с.п. на $[0,1]$.*

(i) *Если $E\in\mathscr{SE}$, то*
$$\mathscr{K}(t,f;E,L_\infty)\asymp\mathscr{K}(t,\|f\|_{\log_2 2/u};E,L_\infty) \tag{9}$$
с константами, не зависящими от $f\in E$ и $t>0$.

(ii) *Если для некоторого банахова идеального пространства F на $[1,\infty)$, $F\supset L_\infty$, с константами, не зависящими от $f\in E$ и $t>0$,*
$$\mathscr{K}(t,f;E,L_\infty)\asymp\mathscr{K}(t,\|f\|_p;F,L_\infty[1,\infty)), \tag{10}$$
то фундаментальная функция φ пространства E удовлетворяет Δ^2-условию.

Для доказательства нам потребуется несколько вспомогательных утверждений, первое из которых фактически известно, однако мы приведем его доказательство для полноты изложения.

Пусть E — с.п. на $[0,1]$, $E\ne L_\infty$. Тогда его фундаментальная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to0+}\varphi(t)=0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi(t)$ строго возрастает на $[0,1]$ и $\varphi(1)=1$.

Лемма 3.2. *Для всех $f \in E$ и $0 < t \le 1$*

$$\|f^*\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E \le \mathscr{K}(t, f; E, L_\infty) \le 2\|f^*\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E.$$

Доказательство. Так как $\mathscr{K}(t, f; E, L_\infty) = \mathscr{K}(t, f^*; E, L_\infty)$, достаточно рассмотреть случай, когда $f = f^*$. С одной стороны, $f = g + h$, где $g := f\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}$ и $h := f - g$. Тогда

$$\mathscr{K}(t, f; E, L_\infty) \le \|g\|_E + t\|h\|_\infty \le \|f\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E + f(\varphi^{-1}(t))\|\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E \le 2\|f\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E,$$

и правая часть неравенства доказана.

Обратно, если $f = f_0 + f_1$, где $f_0 \in E$, $f_1 \in L_\infty$, то

$$\|f_0\|_E + t\|f_1\|_\infty \ge \|f_0\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E + \|f_1\|_\infty\|\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E \ge \|(f_0 + f_1)\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E = \|f\chi_{[0,\varphi^{-1}(t)]}\|_E.$$

Переходя к инфимуму по всем представлениям, получаем левую часть доказываемого неравенства. $\square$

Пусть теперь $E \in \mathscr{E}$, т. е. $E = \mathscr{L}_F$, где F — банахово идеальное пространство на $[1, \infty)$. Если $E \ne L_\infty$, то существует $f \in E$ такая, что $\lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p = \infty$. Поэтому для функции

$$\psi(u) := \|\chi_{[u,\infty)}\|_F \quad (u \ge 1) \tag{11}$$

имеем $\lim\limits_{u\to+\infty} \psi(u) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что ψ строго убывает на $[1, \infty)$ и $\psi(1) = 1$.

Лемма 3.3. *Для всех функций $a \in F$, неотрицательных и монотонно возрастающих на $[1, \infty)$, и $0 < t \le 1$*

$$\|a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F \le \mathscr{K}(t, a; F, L_\infty[1, \infty)) \le 2\|a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F.$$

Доказательство. Рассмотрим представление

$$a = b + c, \quad \text{где } b = a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)},\ c = a - b.$$

Так как функция $a(s)$ неотрицательна и возрастает, по определению $\mathscr{K}$-функционала

$$\mathscr{K}(t, a; F, L_\infty[1, \infty)) \le \|b\|_F + t\|c\|_{L_\infty[1,\infty)} \le \|a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F + ta(\psi^{-1}(t)) \le \|a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F + a(\psi^{-1}(t))\|\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F \le 2\|a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F.$$

Обратно, если $a = a_0 + a_1$, где $a_0 \in F$, а $a_1 \in L_\infty[1, \infty)$, то

$$\|a_0\|_F + t\|a_1\|_{L_\infty[1,\infty)} \ge \|a_0\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F + \|a_1\|_{L_\infty[1,\infty)}\|\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F \ge \|(a_0 + a_1)\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F = \|a\chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F.$$

Переходя слева к инфимуму по всем представлениям, получаем нужное неравенство, и лемма доказана. $\square$

Важное значение далее будет иметь связь между фундаментальной функцией φ экстраполяционного пространства $E = \mathscr{L}_F$ и функцией ψ, определенной соотношением (11). В частности, если $E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$, то

$$\psi(u) = \|\chi_{[u,\infty)}\|_{\widetilde{E}} = \|\chi_{[u,\infty)}(\log_2(2/s))\|_E = \varphi(2^{1-u}) \quad (u \ge 1),$$

откуда

$$\varphi(t)=\psi(\log_2(2/t)) \quad (0<t\le 1). \tag{12}$$

В общем случае справедливо следующее: для любого $h\in(0,1)$ существует такое $A=A(h)>0$, что

$$\psi(h\log_2(2/t))\le A\varphi(t), \quad \text{если } 0<t\le 2^{1-1/h}. \tag{13}$$

Действительно, если $p\ge h\log_2(2/t)$, то $t^{1/p}\ge t^{\frac{1}{h\log_2(2/t)}}\ge 2^{-1/h}$, откуда по определению φ и ψ получаем $\varphi(t)\ge C^{-1}2^{-1/h}\psi(h\log_2(2/t))$, где C — константа эквивалентности норм пространств E и $\mathscr{L}_F$. Тем самым (13) верно с $A=2^{1/h}C$.

В доказательстве второй части теоремы 3.1 будет использоваться следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть $E=\mathscr{L}_F$, где F — банахово идеальное пространство на $[1,\infty)$; φ — фундаментальная функция E. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *существует $C_1>0$ такое, что для всех $0<t\le 1$*

$$\varphi(t)\le C_1\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)),\infty)}\|_F; \tag{14}$$

(b) *существуют $C_2>0$ и $0<h<1$ такие, что для всех $0<t\le 2^{1-1/h}$*

$$\varphi(t)\le C_2\psi(h\log_2(2/t)). \tag{15}$$

Доказательство. Предположим сначала, что выполнено условие (b). Если $0<t\le 2^{1-1/h}$, то по определению ψ

$$\begin{aligned}\varphi(t)\le C_2\|\chi_{[h\log_2(2/t),\infty)}\|_F &\le 2^{1/h}C_2\|t^{\frac{1}{h\log_2(2/t)}}\chi_{[h\log_2(2/t),\infty)}\|_F\\ &\le 2^{1/h}C_2\|t^{1/p}\chi_{[h\log_2(2/t),\infty)}\|_F.\end{aligned}$$

Кроме того, так как функция ψ^{-1} убывает, из (13) следует, что

$$\psi^{-1}(A\varphi(t))\le h\log_2\frac{2}{t}, \quad \text{если } 0<t\le 2^{1-1/h}.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения получаем, что

$$\varphi(t)\le 2^{1/h}C_2\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(A\varphi(t)),\infty)}\|_F.$$

В то же время по лемме 3.3 и ввиду вогнутости $\mathscr{K}$-функционала

$$\begin{aligned}\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(A\varphi(t)),\infty)}\|_F &\le \mathscr{K}(A\varphi(t),t^{1/p};F,L_\infty[1,\infty))\\ &\le A\mathscr{K}(\varphi(t),t^{1/p};F,L_\infty[1,\infty))\le 2A\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)),\infty)}\|_F.\end{aligned}$$

Тем самым неравенство (14) доказано для $0<t\le 2^{1-1/h}$, а значит, и для всех $0<t\le 1$.

Докажем обратную импликацию: (a)$\Rightarrow$(b). Пусть пока h — произвольное число из интервала $(0,1/2)$. Тогда если $0<t\le 2^{1-1/h}$, то $t<1/2$. Тем самым $\frac{\log_2 t}{1-\log_2 t}\le -\frac{1}{2}$ и, значит,

$$t^{h^{-1}\log_2^{-1}(2/t)}\le 2^{-(2h)^{-1}}.$$

Поэтому, предполагая, что $h\log_2(2/t)>\psi^{-1}(\varphi(t))$, получим

$$\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)),h\log_2(2/t))}\|_F\le t^{h^{-1}\log_2^{-1}(2/t)}\|\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)),\infty)}\|_F\le 2^{-(2h)^{-1}}\varphi(t).$$

Таким образом, если выбрать $h \in (0,1/2)$ так, что $2C_1 2^{-(2h)^{-1}} < 1$, то ввиду соотношения (14)

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\le C_1\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)),\infty)}\|_F \\ &\le C_1\|t^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(t)),h\log_2(2/t))}\|_F + C_1\|t^{1/p}\chi_{[h\log_2(2/t),\infty)}\|_F \\ &\le C_1 2^{-\frac{1}{2h}}\varphi(t) + C_1\psi(h\log_2(2/t)) \le (1/2)\varphi(t) + C_1\psi(h\log_2(2/t)),\end{aligned}$$

значит,

$$\varphi(t) \le 2C_1\psi(h\log_2(2/t)) \quad (0 < t \le 2^{1-1/h}).$$

Так как последнее неравенство является непосредственным следствием соотношения(14) в случае, когда $h\log_2(2/t) \le \psi^{-1}(\varphi(t))$, лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. Поскольку для $E = L_\infty$ оба утверждения теоремы очевидны, мы ограничимся рассмотрением случая, когда $E \ne L_\infty$. Тем самым можно также предположить, что фундаментальная функция φ пространства E удовлетворяет условиям, приведенным перед леммой 3.2. Так как $\varphi(1) = 1$, имеем $\|f\|_E \le \|f\|_\infty$ $(f \in L_\infty)$ и, значит,

$$\mathscr{K}(t, f; E, L_\infty) = \|f\|_E \quad (t \ge 1). \tag{16}$$

Кроме того, $\|a\|_{\widetilde{E}} \le \|a\|_{L_\infty[1,\infty)}$ $(a \in L_\infty[1,\infty))$, следовательно, если $a \in \widetilde{E}$, то

$$\mathscr{K}(t, a; \widetilde{E}, L_\infty[1,\infty)) = \|a\|_{\widetilde{E}} \quad (t \ge 1).$$

Отсюда и из (16) следует, что при условии $E = \mathscr{L}_{\widetilde{E}}$ выполнено

$$\mathscr{K}(t, f; E, L_\infty) \asymp \mathscr{K}(t, \|f\|_p; \widetilde{E}, L_\infty[1,\infty)) \quad (t \ge 1).$$

Таким образом, ввиду лемм 3.2 и 3.3, а также равенства (12) утверждение (i) будет доказано, если показать, что

$$\left\| \left(\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\, ds \right)^{1/p} \right\|_{\widetilde{E}} \asymp \|\|f\|_p \chi_{[V(t),\infty)}\|_{\widetilde{E}} \quad (0 < t \le 1), \tag{17}$$

где $V(t) := \log_2(2/\varphi^{-1}(t))$.

Прежде всего если $p \ge V(t)$, то

$$\left(\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\, ds \right)^{1/p} \ge \varphi^{-1}(t)^{1/p}\|f\|_p \ge \varphi^{-1}(t)^{1/V(t)}\|f\|_p.$$

Так как $\frac{\log_2 z}{1-\log_2 z} \ge -1$ $(0 < z \le 1)$, учитывая определение $V(t)$, из предыдущего соотношения получаем

$$\left(\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\, ds \right)^{1/p} \ge \frac{1}{2}\|f\|_p \quad (p \ge V(t)),$$

откуда

$$\left\| \left(\int\limits_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\, ds \right)^{1/p} \right\|_{\widetilde{E}} \ge \frac{1}{2}\|\|f\|_p \chi_{[V(t),\infty)}\|_{\widetilde{E}} \quad (0 < t \le 1). \tag{18}$$

При доказательстве противоположного неравенства можно предположить, что

$$\{s \in [0,1] : f^*(s) > 0\} \subset [0, \varphi^{-1}(t)]. \tag{19}$$

Если $2^{1-p} \le \varphi^{-1}(t)$ (или, что то же самое, $p \ge V(t)$), то

$$f^*(2^{1-p}) \le 2\left(\int_0^{2^{1-p}} f^*(s)^p\,ds\right)^{1/p} \le 2\|f\|_p \chi_{[V(t),\infty)}(p).$$

Тем самым ввиду (19)

$$\|f\|_E = \|f^*(2^{1-p})\|_{\widetilde{E}} \le 2\|\|f\|_p \chi_{[V(t),\infty)}\|_{\widetilde{E}}.$$

С другой стороны, так как пространство E сильно экстраполяционно, имеем

$$\left\|\left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\,ds\right)^{1/p}\right\|_{\widetilde{E}} \le C\|f\|_E.$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\left\|\left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\,ds\right)^{1/p}\right\|_{\widetilde{E}} \le 2C\|\|f\|_p \chi_{[V(t),\infty)}\|_{\widetilde{E}},$$

что вместе с (18) дает (17). Таким образом, утверждение (i) доказано.

Перейдем к доказательству утверждения (ii). Прежде всего так как по условию $F \supset L_\infty[1,\infty)$, то для $a \in F$

$$\mathscr{K}(t, a; F, L_\infty[1,\infty)) \asymp \|a\|_F \quad (t \ge 1).$$

Это соотношение вместе с (16) и (10) показывает, что $E = \mathscr{L}_F$. Поэтому ввиду лемм 3.2 и 3.3 (мы можем считать, что функция ψ, определенная равенством (11), удовлетворяет условиям, упомянутым перед второй из них), а также соотношения (10)

$$\left\|\left(\int_0^{\varphi^{-1}(t)} f^*(s)^p\,ds\right)^{1/p}\right\|_F \asymp \|\|f\|_p \chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F \quad (0 < t \le 1).$$

Взяв здесь $f = \chi_{[0,u)}$, а $t = \varphi(u)$, где $0 < u \le 1$, получим, что

$$\varphi(u) \asymp \|u^{1/p}\|_F \le C\|u^{1/p}\chi_{[\psi^{-1}(\varphi(u)),\infty)}\|_F.$$

Таким образом, по лемме 3.4 имеет место (15). Отсюда и из (13) для некоторого $h \in (0,1)$ и всех $0 < u \le 2^{1/2-1/h}$

$$\begin{aligned}\varphi(u) \le C_2\psi(h\log_2(2/u)) &= C_2\psi((h/2)\log_2(2/u)^2)\\ &\le C_2\psi((h/2)\log_2(2/u^2)) \le C_2 A(h/2)\varphi(u^2),\end{aligned}$$

т. е. $\varphi \in \Delta^2$. Теорема доказана. $\square$

Известно, что существуют такие пространства Марцинкевича $M(\varphi) \in \mathscr{E}$, что $\varphi \notin \Delta^2$ [8, пример 1]. В то же время из теорем 2.10 и 3.1 вытекает

Следствие 3.5. *Если с.п. E интерполяционно относительно некоторой банаховой пары вида $(\Lambda(\varphi), M(\varphi))$ (в частности, $E = \Lambda(\varphi)$ или $E = M(\varphi)$), то следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует банахово идеальное пространство F на $[1,\infty)$, $F \supset L_\infty[1,\infty)$, такое, что с константами, не зависящими от $f \in E$ и $t > 0$,*

$$\mathscr{K}(t, f; E, L_\infty) \asymp \mathscr{K}(t, \|f\|_p; F, L_\infty[1,\infty));$$

(ii) $\varphi \in \Delta^2$.

При этом в обоих случаях соотношение из условия (i) *выполнено для* $F = \widetilde{E}$.

Пример 3.6. Пусть E — экспоненциальное пространство Орлича $\operatorname{Exp} L^\Phi$, построенное по функции $e^{\Phi(u)} - 1$, где Φ — возрастающая выпуклая функция на полуоси $(0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$. Хорошо известно [16, 17], что $\operatorname{Exp} L^\Phi = M(\varphi)$ (с эквивалентностью норм), где $\varphi(u) = 1/\Phi^{-1}(\log_2 2/u)$. Так как ввиду вогнутости функции Φ^{-1}

$$\Phi^{-1}(\log_2(2/u^2)) \le \Phi^{-1}(2\log_2(2/u)) \le 2\Phi^{-1}(\log_2(2/u)),$$

то $\varphi(u) \le 2\varphi(u^2)$, значит, $\varphi \in \Delta^2$. Таким образом, $\operatorname{Exp} L^\Phi \in \mathscr{S}\mathscr{E}$ и

$$\mathscr{K}(t, f; \operatorname{Exp} L^\Phi, L_\infty) \asymp \|\|f\|_p \chi_{[\psi^{-1}(t),\infty)}\|_F \quad (0 < t \le 1).$$

В этом случае $\psi^{-1}(t) = \Phi(1/t)$ $(0 < t \le 1)$ и, как показано в [8], $F = L_\infty(\varphi(2^{-u}))$. Поэтому

$$\mathscr{K}(t, f; \operatorname{Exp} L^\Phi, L_\infty) \asymp \sup_{p \ge \Phi(1/t)} \frac{\|f\|_p}{\Phi^{-1}(p)} \quad (0 < t \le 1)$$

или

$$\mathscr{K}(t, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\Phi) \asymp t\mathscr{K}(1/t, f; \operatorname{Exp} L^\Phi, L_\infty) \asymp t \sup_{p \ge \Phi(t)} \frac{\|f\|_p}{\Phi^{-1}(p)} \quad (t \ge 1).$$

Последнее соотношение с точностью до замены переменной совпадает с утверждением предложения 1 в [7] (см. также теорему 2 в [6]). В степенном случае, т. е. когда $\Phi(t) = t^\beta$, мы получаем классическое пространство Зигмунда $\operatorname{Exp} L^\beta$, для которого аналогичное соотношение

$$\mathscr{K}(t, f; L_\infty, \operatorname{Exp} L^\beta) \asymp t \sup_{p \ge t^\beta} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\beta}} = t \sup_{p \ge t} \frac{\|f\|_{p\beta}}{p} \quad (t \ge 1)$$

справедливо для всех $\beta > 0$ [2, теорема 2].

§ 4. Новая экстраполяционная теорема

Пусть, как обычно, $x^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t x^*(s)\,ds$. По с.п. E определим пространство $E(\log^{-1})$ следующим образом: оно состоит из всех таких функций $x(t)$, что $x^{**}(t)\log_2^{-1} 2/t \in E$, с нормой $\|x\|_{E(\log^{-1})} = \|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\|_E$. Пространства такого вида возникают как в теории интерполяции операторов слабого типа [9, гл. II, § 6], так и при изучении различных вопросов геометрии с.п. (см., например, [18, теорема 2.17]).

Покажем сначала, что если E сильно экстраполяционно, то замена в выражении для нормы $E(\log^{-1})$ двух «звездочек» одной приводит к эквивалентному функционалу.

Предложение 4.1. *Пусть $E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$. Тогда пространство $E(\log^{-1})$ состоит из всех таких функций $x(t)$, что $x^*(t)\log_2^{-1}(2/t) \in E$ и*

$$\|x\|_{E(\log^{-1})} \asymp \|x^* \log_2^{-1}(2/t)\|_E. \tag{20}$$

Доказательство. Так как $x^{**}(t)$ убывает, то

$$\begin{aligned}\big\|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\cdot\chi_{[1/2,1]}\big\|_E &\le 2\|x^{**}(t)\cdot\chi_{[1/2,3/4]}\|_E \\ &\le 6\big\|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\cdot\chi_{[1/4,1/2]}\big\|_E.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\|x\|_{E(\log^{-1})} &\le \big\|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\cdot\chi_{[0,1/2]}\big\|_E + \big\|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\cdot\chi_{[1/2,1]}\big\|_E \\ &\le 7\big\|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\cdot\chi_{[0,1/2]}\big\|_E.\end{aligned}$$

Далее считаем, что $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда

$$x^{**}(t) = \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{t^{2^{n+1}}}^{t^{2^n}} x^*(s)\,ds \le \frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty} x^*(t^{2^{n+1}})t^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} x^*(t^{2^{n+1}})t^{2^n-1},$$

значит,

$$\begin{aligned}x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t) &\le \sum_{n=0}^{\infty} x^*(t^{2^{n+1}})\log_2^{-1}\left(\frac{2}{t^{2^{n+1}}}\right)\frac{\log_2(2/t^{2^{n+1}})}{\log_2(2/t)}t^{2^n-1} \\ &\le \sum_{n=0}^{\infty} S^{n+1}\left(x^*(t)\log_2^{-1}\left(\frac{2}{t}\right)\right)2^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1},\end{aligned}$$

где, как и ранее, $Sx(t) = x(t^2)$. Так как по теореме 2.3 оператор S ограничен в E, то в итоге

$$\begin{aligned}\|x\|_{E(\log^{-1})} &= \big\|x^{**}(t)\log_2^{-1}(2/t)\big\|_E \\ &\le 7\left(\sum_{n=0}^{\infty}\|S\|^{n+1}2^{n+2-2^n}\right)\big\|x^*(t)\log_2^{-1}(2/t)\big\|_E = C\big\|x^*(t)\log_2^{-1}(2/t)\big\|_E.\end{aligned}$$

Ввиду неравенства $x^*(t) \le x^{**}(t)$ противоположное соотношение очевидно, и тем самым предложение доказано. $\square$

Следствие 4.2. *В условиях предыдущего предложения пространство $E(\log^{-1})$ сильно экстраполяционно. При этом $E(\log^{-1}) = \mathscr{L}_{\widetilde{E}(1/p)}$*, где $\|f\|_{\widetilde{E}(1/p)} := \|f/p\|_{\widetilde{E}}$.

Доказательство. Соотношение (20) показывает, что из ограниченности оператора S в E вытекает его ограниченность в $E(\log^{-1})$. Следовательно, по теореме 2.3 это пространство также сильно экстраполяционно. Последнее утверждение следствия получается из непосредственно проверяемого равенства: $\widetilde{E(\log^{-1})} = \widetilde{E}(1/p)$. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть T — линейный оператор, ограниченный в L_p для всех $p \ge p_0 \ge 1$, и для некоторого $C > 0$*

$$\|T\|_{L_p \to L_p} \le Cp \quad (p \ge p_0). \tag{21}$$

Тогда T ограниченно действует из E в $E(\log^{-1})$ для любого пространства $E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$.

Кроме того, это утверждение точно в следующем смысле: существует линейный оператор T_0, удовлетворяющий условию (21) и такой, что ограниченность T_0 из $E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$ в с.п. F влечет включение

$$E(\log^{-1}) \subset F. \tag{22}$$

Доказательство. Используя оценку (21), следствие 4.2 и замечание 2.7, получаем

$$\|Tx\|_{E(\log^{-1})} \le C_1 \|\|Tx\|_p/p\|_{\widetilde{E},p_0} \le C_2 \|\|x\|_p\|_{\widetilde{E},p_0} \le C_3 \|x\|_E.$$

В качестве T_0 возьмем оператор, сопряженный к оператору Харди — Литтлвуда, т. е.

$$T_0x(t) = \int_t^1 \frac{x(s)ds}{s}.$$

Этот оператор ограничен в L_p, если $1 \le p < \infty$, с нормой $\|T_0\|_{L_p \to L_p} = p$. Согласно теореме 4.3 оператор T_0 ограниченно действует из E в $E(\log^{-1})$ для любого $E \in \mathscr{S}\mathscr{E}$. Предположив, что T_0 ограничен из E в с.п. F, докажем (22).

Пусть $x \in E(\log^{-1})$. Тогда для некоторого $y \in E$

$$x^*(t) \le y(t)\log_2(2/t) \quad (0 < t \le 1),$$

откуда, используя свойство перестановок [9, с. 93], получаем

$$x^*(t) \le (y(t)\log_2(2/t))^* \le y^*(t/2)\log_2(4/t) \le z^*(t)\log_2(2/t),$$

где $z \in E$. Положим $z_1(t) = 8z^*(t^2)$. Так как E сильно экстраполяционно, по теореме 2.3 $z_1 \in E$ и

$$\begin{aligned} T_0z_1(t) &\ge \int_t^{\sqrt{t}} \frac{z_1(s)ds}{s} \ge z_1(\sqrt{t}) \int_t^{\sqrt{t}} \frac{ds}{s} \\ &= 4z^*(t)\ln\frac{1}{t} \ge z^*(t)\log_2(2/t)\cdot\chi_{[0,1/2]}(t) \ge x^*(t)\chi_{[0,1/2]}(t). \end{aligned}$$

Если T_0 действует из E в F, то $T_0z_1 \in F$, откуда ввиду предыдущего неравенства $x \in F$, т. е. выполнено (22). $\square$

Замечание 4.4. Если $E = L_\infty$, то (см. (1)) пространство $E(\log^{-1})$ совпадает с пространством Зигмунда $\operatorname{Exp} L^1$. В этом случае из теоремы 4.3 вытекает утверждение классической теоремы Яно: если выполнено (21), то оператор T ограниченно действует из L_∞ в пространство $\operatorname{Exp} L^1$.

Замечание 4.5. В одном частном случае утверждение теоремы 4.3 вытекает из следующей интерполяционной теоремы, приведенной в работе [19]. Пусть $1 < p < \infty$, E — с.п., интерполяционное между L_1 и L_∞, такое, что $\log_2(2/t) \in E$. Тогда любой линейный оператор A, имеющий слабый тип $(1,1)$ и ограниченный в L_p, ограниченно действует из пространства $E(\log)$ с нормой $\|x\|_{E(\log)} = \|x^*(t)\log_2(2/t)\|_E$ в E.

Если теперь $T = A^*$ (т. е. T — оператор, сопряженный к A), то в условиях этой теоремы T ограничен из E' в $E'(\log^{-1})$, где E' — с.п., ассоциированное к E [9, с. 65]. Заметим, что ввиду интерполяционной теоремы Марцинкевича [11, теорема 1.3.1] для нормы такого оператора выполнена оценка (21). В то же время условия сформулированной теоремы существенно ограничительнее и она не «покрывает» утверждения теоремы 4.3. Для обоснования этого можно, например, использовать конструкцию, кратко описанную в [20, § 5.9]. Пусть $\psi(p)$ $(1 < p < 3/2)$ — произвольная функция такая, что $\lim\limits_{p\to 1}\psi(p) = \infty$. Тогда существует оператор свертки A, ограниченный из L_p в L_2 для всех $p \in (1, 3/2)$, $\|A\|_{L_p\to L_p} \le \|A\|_{L_p\to L_2} \le \psi(p)$, который одновременно с этим не имеет слабого типа $(1,1)$. Тогда если $\psi(p) \le C(p-1)^{-1}$ для некоторого $C > 0$, то для оператора $T = A^*$ выполнены условия теоремы 4.3 и не выполнены условия теоремы из [19].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Milman M.* Extrapolation and optimal decompositions with applications to analysis. Berlin: Springer-Verl., 1996. (Lecture Notes in Math.; V. 1580).
2. *Асташкин С. В.* Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p-пространств // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 23–42.
3. *Yano S.* An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3, N 2. P. 296–305.
4. *Jawerth B., Milman M.* Extrapolation spaces with applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991. (Mem. Amer. Math. Soc.; V. 89).
5. *Jawerth B., Milman M.* New results and applications of extrapolation theory // Isr. Math. Conf. Proc. 1992. V. 5. P. 81–105.
6. *Асташкин С. В.* Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p-пространств // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 3. С. 73–77.
7. *Асташкин С. В.* Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 26, № 2. С. 264–289.
8. *Асташкин С. В., Лыков К. В.* Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞ // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 974–992.
9. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
10. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces. 2. Function spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
11. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
12. *Лыков К. В.* Экстраполяция в шкале L_p-пространств и сходимость ортогональных рядов в пространствах Марцинкевича // Вестн. СамГУ. 2006. № 2. С. 28–43.
13. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
14. *Edmunds D. E., Krbec M.* On decomposition in exponential Orlicz spaces // Math. Nachr. 2000. V. 213, N 1. P. 77–88.
15. *Edmunds D. E., Krbec M.* Decomposition and Moser's lemma // Rev. Mat. Compl. 2002. V. 15, N 1. P. 57–74.
16. *Lorentz G. G.* Relations between function spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 127–132.
17. *Рутицкий Я. Б.* О некоторых классах измеримых функций // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 205–208.
18. *Astashkin S. V., Curbera G. P.* Symmetric kernel of Rademacher multiplicator spaces // J. Funct. Anal. 2005. V. 226, N 1. P. 173–192.
19. *Дмитриев А. А, Семенов Е. М.* Об операторах слабого типа $(1,1)$ // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 20, № 3. С. 656–658.
20. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.

Статья поступила 17 января 2008 г.

Асташкин Сергей Владимирович, Лыков Константин Владимирович
Самарский гос. университет, ул. Академика Павлова, 1, Самара 443011
astashkn@ssu.samara.ru, alkv@list.ru