Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 519.71

О РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ БЕСПОВТОРНЫМИ ФОРМУЛАМИ В ОДНОМ БАЗИСЕ

И. К. Шаранхаев

Аннотация. Изучается представление булевых функций формулами. Предлагается критерий бесповторности булевых функций в базисе $\{\vee, \cdot, -, 0, 1, x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)\}$.

Ключевые слова: булева функция, формула, базис, бесповторная функция, слабоповторная функция, предэлементарный базис.

Введение

В работе изучается представление булевых функций формулами в одном конечном базисе (на протяжении всей статьи под базисом будем понимать конечное полное множество булевых функций). Поясним выбор базиса.

Под *сложностью* формулы Φ понимаем число всех вхождений символов переменных в Φ. *Сложностью* $L_B(f)$ булевой функции f в базисе B называется наименьшая из сложностей формул в B, представляющих функцию f. При сравнении базисов по сложности реализации булевых функций формулами на множестве всех базисов вводится частичный порядок: $B_1 \leq B_2$, если существует число c такое, что $L_{B_1}(f) \leq cL_{B_2}(f)$ для любой булевой функции f, при этом говорят, что B_1 *предшествует* B_2. Если $B_1 \leq B_2$ и $B_2 \leq B_1$, то базисы B_1 и B_2 называются *эквивалентными.* Если $B_1 \leq B_2$ и $B_2 \nleq B_1$, то $B_1 < B_2$. Базис B_1 *непосредственно предшествует* B_2, если $B_1 < B_2$ и не существует базиса B такого, что $B_1 < B < B_2$.

Таким образом, имеем частично упорядоченное множество классов эквивалентности булевых базисов. Проблема сравнения булевых базисов в общем виде решена Д. Ю. Черухиным [1]. Им доказано, что базис B предшествует базису B' тогда и только тогда, когда все функции из B' бесповторно выразимы в B. Ранее О. Б. Лупановым было замечено (результат сформулирован в [2]), что базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ является наибольшим элементом при введенном порядке, т. е. булевы функции реализуются формулами в этом базисе наихудшим образом. Тем не менее в силу очевидных причин именно базис B_0 наиболее хорошо изучен в настоящее время. В работе [3] В. А. Стеценко рассмотрел базисы, непосредственно предшествующие базису B_0, которые здесь будем называть предэлементарными. Непосредственно из определений следует, что в таких базисах реализация булевых функций в указанном смысле лучше, а между B_0 и любым предэлементарным базисом не существует промежуточного. Отметим, что согласно [4] предэлементарные базисы, не являющиеся эквивалентными, несравнимы по данному порядку.

В этой статье внимание обращено к одному из предэлементарных базисов.

Формула Φ над базисом B называется *бесповторной*, если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется *бесповторной* в базисе B, если существует бесповторная формула Φ над B, представляющая функцию f. В противном случае f называется *повторной* в B. В работах [2, 5–9] даются необходимые и достаточные условия бесповторности булевых функций в базисах $B_0 =\{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$, $B_1 =\{\vee, \cdot, -, 0, 1, \oplus\}$ и во всех предэлементарных базисах ранга 3. В настоящей работе предлагается критерий бесповторности булевых функций в предэлементарном базисе $B^* = B_0 \cup \{g\}$, где $g = x_1(x_2 \vee x_3x_4) \vee x_5(x_3 \vee x_2x_4)$.

Все неопределяемые понятия можно найти, например, в [10]. Будем использовать следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, z, u, v, возможно, с индексами; константы обозначаются символами $\sigma, \tau, \gamma, \delta$, возможно, с индексами; символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1, \ldots, x_n)$; $|\tilde{x}|$ — длина набора $\tilde{x}$; rank f — ранг функции f; $\rho(f)$ — множество всех существенных переменных функции f; $\delta(f)$ — множество всех фиктивных переменных функции f; S — множество всех самодвойственных функций; P_B — множество всех бесповторных функций в базисе B; S_B — множество всех слабоповторных функций в базисе B;

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функция, получаемая из $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ, называется *остаточной по переменной* x_i и обозначается через $f^\sigma_{x_i}$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Назовем переменную x_i функции f *фиктивной*, если $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$, и *существенной* в противном случае.

Рангом функции f называется число ее существенных переменных. Под рангом базиса понимаем наибольший из рангов входящих в него функций.

Функция f называется *слабоповторной* в базисе B, если любая остаточная функция от функции f является бесповторной, а сама f повторна в базисе B.

Базис $B_0 = \{\vee, \cdot, -, 0, 1\}$ называется *элементарным*, а базис $B_0 \cup \{f\}$, где f слабоповторна в B_0, — *предэлементарным.*

Функция f называется *самодвойственной*, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n).$$

Будем говорить, что функции f и g *связаны отношением* $\preceq$, и писать $f \preceq g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется неравенство $f(\tilde{\sigma}) \le g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется *обобщенно монотонной по переменной* x, если выполняется либо $f^0_x \preceq f^1_x$, либо $f^0_x \succeq f^1_x$. Если функция f является обобщенно монотонной по переменной x, то для краткости будем писать $f \in M_x$.

Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g^\sigma\big(x^{\sigma_1}_{i_1}, \ldots, x^{\sigma_n}_{i_n}\big),$$

где $(i_1, \ldots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел от 1 до n. Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i называется функция

$$f'_{x_i} = f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}.$$

Понятие производной функции по переменной распространяется индуктивно на множество переменных следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_s}}=\frac{\partial\Big(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{s-1}}}\Big)}{\partial x_{i_s}}.$$

Функция называется *нечетной*, если число наборов, на которых функция равна 1, является нечетным, и *четной* в противном случае.

Множество булевых функций P, содержащее тождественную функцию, называется *наследственным*, если для любой функции $f\in P$ любая остаточная функция f_x^σ принадлежит P.

Множество булевых функций P называется *инвариантным*, если для любых функций $f(\tilde u,y)$, $g(\tilde v)\in P$, где $\tilde u\cap\tilde v=\varnothing$, справедливо включение $f(\tilde u,g(\tilde v))\in P$.

1. Вспомогательные утверждения

При доказательстве основного результата будут использоваться следующие утверждения.

Предложение 1 [6]. *Множество булевых функций P является наследственным и инвариантным тогда и только тогда, когда P есть множество всех бесповторных функций над некоторым базисом B.*

Следствие 1. *Если для наследственного инвариантного множества булевых функций P и базиса B верно, что $B\subseteq P$ и $S_B\cap P=\varnothing$, то $P_B=P$.*

Таким образом, для доказательства того, что некоторое множество булевых функций P совпадает с множеством всех бесповторных функций над некоторым базисом B, достаточно показать, что P обладает свойствами наследственности и инвариантности, и проверить, что все слабоповторные в B функции не входят в P.

Предложение 2 [11]. *Следующая система булевых функций является полной системой представителей классов эквивалентности по отношению обобщенной однотипности для булевых функций, слабоповторных в предэлементарном базисе B^*:*

$$x_1(x_2\vee x_3)\vee x_3x_4;\quad x_1(x_2\vee\dots\vee x_n)\vee x_2\cdot\ldots\cdot x_n,\ n\ge 3;$$
$$x_1(x_2\vee x_3\cdot\ldots\cdot x_n)\vee x_2\cdot\bar x_3\cdot\ldots\cdot\bar x_n,\ n\ge 3;$$
$$x_1\cdot\ldots\cdot x_n\vee\bar x_1\cdot\ldots\cdot\bar x_n,\ n\ge 2;$$
$$\bar x_1 g(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\vee x_1x_5(x_2x_4\vee x_3x_6);$$
$$\bar x_1x_2 g(x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)\vee x_1(x_4\vee x_5(x_6\vee x_7(x_2\vee x_3))).$$

2. Основная теорема

Функцию f будем называть *негладкой*, если либо $\operatorname{rank} f<2$, либо $f\notin S$ и для любого $x\in\rho(f)$ справедливы включение $f\in M_x$ и одно из условий:

(1) $\delta(f)=\delta\big(f_x^0\big)$ и $\delta(f)\subsetneq\delta\big(f_x^1\big)$;

(2) $\delta(f)=\delta\big(f_x^1\big)$ и $\delta(f)\subsetneq\delta\big(f_x^0\big)$;

(3) существуют $y_1,y_2,y_3\in\rho(f_x')$ такие, что справедливо строгое включение $\delta(f_x')\subsetneq\delta\big(\frac{\partial f_x'}{\partial y_1\partial y_2\partial y_3}\big)$.

Функцию f будем называть *наследственно негладкой*, если сама f и все ее остаточные функции являются негладкими.

Критерий бесповторности дает следующая

Теорема. *Функция f бесповторна в базисе B^* тогда и только тогда, когда она является наследственно негладкой.*

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся методом, основанным на предложении 1.

Обозначим через P множество всех наследственно негладких функций. Множество P является наследственным по определению, покажем его инвариантность.

Пусть $f(\tilde{u},\tilde{v}) = g(\tilde{u},h(\tilde{v}))$, где $g(\tilde{u},y)$, $h(\tilde{v}) \in P$. Если $\tilde{u} = \varnothing$ или $|\tilde{v}| = 1$, то функция f обобщенно однотипна с g или h, поэтому является наследственно негладкой. Далее считаем, что $\tilde{u} \neq \varnothing$ и $|\tilde{v}| > 1$.

1. Пусть $x \in \tilde{v}$. Если выполняется одно из строгих включений $\delta(h) \subsetneq \delta\big(h_x^0\big)$ или $\delta(h) \subsetneq \delta\big(h_x^1\big)$, то соответственно либо $\delta(f) \subsetneq \delta\big(f_x^0\big)$, либо $\delta(f) \subsetneq \delta\big(f_x^1\big)$. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_y(\tilde{u},y)\cdot h'_x(\tilde{v})$. Очевидно, что существуют $x_1,x_2,x_3 \in \rho(h'_x)$ такие, что справедливо

$$\delta(h'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial h'_x}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right).$$

Так как справедливо равенство

$$\frac{\partial f'_x}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3} = g'_y(\tilde{u},y)\cdot \frac{\partial h'_x}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3},$$

то

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right).$$

2. Пусть $x \in \tilde{u}$. Если справедливо одно из строгих включений $\delta(g) \subsetneq \delta\big(g_x^0\big)$ или $\delta(g) \subsetneq \delta\big(g_x^1\big)$, то справедливость ровно одного из строгих включений $\delta(f) \subsetneq \delta\big(f_x^0\big)$ или $\delta(f) \subsetneq \delta\big(f_x^1\big)$ очевидна. В противном случае рассмотрим $f'_x = g'_x(\tilde{u},h(\tilde{v}))$. Если для функции $g'_x(\tilde{u},y)$ существуют $x_1,x_2,x_3 \in \rho(g'_x(\tilde{u},y))$, отличные от y, такие, что

$$\delta(g'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial g'_x}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right),$$

то

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}\right).$$

В противном случае существуют $y_1,y_2 \in \rho(g'_x(\tilde{u},y))$, отличные от y, такие, что

$$\delta(g'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial g'_x}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y}\right).$$

Выберем произвольным образом существенную переменную $z \in \tilde{v}$ и рассмотрим

$$\frac{\partial f'_x}{\partial y_1 \partial y_2 \partial z} = \frac{\partial g'_x}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y}\cdot h'_z(\tilde{v}).$$

В силу того, что

$$\delta(g'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial g'_x}{\partial y_1 \partial y_2 \partial y}\right),$$

справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta\left(\frac{\partial f'_x}{\partial y_1 \partial y_2 \partial z}\right).$$

Докажем, что $f \notin S$. Рассуждаем от противного. Пусть $f \in S$, тогда при любых $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ справедливо неравенство $g(\tilde{u}, h(\tilde{v})) \neq g(\bar{\tilde{u}}, h(\bar{\tilde{v}}))$. Так как $h \notin S$, найдется набор τ такой, что $h(\tilde{\tau}) = h(\bar{\tilde{\tau}}) = \gamma$. Подставив в неравенство, имеем $g(\tilde{u}, \gamma) \neq g(\bar{\tilde{u}}, \gamma)$ для любого $\tilde{u}$. Отсюда следует, что $g_y^\gamma(\tilde{u}, y) \in S$, поэтому в силу наследственной негладкости g остаточная функция g_y^γ является тождественной функцией или отрицанием. Если найдется набор $\tilde{\tau}_1$ такой, что $h(\tilde{\tau}_1) = h(\bar{\tilde{\tau}}_1) = \bar{\gamma}$, то $g_y^{\bar{\gamma}}$ также есть тождественная функция или отрицание, т. е. функция g равна $x \oplus y$ или $x \oplus y \oplus 1$, что противоречит наследственной негладкости g. Итак, найдется набор $\tilde{\tau}_2$ такой, что $h(\tilde{\tau}_2) \neq h(\bar{\tilde{\tau}}_2)$. Так как $g \notin S$, существует набор $\tilde{\sigma}$ такой, что $g(\tilde{\sigma}, 0) = g(\bar{\tilde{\sigma}}, 1)$. Отсюда следует, что справедливо одно из равенств $g(\tilde{\sigma}, h(\tilde{\tau}_2)) = g(\bar{\tilde{\sigma}}, h(\bar{\tilde{\tau}}_2))$ или $g(\tilde{\sigma}, h(\bar{\tilde{\tau}}_2)) = g(\bar{\tilde{\sigma}}, h(\tilde{\tau}_2))$. В обоих случаях имеем противоречие с предположением $f \in S$.

Докажем, что $f \in M_x$ для любой переменной x. Рассуждаем от противного. Пусть $f \notin M_x$, т. е. $f_x^0 \not\preceq f_x^1$ и $f_x^0 \not\succeq f_x^1$. Пусть $x \in \tilde{u}$. Тогда найдутся наборы констант $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_3$ такие, что $|\tilde{\sigma}_i| = |\tilde{\tau}_i|$ для любого i и

$$g(\tilde{\sigma}_1, 0, \tilde{\sigma}_2, h(\tilde{\sigma}_3)) < g(\tilde{\sigma}_1, 1, \tilde{\sigma}_2, h(\tilde{\sigma}_3)), \quad g(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2, h(\tilde{\tau}_3)) > g(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2, h(\tilde{\tau}_3)).$$

Пусть $h(\tilde{\sigma}_3) = \gamma$, $h(\tilde{\tau}_3) = \delta$, тогда

$$g(\tilde{\sigma}_1, 0, \tilde{\sigma}_2, \gamma) < g(\tilde{\sigma}_1, 1, \tilde{\sigma}_2, \gamma), \quad g(\tilde{\tau}_1, 0, \tilde{\tau}_2, \delta) > g(\tilde{\tau}_1, 1, \tilde{\tau}_2, \delta).$$

Таким образом, $g \notin M_x$; противоречие.

Пусть $x \in \tilde{v}$. Аналогично найдутся наборы констант $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$, $\tilde{\tau}_3$ такие, что $|\tilde{\sigma}_i| = |\tilde{\tau}_i|$ для любого i и

$$g(\tilde{\sigma}_1, h(\tilde{\sigma}_2, 0, \tilde{\sigma}_3)) < g(\tilde{\sigma}_1, h(\tilde{\sigma}_2, 1, \tilde{\sigma}_3)),$$

$$g(\tilde{\tau}_1, h(\tilde{\tau}_2, 0, \tilde{\tau}_3)) > g(\tilde{\tau}_1, h(\tilde{\tau}_2, 1, \tilde{\tau}_3)).$$

В силу того, что $h \in M_x$, имеет место либо

$$g(\tilde{\sigma}_1, 0) < g(\tilde{\sigma}_1, 1),\ g(\tilde{\tau}_1, 0) > g(\tilde{\tau}_1, 1),$$

либо

$$g(\tilde{\sigma}_1, 1) < g(\tilde{\sigma}_1, 0),\ g(\tilde{\tau}_1, 1) > g(\tilde{\tau}_1, 0).$$

В обоих случаях получаем противоречие с $g \in M_x$. Таким образом, доказана инвариантность P.

Теперь для наследственного инвариантного множества P найдем порождающий его базис. Очевидно, что $B^* \subseteq P$. Проверим, что все слабоповторные функции в базисе B^* не принадлежат P. Достаточно ограничиться проверкой функций из предложения 2, так как если свойство негладкости не выполняется для некоторой функции, то оно не выполняется и для всех обобщенно однотипных с ней функций.

(a) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee x_3 x_4$. Тогда

$$f_{x_2}^0 = x_3(x_1 \vee x_4), \quad f_{x_2}^1 = x_1 \vee x_3 x_4, \quad f'_{x_2} = x_1 \bar{x}_3.$$

Имеем

$$\rho(f'_{x_2}) = \{x_1, x_3\},\ \delta(f'_{x_2}) = \delta\left(\frac{\partial f'_{x_2}}{\partial x_1}\right),\ \delta(f'_{x_2}) = \delta\left(\frac{\partial f'_{x_2}}{\partial x_3}\right),\ \delta(f'_{x_2}) = \delta\left(\frac{\partial f'_{x_2}}{\partial x_1 \partial x_3}\right),$$

поэтому $f \notin P$.

(b) $f = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \vee \bar{x}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$, где $n \geq 2$. Тогда

$$f^0_{x_1} = \bar{x}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n, \quad f^1_{x_1} = x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Функция f не принадлежит P, так как остаточные функции $f^0_{x_1}$ и $f^1_{x_1}$ существенны, а $f \notin M_{x_1}$.

(c) $f = x_1(x_2 \vee x_3 \cdot \ldots \cdot x_n) \vee x_2\bar{x}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$, где $n \geq 3$.

Функция f не принадлежит P, так как остаточные функции $f^0_{x_3}$, $f^1_{x_3}$ при $n = 3$ фиктивны и при $n > 3$ существенны, а $f \notin M_{x_3}$.

(d) $f = x_1(x_2 \vee \cdots \vee x_n) \vee x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, где $n \geq 3$. Функция f не принадлежит P, так как $f \in S$.

(e) $f = \bar{x}_1 g(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \vee x_1 x_5(x_2 x_4 \vee x_3 x_6)$. Тогда

$$f^0_{x_1} = g(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6), \quad f^1_{x_1} = x_5(x_2 x_4 \vee x_3 x_6),$$

$$\begin{aligned} f'_{x_1} = {} & x_2x_3x_4\bar{x}_5x_6 \vee x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6 \vee x_2x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6 \vee x_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6 \vee x_2x_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6 \\ & \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6 \vee x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5x_6 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5x_6. \end{aligned}$$

Остаточные функции $f^0_{x_1}$ и $f^1_{x_1}$ существенны. В силу того, что представление f'_{x_1} является совершенной дизъюнктивной нормальной формой, нетрудно заметить, что функция f'_{x_1} нечетна, т. е. существенна. Очевидно, что производная нечетной функции по любой переменной есть нечетная функция, поэтому $f \notin P$.

(f) $f = \bar{x}_1 x_2 g(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \vee x_1(x_4 \vee x_5(x_6 \vee x_7(x_2 \vee x_3)))$. Тогда

$$f^0_{x_1} = x_2 g(x_3, x_4, x_5, x_6, x_7), \quad f^1_{x_1} = x_4 \vee x_5(x_6 \vee x_7(x_2 \vee x_3)),$$

$$\begin{aligned} f'_{x_1} = {} & \bar{x}_2x_3x_4x_5x_6x_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5x_6x_7 \vee x_2\bar{x}_3x_4x_5x_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6x_7 \\ & \vee \bar{x}_2x_3x_4x_5\bar{x}_6x_7 \vee \bar{x}_2x_3x_4x_5x_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5x_6x_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6x_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5x_6\bar{x}_7 \\ & \vee x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7 \vee x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7 \vee x_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7 \vee \bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7 \\ & \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6x_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5x_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4x_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee x_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2x_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \\ & \vee \bar{x}_2x_3x_4x_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_4\bar{x}_5\bar{x}_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5x_6x_7 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5x_6x_7 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5x_6\bar{x}_7 \\ & \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5x_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5x_6\bar{x}_7 \vee \bar{x}_2x_3\bar{x}_4x_5\bar{x}_6x_7. \end{aligned}$$

Функция f'_{x_1} является нечетной. Ситуация аналогична случаю (e).

Таким образом, $S_{B^*} \cap P = \varnothing, B^* \subseteq P$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черухин Д. Ю.* Алгоритмический критерий сравнения булевых базисов // Мат. вопросы кибернетики. 1999. № 8. С. 77–122.
2. *Субботовская Б. А.* О сравнении базисов при реализации функций алгебры логики формулами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149, № 4. С. 784–787.
3. *Стеценко В. А.* О предплохих базисах в P_2 // Мат. вопросы кибернетики. 1992. № 4. С. 139–177.
4. *Черухин Д. Ю.* О предплохих булевых базисах // Дискрет. математика. 1999. Т. 11, № 2. С. 118–160.
5. *Гурвич В. А.* Критерии бесповторности функций алгебры логики // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 3. С. 532–537.
6. *Кириченко К. Д.* О критериях бесповторности булевых функций в различных базисах // Оптимизация, управление, интеллект. Иркутск, 2000. Вып 4. С. 93–101.
7. *Перязев Н. А.* Реализация булевых функций бесповторными формулами в некоторых базисах // Алгебра, логика и приложения. Иркутск, 1994. С. 143–154.
8. *Перязев Н. А.* Реализация булевых функций бесповторными формулами // Дискрет. математика. 1995. Т. 7, № 3. С. 61–68.

9. *Перязев Н. А., Шаранхаев И. К.* Критерии бесповторности булевых функций в предэлементарных базисах ранга 3 // Дискрет. математика. 2005. Т. 17, № 2. С. 127–138.
10. *Перязев Н. А.* Основы теории булевых функций. М.: Физматлит, 1999.
11. *Шаранхаев И. К.* О слабоповторных булевых функциях в одном предэлементарном базисе // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 2. С. 79–101.

Статья поступила 7 июля 2007 г.

Шаранхаев Иван Константинович
Бурятский гос. университет, Институт математики и информатики, кафедра алгебры,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
goran5@mail.ru