Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 512.54+510.5

О КОНСТРУКТИВНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ R_p–ГРУППАХ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

Н. Г. Хисамиев

Аннотация. Доказано, что нильпотентная R_p-группа без кручения, p-ранг фактор-группы которой по коммутанту равен 1, а ранг центра по коммутанту бесконечен или ранг группы по коммутанту конечен, конструктивизируема тогда и только тогда, когда она изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения посредством некоторой конструктивной абелевой R_p-группы без кручения с вычислимо перечислимым базисом и некоторой вычислимой системой коммутаторов. Аналогичные критерии получены для позитивной определенности таких групп и полных групп. Также получены достаточные условия конструктивизируемости позитивно определенных групп.

Ключевые слова: конструктивная группа, позитивно нумерованная группа, позитивно определенная группа, конструктивизируемая группа, нильпотентная группа, полная группа.

Изучение конструктивных групп начато в [1], где А. И. Мальцев поставил общую задачу: «определить, какие конструктивные нумерации допускают те или иные абстрактно заданные группы». Конструктивные абелевы группы изучались в работах А. И. Мальцева, Ю. Л. Ершова, С. С. Гончарова, В. П. Добрицы, А. Т. Нуртазина, Н. Г. Хисамиева, Найт и других авторов. Конструктивные нильпотентные группы исследованы мало. Ю. Л. Ершов [2] доказал, что конструктивизация локально нильпотентной группы без кручения продолжается естественным образом до ее пополнения. В работе С. С. Гончарова, А. В. Молокова, Н. С. Романовского [3] построена нильпотентная группа, алгоритмическая размерность которой конечна. В работе В. А. Романькова, Н. Г. Хисамиева [4] доказано, что матричные группы $GL_n(K)$, $SL_n(K)$, $UT_n(V)$, $n \geq 3$, над коммутативным ассоциативным кольцом K с единицей конструктивизируема тогда и только тогда, когда кольцо K конструктивизируемо. И. В. Латкин [5] построил пример позитивно нумерованной нильпотентной группы без кручения, которая неконструктивизируема. В [6, 7] даны критерии соответственно конструктивизируемости и позитивной определенности нильпотентной группы без кручения ступени 2 на языке системы факторов.

В данной работе получены критерии конструктивизируемости и позитивной определенности некоторых классов нильпотентных R_p-групп без кручения ступени 2 на языке системы коммутаторов.

Все используемые, но не определенные понятия можно найти по теории конструктивных моделей в [8], а по теории групп — в [9]. Напомним лишь некоторые из них, часто употребляемые в данной работе. Как обычно, ω и Z обозначают множества соответственно всех натуральных и целых чисел, а R_p —

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Науки МОиН РК (грант № 1.7.1–2).

множество всех рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p, где p — простое число. Группа G называется *R_p-группой*, если для любых числа m, взаимно простого p, и элемента $g \in G$ из g извлекается единственный корень m-й степени в G. Максимальная система линейно независимых элементов абелевой группы без кручения A называется *базисом* A. Система элементов $a_1, \dots, a_n$ абелевой группы без кручения A, не содержащая 0, называется *p-независимой*, если для любого натурального числа r из

$$m_1 a_1 + \dots + m_n a_n \in p^r A,$$

где $0 \neq m_i \in Z$, следует, что m_i делится на p^r для любого $i = 1, \dots, n$. Максимальная p-независимая система в A называется *p-базисом группы* A. Мощности базиса и p-базиса группы A называются соответственно *рангом* и *p-рангом* A. Через G' и $Z(G)$ обозначают соответственно коммутант и центр группы G. Множество всех элементов x из G таких, что некоторые их степени принадлежат G', называется *изолятором коммутанта.* Вычислимо перечислимо определенные группы также будем называть *позитивно определенными.*

§ 1. Нильпотентная R_p-группа без кручения

Введем одну конструкцию нумерованной нильпотентной группы без кручения. Пусть даны нумерованные абелевы группы без кручения (A, ν), (B, μ) и функции g, h такие, что A полная, B — R_p-группа, p-ранг которой равен 1, и в (B, μ) зафиксирован базис $\{b, c_{i,0} \mid i < \alpha\}, \alpha \in \omega \cup \{\omega\}$, где $\{b\}$ — p-базис. По ним определим нумерованную группу (G, γ) следующим образом. Для определенности будем считать, что $\alpha = \omega$.

В группе B для каждой пары $\langle i, j \rangle \in \omega^2$ однозначно определены элемент $c_{i,j}$ и число $0 \le s_{i,j} \le p$ такие, что

$$c_{i,j} b^{s_{i,j}} = c_{i,j+1}^p$$

и множество $B_0 = \left\{b^r, c_{i,j}^s \mid r, s \in R_p, i, j \in \omega\right\}$ порождает группу B. Определим коммутаторы от базисных элементов группы B, положив

$$[b, c_{i,0}] = \nu g(i), \quad [c_{i,0}, c_{j,0}] = \nu h(i,j), \quad i < j. \tag{1}$$

Пусть A_0 — подгруппа группы A, порожденная коммутаторами группы B. Через G обозначим центральное расширение A_0 посредством B с определяющими соотношениями (1), а через γ — нумерацию группы G, определенную естественным образом через ν и μ. Пару (G, γ) назовем *центральным расширением* (A, ν) *посредством* (B, μ) *и системой коммутаторов* g, h.

Лемма 1. *Пусть G — нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2 и p-ранг фактор-группы $G/I(G')$ по изолятору коммутанта равен 1. Тогда G' является полной абелевой группой и $I(G') = G'$.*

Доказательство. Пусть $A = I(G'), B = G/A$ и система $\{\bar{b}, \overline{c_{i,0}} \mid i \in \omega\}$ является базисом группы B, а $\{\bar{b}\}$ — ее p-базис. Тогда для любых i, j существуют элементы $a \in A$, $c_{i,j} \in G$ и число $0 \le s_{i,j} < p$ такие, что

$$c_{i,j} b^{s_{i,j}} a = c_{i,j+1}^p \tag{2}$$

и множество $A \cup \left\{b^r, c_{i,j}^s \mid r, s \in R_p,\ i, j \in \omega\right\}$ порождают группу G. Так как группа G нильпотентная ступени 2, из (2) имеем

$$[b, c_{i,j}] = \left[b, c_{i,j+1}^p b^{-s_{i,j}} a^{-1}\right] = [b, c_{i,j+1}]^p,$$

$$[c_{i,j}, c_{k,s}] = \left[c_{i,j+1}^p b^{-s_{i,j}} a^{-1}, c_{k,s}\right] = \left[c_{i,j+1}, c_{k,s}\right]^p \left[b^{-s_{i,j}}, c_{k,s}\right].$$

Отсюда следует полнота группы G' и тем самым $A = G'$.

Следствие 1. *Пусть G — нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2 и в G зафиксирован базис $\{\bar{b}, \overline{c_{i,0}} \mid i \in \omega\}$ фактор-группы G/G', где $\{\bar{b}\}$ — ее p-базис. Тогда для любых i, j существуют элементы $c_{i,j}$ и число $0 \le s_{i,j} < p$ такие, что*

$$c_{i,j} b^{s_{i,j}} = c_{i,j+1}^{p}, \tag{3}$$

и для любого элемента $x \in G$ найдутся такие $m, r \in \omega$, $m_i, s \in R_p$ и элемент $a_x \in G'$, что для любого $n > m$ элемент x имеет единственную запись, с точностью до единичных множителей, вида

$$x = c_{on}^{m_o} \dots c_{rn}^{m_r} b^s a_x. \tag{4}$$

Действительно, так как фактор-группа G/G' является R_p-группой без кручения с p-базисом $\{\bar{b}\}$, то для любых i, j существуют элементы $b_{i,j+1} \in G$, $a \in G'$ и число $s_{i,j}$ такие, что справедливо

$$c_{i,j} b^{s_{i,j}} a = b_{i,j+1}^{p}.$$

Отсюда и из леммы 1 следует существование элемента $c_{i,j+1}$, для которого справедливо (3). Отображение $b \mapsto \bar{b}$, $c_{i,j} \mapsto \overline{c_{i,j}}$ продолжается до изоморфизма подгруппы $\left(\left\{b^r, c_{i,j}^s \mid i, j \in \omega, r, s \in R_p\right\}\right)$ и G/G'. Отсюда и из линейной независимости системы $\langle c_{i,0} \mid i \in \omega\rangle$ вытекает заключительное утверждение следствия.

Предложение 1. *Пусть даны конструктивные абелевы группы без кручения (A, ν), (B, μ) и вычислимые функции g, h такие, что A — полная группа, B — R_p-группа и в (B, μ) существует вычислимо перечислимый базис $\{b, c_{i,0} \mid i < \omega\}$, где $\{b\}$ — ее p-базис. Тогда центральное расширение (G, γ) группы (A, ν) посредством (B, μ) и вычислимой системы коммутаторов g, h конструктивизируемо.*

Доказательство. Пусть даны числа $n, m \in \omega$. По следствию 1 по этим числам эффективно находятся записи элементов $x = \gamma n, y = \gamma m$ вида (4). Пусть x имеет запись (4), а

$$y = c_{oq}^{s_o} \dots c_{rq}^{s_r} b^t a_y.$$

Можно считать, что $q = n$. Легко проверить, что $\gamma n = 1$ тогда и только тогда, когда $m_0 = \dots = m_r = s = 0$, $a_x = e$. Ввиду вычислимости функций g, h эффективно находится элемент a_{xy} такой, что

$$xy = c_{oq}^{m_0+s_o} \dots c_{rq}^{m_r+s_r} b^{s+t} a_{xy},$$

поэтому эффективно находится такое число s, для которого верно $\gamma n \gamma m = \gamma s$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть даны позитивно нумерованные абелевы группы без кручения $(A, \nu), (B, \mu)$ и вычислимые функции g, h такие, что A — полная группа, B — R_p-группа и в (B, μ) существует вычислимо перечислимый базис $\{b, c_{i,0} \mid i < \omega\}$, где $\{b\}$ — ее p-базис. Тогда центральное расширение (G, γ) группы (A, ν) посредством (B, μ) и вычислимой системы коммутаторов g, h позитивно нумерованно.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.

В работе [6] доказана

Теорема A. *Пусть (G, ν) — конструктивная группа и B — ее вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре $Z(G)$ группы G, такая, что фактор-группа G/B абелева без кручения и ранг $Z(G)/B$ бесконечен. Тогда существует нумерация μ группы G, для которой справедливы следующие свойства:*

1) группа (G, μ) конструктивна;

2) подгруппа B вычислима в (G, μ);

3) существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{c_i \mid i \in I\}$ в (G, μ), что смежные классы $\{c_i + B\}$ образуют базис фактор-группы G/B.

Теорема 1. *Пусть G — счетная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, p-ранг фактор-группы которой по коммутанту равен 1, а ранг $Z(G)/G'$ бесконечен. Тогда G конструктивизируема, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой конструктивной абелевой R_p-группы без кручения (B, μ) с вычислимо перечислимым базисом $\{b, c_{i0} \mid i < \omega\}$, где $\{b\}$ — p-базис B, и некоторой вычислимой системы коммутаторов g, h.*

Доказательство. Достаточность следует из предложения 1. Докажем необходимость. Пусть (G, β) — конструктивная группа, удовлетворяющая условию теоремы. По лемме 1 коммутант $A \leftrightharpoons G'$ является полной группой и удовлетворяет условию теоремы A. По этой теореме существует такая конструктивизация γ группы G, что

1) подгруппа A вычислима в (G, γ),

2) существует вычислимо перечислимая система элементов $\{b, c_{i,0} \mid i < \omega\}$ в (G, γ) такая, что смежные классы $\{bA, c_{i,0}A \mid i < \omega\}$ и $\{bA\}$ являются соответственно базисом и p-базисом фактор-группы $B \leftrightharpoons G/A$.

Тогда существуют нумерации $\nu : \omega \to A$, $\mu : \omega \to B$ групп A, B, m-сводящиеся к γ. Определим систему коммутаторов, положив $g(i) = \nu^{-1}[b, c_{i,0}]$, $h(i, j) = \nu^{-1}[c_{i,0},\ c_{j,0}]$, $i < j \in \omega$. Легко проверить, что группа G изоморфна центральному расширению группы (A, ν) посредством (B, μ) и вычислимой системой коммутаторов g, h. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть G — счетная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, ранг и p-ранг фактор-группы которой по коммутанту соответственно равны $n < \omega$ и 1. Тогда группа G конструктивизируема, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой конструктивной абелевой R_p-группы без кручения (B, μ), ранг и p-ранг которой соответственно равны n и 1.*

Действительно, в силу конечности ранга группы $B \leftrightharpoons G/G'$ условия теоремы 1 о существовании вычислимо перечислимого базиса в группе B и вычислимости системы коммутаторов g, h автоматически выполнены. Отсюда и из доказательства теоремы 1 следует теорема 2.

Из этой теоремы и леммы 1 получаем

Следствие 2. *Пусть G — счетная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, ранг и p-ранг фактор-группы которой по коммутанту соответственно равны $n < \omega$ и 1. Тогда группа G конструктивизируема, если и только если ее фактор-группа G/G' по коммутанту конструктивизируема.*

В [10, следствие 3] доказана

Теорема B. *Любая вычислимо перечислимо определенная абелева группа без кручения конструктивизируема.*

Отсюда и из следствия 2 имеем

Следствие 3. *Вычислимо перечислимо определенная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, ранг и p-ранг фактор-группы которой по коммутанту соответственно равны $n < \omega$ и 1, конструктивизируема.*

Действительно, пусть (G, α) — позитивно нумерованная группа, удовлетворяющая условию следствия. Тогда фактор-группа G/G' — вычислимо перечислимо определенная группа. По теореме B она конструктивизируема. Отсюда по следствию 2 получаем требуемое.

Предложение 3. *Позитивно нумерованная абелева R_p-группа без кручения (B, μ) с вычислимо перечислимым базисом и конечным p-рангом является конструктивной группой.*

Доказательство. Пусть $\{b_k, c_{i0} \mid k < n, i \in \omega\}$, $n \in \omega$, — вычислимо перечислимый базис группы B, где $\{b_0, \dots, b_{n-1}\}$ — ее p-базис. Тогда для любых i, j существуют элементы $c_{i,j} \in B$ и числа $0 \leq s^k_{i,j} < p$ такие, что

$$c_{i,j} b_0^{s^0_{i,j}} \dots b_{n-1}^{s^{n-1}_{i,j}} = c^p_{i,j+1}$$

и множество $\left\{b_k^r, c_{i,j}^s \mid r, s \in R_p, i, j \in \omega\right\}$, $k < n$, порождает группу G. Для любого элемента $x \in B$ найдутся такие $m, r \in \omega$, что для любого $n > m$ элемент x имеет единственную запись с точностью до единичных множителей вида

$$x = c^{m_o}_{on} \dots c^{m_r}_{rn} b_0^{s_0} \dots b_{n-1}^{s_{n-1}}$$

для некоторых чисел $m_i, s_k \in R_p$. В силу вычислимости базиса и позитивной нумерованности (B, μ) такая запись элемента x находится эффективно. Отсюда $x = e$ тогда и только тогда, когда $m_i = s_k = 0$. Предложение доказано.

Аналогично доказывается

Предложение 4. *Позитивно нумерованная полная абелева группа без кручения (A, ν) с вычислимо перечислимым базисом является конструктивной.*

В работе [7] доказана

Теорема C. *Пусть (G, ν) — позитивно нумерованная группа и B — ее вычислимо перечислимая подгруппа, содержащаяся в центре $Z(G)$ группы G, такая, что фактор-группа G/B абелева без кручения и ранг $Z(G)/B$ бесконечен. Тогда существует позитивная нумерация μ группы G, для которой справедливы следующие свойства:*

1) *подгруппа B вычислима в (G, μ);*

2) *существует такая вычислимо перечислимая система элементов $\{c_i \mid i \in \omega\}$ в (G, μ), что смежные классы $\{c_i + B\}$ образуют базис фактор-группы G/B.*

Теорема 3. *Пусть G — счетная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, p-ранг фактор-группы которой по коммутанту равен 1, а ранг фактор-группы $Z(G)/G'$ бесконечен. Тогда группа G позитивно определена, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой позитивно нумерованной полной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой позитивно нумерованной абелевой R_p-группы без кручения (B, μ) с вычислимо* *перечислимым базисом $\{b, c_{i0} \mid i < \omega\}$, где $\{b\}$ — p-базис B, и вычислимой системы коммутаторов g, h.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только здесь вместо теоремы A нужно воспользоваться теоремой C.

Следствие 4. *Пусть G — позитивно определенная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, p-ранг фактор-группы которой по коммутанту равен 1, а ранги фактор-группы $Z(G)/G'$ и коммутанта G' соответственно бесконечен и конечен. Тогда группа G конструктивизируема.*

Действительно, из теорем C и 3 следует, что группа G изоморфна центральному расширению некоторой позитивно нумерованной полной абелевой группы без кручения (A, ν) конечного ранга посредством некоторой позитивно нумерованной абелевой R_p-группы без кручения (B, μ) с вычислимо перечислимым базисом и вычислимой системы коммутаторов g, h. Отсюда и из предложений 1, 3 и 4 получаем требуемое.

Теорема 4. *Пусть G — счетная нильпотентная R_p-группа без кручения ступени 2, ранг и p-ранг фактор-группы которой по коммутанту соответственно равны $n < \omega$ и 1. Тогда G позитивно определена, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой позитивно нумерованной полной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством некоторой позитивно нумерованной абелевой R_p-группы без кручения (B, μ), ранг и p-ранг которой соответственно равны n и 1.*

Действительно, в силу конечности ранга группы $B \leftrightharpoons G/G'$ условие теоремы 3 о бесконечности ранга фактор-группы $Z(G)/G'$ лишнее, а условия о существовании вычислимо перечислимого базиса в группе B и вычислимости системы коммутаторов g, h автоматически выполнены. Отсюда и из доказательства теоремы 3 получаем требуемое.

§ 2. Полные нильпотентные группы без кручения

Здесь приведены аналоги результатов § 1 для указанных групп. Введем аналог конструкции центрального расширения для полных групп.

Пусть даны нумерованные полные абелевы группы без кручения (A, ν), (B, μ) и функция h такие, что в (B, μ) зафиксирован базис $\{b_i \mid i < \alpha\}$, $\alpha \in \omega \cup \{\omega\}$. По ним определим нумерованную группу (G, γ) следующим образом. Для определенности будем считать, что $\alpha = \omega$.

Определим коммутаторы от базисных элементов группы B, положив

$$[b_i, b_j] = \nu^{-1} h(i, j) \tag{5}$$

Пусть A_0 — подгруппа группы A, порожденная коммутаторами группы B. Через G обозначим центральное расширение A_0 посредством B с определяющими соотношениями (5), а через γ — нумерацию группы G, определенную естественным образом через ν и μ. Пару (G, γ) назовем *центральным расширением* (A, ν) посредством (B, μ) и системы коммутаторов h. Справедливы следующие аналоги теорем 1, 2.

Теорема 1′. *Счетная полная нильпотентная группа без кручения G ступени 2, ранг фактор-группы $Z(G)/G'$ которой бесконечен, конструктивизируема тогда и только тогда, когда она изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения (A, ν) посредством* *некоторой конструктивной полной абелевой группы без кручения (B,μ) с вычислимо перечислимым базисом $\{b_i \mid i < \omega\}$ и некоторой вычислимой системы коммутаторов h.*

Теорема 2′. *Пусть G — счетная полная нильпотентная группа без кручения ступени 2, ранг фактор-группы которой по коммутанту равен $n < \omega$. Тогда группа G конструктивизируема, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой полной конструктивной абелевой группы без кручения (A,ν) посредством некоторой конструктивной полной абелевой группы без кручения (B,μ) ранга n.*

Отсюда вытекает

Следствие 5. *Если ранг фактор-группы полной нильпотентной группы без кручения G ступени 2 по коммутанту конечен, то G конструктивизируема.*

Справедлив следующий аналог теоремы 3.

Теорема 3′. *Пусть G — счетная полная нильпотентная группа без кручения ступени 2, ранг фактор-группы $Z(G)/G'$ бесконечен. Тогда группа G позитивно определена, если и только если она изоморфна центральному расширению некоторой полной позитивно нумерованной абелевой группы без кручения (A,ν) посредством некоторой позитивно нумерованной полной абелевой группы без кручения (B,μ) с вычислимо перечислимым базисом $\{b_i \mid i < \omega\}$ и вычислимой системы коммутаторов h.*

Из теоремы 3′ и предложения 4 вытекает

Следствие 6. *Позитивно определенная полная нильпотентная группа без кручения G ступени 2, ранги фактор-группы $Z(G)/G'$ и коммутанта G' которой соответственно бесконечен и конечен, конструктивизируема.*

Через K обозначим класс всех конструктивных полных нильпотентных групп без кручения (G,ν) ступени не более 2 и таких, что в (G,ν) существуют вычислимо перечислимые системы элементов $A_0 = \{a_i \mid i < \alpha\}$, $B_0 = \{b_j \mid j < \beta\}$, где $\alpha, \beta \leq \omega$ и если $\beta < \omega$, то $\alpha \leq \frac{\beta(\beta-1}{2}$, и A_0, $\{b_jG' \mid j < \beta\}$ являются базисами соответственно групп G' и G/G'.

Теорема 5. *Класс K вычислим, т. е. существует вычислимая последовательность конструктивных групп $\langle (G_k,\delta_k) \in K \mid k \in \omega\rangle$ такая, что любая пара $(G,\nu) \in K$ рекурсивно изоморфна некоторой паре (G_k,δ_k).*

Доказательство. Пусть (A,ν) — конструктивная полная абелева группа без кручения с вычислимо перечислимым базисом $\{a'_i \mid i \in \omega\}$ и φ_k — двуместная частично вычислимая функция номера k. С их помощью по шагам t построим конструктивную группу (G_k,δ_k) следующим образом.

Пусть μ — эффективная нумерация множества всех конечных последовательностей рациональных чисел, а μ^t — ее ограничение на множестве номеров всех последовательностей длины t.

Допустим, что сделаны t шагов, введены образующие $b'_0,\dots,b'_{n^t-1}$ и определена конструктивная группа $\left(G_k^t,\delta_k^t\right)$, где $\delta_k^t : S_k^t \to G_k^t, S_k^t$ — вычислимое подмножество ω.

Шаг $t{+}1$. Для любого $i < n^t$ производим $t{+}1$ шагов в вычислении значений $\varphi_k(i,n^t)$. Возможны следующие случаи.

1. Существует такое i, что $\varphi_k(i,n^t)$ не определяется. Тогда полагаем $n^{t+1} = n^t$, $G_k^{t+1} = G_k^t$, $\delta_k^{t+1} = \delta_k^t$.

2. Для любого $i < n^t$ значение $\varphi_k(i, n^t)$, $i < n^t$, определяется.

Пусть A_k^{t+1} — наименьшая полная подгруппа A, порожденная множеством $\{\nu\varphi_k(i,j) \mid i < j \le n^t\}$. Так как в (A,ν) существует вычислимо перечислимый базис, подгруппа A_k^{t+1} вычислима. Пусть $R_k^{t+1} = \nu^{-1}A_k^{t+1}, \nu_k^{t+1}$ — ограничение $\nu\mathrm{T}$ на R_k^{t+1}. Тогда ν_k^{t+1} — конструктивная нумерация группы A_k^{t+1}. Через $\left(G_k^t, \delta_k^{t+1}\right)$ обозначим центральное расширение $\left(A_k^{t+1}, \nu_k^{t+1}\right)$ посредством $\left\langle \oplus\left\{Q(b_i' \mid i \le n^t\right\}, \mu^{n^t}\right\rangle$ и системы коммутаторов $\varphi_k \restriction \{\langle i,j\rangle \mid i < j \le n^t\}$. Положим $n^{t+1} = n^t + 1$, $S_k^{t+1} = \left(\delta_k^{t+1}\right)^{-1} G_k^t$.

Шаг $t+1$ закончен. Переходим к следующему шагу.

Положим $G_k = \bigcup\left\{G_k^t \mid t \in \omega\right\}$, $S_k = \bigcup\left\{S_k^t \mid t \in \omega\right\}$, $\delta_k = \bigcup\left\{\delta_k^t \mid t \in \omega\right\}$.

Построение закончено.

Так как $\left\langle\left(G_k^t, \delta_k^t\right) \mid t \in \omega\right\rangle$ — равномерная возрастающая последовательность конструктивных групп, группа (G_k, δ_k) конструктивна. Отсюда и из построения следует, что последовательность $\langle (G_k, \delta_k) \mid k \in \omega\rangle$ вычислима.

Покажем, что любая пара (G, δ) из K вычислимо изоморфна (G_k, δ_k) для некоторого k. Предположим для определенности, что ранги коммутанта G' и фактор-группы G/G' бесконечны. По определению класса K в (G, δ) существуют вычислимо перечислимые системы элементов $A_0 = \langle a_i \mid i < \omega\rangle$, $B_0 = \langle b_j \mid j < \omega\rangle$ такие, что $A_0, \langle b_j G' \mid j < \beta\rangle$ являются базисами соответственно G' и G/G'. Определим функцию f, положив $f(j, j') = \delta^{-1}[b_j, b_{j'}]$, $j < j' < \omega$. Ясно, что эта функция вычислима. Пусть $k \in \omega$ такое, что $f = \varphi_k$. Легко проверить, что отображение $a_i \mapsto a_i'$, $b_j \mapsto b_j'$ продолжается до вычислимого изоморфизма (G, δ) и (G_k, δ_k). Аналогично рассматриваются остальные случаи. Теорема доказана.

Для любого $n \in \omega$ через K_n обозначим класс всех конструктивных полных нильпотентных групп без кручения (G, ν) ступени не более 2 и таких, что ранг коммутанта G' не более n и в (G, ν) существуют вычислимо перечислимая система элементов $\{b_j \mid j < \beta\}$, где $\beta \le \omega$, $\{b_j G' \mid j < \beta\}$ является базисом G/G' и, если $\beta = \omega$, ранг $Z(G)/G'$ бесконечен.

Теорема 6. *Существует вычислимая последовательность конструктивных групп* $\langle (G_k, \delta_k) \in K_n \mid k \in \omega\rangle$ *такая, что:*

1) *любая пара* $(G, \nu) \in K_n$ *рекурсивно изоморфна некоторой паре* (G_k, δ_k), *т. е. класс* K_n *вычислим;*

2) *для любой конструктивизируемой полной нильпотентной группы без кручения* G *ступени не более 2, ранг коммутанта* G' *которой не более* n, *существует такая ее нумерация* ν, *что* (G, ν) *вычислимо изоморфна* (G_k, δ_k) *для некоторого* k.

Доказательство. 1. Аналогично доказательству теоремы 5, только здесь вместо (A, ν) нужно взять конструктивную полную абелеву группу без кручения (A_n, ν) ранга n.

2. Пусть для группы G справедливо условие п. 2. Легко проверить, что коммутант G' — полная абелева группа, а следовательно, для нее справедливо условие теоремы А. Тогда по этой теореме существует такая ее нумерация ν, что $(G, \nu) \in K_n$. Отсюда и из п. 1 получаем требуемое.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О рекурсивных абелевых группах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 5. С. 1009–1012.

2. *Ершов Ю. Л.* Существование конструктивизаций // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 5. С. 1041–1044.

3. *Гончаров С. С., Молоков А. В., Романовский А. С.* Нильпотентные группы конечной алгоритмической размерности // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 82–88.

4. *Романьков В. А., Хисамиев Н. Г.* О конструктивных матричных и упорядоченных группах // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 3. С. 353–363.

5. *Латкин И. В.* Арифметическая иерархия нильпотентных групп без кручения // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 308–313.

6. *Хисамиев Н. Г.* О конструктивных нильпотентных группах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 214–223.

7. *Хисамиев Н. Г.* Позитивно определенные нильпотентные группы // Мат. журн. Ин-та математики МОиН РК. 2007. Т. 24, № 2. С. 95–102.

8. *Гончаров С. С, Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1996.

9. *Каргополов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.

10. *Хисамиев Н. Г.* Иерархии абелевых групп без кручения // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 2. С. 205–226.

Статья поступила 18 июня 2007 г., окончательный вариант — 28 марта 2008 г.

Хисамиев Назиф Гарифуллинович
Восточно-Казахстанский гос. технический университет им. Д. Серикбаева,
наб. Красных Орлов, 69, Усть-Каменогорск 070004, Казахстан
`hisamiev@mail.ru`