Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.982.22

ТЕОРЕМА КРЕПСА — ЯНА ДЛЯ БАНАХОВЫХ ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Д. Б. Рохлин

Аннотация. Пусть C — замкнутый выпуклый конус в банаховом идеальном пространстве X на измеримом пространстве с σ-конечной мерой. Доказано, что выполнение условий $C \cap X_+ = \{0\}$ и $C \supset -X_+$ гарантирует существование строго положительного непрерывного функционала на X, ограничение которого на C неположительно.

Ключевые слова: теорема Крепса — Яна, банахово идеальное пространство, σ-конечная мера, конусы, отделимость.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство, полное относительно меры (счетно-аддитивной функции) $\mu : \mathscr{F} \mapsto [0, \infty]$. Рассмотрим векторное пространство $L^0(\mu) = L^0(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ классов μ-эквивалентных п. в. конечных $\mathscr{F}$-измеримых функций. Данное пространство является *векторной решеткой* (*пространством Рисса*) относительно естественного порядка, порожденного конусом $L^0_+(\mu)$ неотрицательных элементов [1, 2]. Пусть X — телесное подпространство (идеал) в $L^0(\mu)$, т. е. X — линейное подмножество $L^0(\mu)$ и из условий $x \in X$, $|y| \leq |x|$ вытекает, что $y \in X$. Предположим, что на X определена норма, удовлетворяющая условию $\|x\| \leq \|y\|$, если $|x| \leq |y|$, $x, y \in X$ (монотонная норма) и X полно по указанной норме. Как известно, в этом случае $(X, \|\cdot\|)$ называется *банаховым идеальным пространством* на $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ [1, 3].

Пусть X — банахово идеальное пространство с конусом неотрицательных элементов $X_+ = \{x \in X : x \geq 0\}$. Элемент g топологически сопряженного пространства X' называется *строго положительным*, если $\langle x, g \rangle := g(x) > 0$, $x \in X_+ \setminus \{0\}$. Несколько модифицируя терминологию [4], будем говорить, что X *обладает свойством Крепса — Яна*, если для любого замкнутого выпуклого конуса $C \subset X$, удовлетворяющего условиям

$$C \cap X_+ = \{0\}, \quad -X_+ \subset C, \tag{1}$$

существует строго положительный элемент $g \in X'$ такой, что $\langle x, g \rangle \leq 0$, $x \in C$.

Задача о существовании подобного элемента g может быть поставлена и в более широком контексте локально выпуклых пространств с конусом. Результаты в этом направлении, а также дальнейшие ссылки и комментарии, касающиеся работ Крепса [5] и Яна [6], можно найти в [4].

Говорят, что топологическое пространство (X, τ) *обладает свойством Линделёфа*, если из любого его τ-открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие. Известно, что если слабая топология $\sigma(X, X')$ банахова пространства X обладает свойством Линделёфа (для краткости говорят, что X является слабо линделёфовым) и множество строго положительных функционалов $g \in X'$ непусто, то X обладает свойством Крепса — Яна [7, теорема 1.1]. Для слабой линделёфовости пространства X достаточно выполнения любого из следующих условий: (a) X рефлексивно, (b) X сепарабельно, (c) X слабо компактно порождено (см. [8]).

Известно также, что свойством Крепса — Яна обладает пространство $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ измеримых существенно ограниченных функций, где $\mathbf{P}$ — вероятностная мера. Этот результат установлен в работе [7, теорема 2.1] (другое доказательство независимым образом получено в работе [9]). Отметим, что пространство l^∞ ограниченных последовательностей, которое можно рассматривать как банахово идеальное пространство на вероятностном пространстве $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{Q}(n) = 1/2^n$, не является слабо линделёфовым [10, пример 4.1(i)]. Таким образом, линделёфовость слабой топологии является достаточным, но не необходимым условием для выполнения свойства Крепса — Яна.

С другой стороны, как показывает пример 2.1 работы [4], пространство $l^1(\mathbb{R}_+) = \big\{(f_t)_{t\in\mathbb{R}_+} : \sum\limits_{t\in\mathbb{R}_+} |f_t| < \infty\big\}$ не обладает свойством Крепса — Яна. При этом строго положительные функционалы на $l^1(\mathbb{R}_+)$ существуют. Заметим, что $l^1(\mathbb{R}_+)$ является банаховым идеальным пространством на $(\mathbb{R}_+, 2^{\mathbb{R}_+}, \nu)$, где ν — считающая мера на $\mathbb{R}_+$. Данная мера является разложимой в смысле определения [11, с. 124], но не σ-конечной.

Указанный пример [4] подчеркивает точность основного результата настоящей работы, который состоит в следующем.

Теорема 1. *Банахово идеальное пространство X на $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ с σ-конечной мерой μ обладает свойством Крепса — Яна.*

Данный результат естественно назвать *теоремой Крепса — Яна* для банаховых идеальных пространств.

Общая стратегия доказательства следует работе [7], рассуждения которой приспособлены к L^∞. Сначала доказывается существование строго положительного элемента $f \in X'$, ограниченного сверху на множестве $\{x \in C : \|x^-\| \le 1\}$ (лемма 1). Затем устанавливается существование элемента $g \in X'$, $g \ge f$, ограничение которого на C неположительно (лемма 3). Здесь и далее через x^+, x^- обозначаются положительная и отрицательная части элемента x векторной решетки.

Прежде всего заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда μ — вероятностная мера. Действительно, по определению σ-конечности существует дизъюнктная последовательность $(A_n)_{n=1}^\infty$, $A_n \in \mathscr{F}$, образующая разбиение Ω и такая, что $\mu(A_n) < \infty$. Вероятностная мера

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\mu(A \cap A_n)}{2^n \mu(A_n)}, \quad A \in \mathscr{F},$$

эквивалентна μ, т. е. обладает тем же запасом нулевых множеств. Ясно, что любое банахово идеальное пространство X на $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ можно рассматривать как банахово идеальное пространство на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Обозначим через $\mathbf{E}x = \int x\, d\mathbf{P}$ математическое ожидание по вероятностной мере $\mathbf{P}$. Любое банахово идеальное пространство является подмножеством полного метрического пространства $(L^0(\mathbf{P}), d)$, где

$$d(x,y) = \mathbf{E}\frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Сходимость в топологии, порожденной данной метрикой, совпадает со сходимостью по вероятности, а ограниченность — с ограниченностью по вероятности.

Напомним, что множество $H \subset L^0(\mathbf{P})$ называется *ограниченным по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $M > 0$ такое, что $\mathbf{P}(|x| \geq M) < \varepsilon$, $x \in H$.

Лемма 1. *Пусть X — банахово идеальное пространство на $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ и $C \subset X$ — замкнутый по норме X выпуклый конус, удовлетворяющий условиям* (1). *Тогда существует эквивалентная $\mathbf{P}$ вероятностная мера $\mathbf{Q}$ с плотностью $f = d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} \in L^\infty(\mathbf{P})$ такая, что*

$$\sup_{x \in C_1} \mathbf{E_Q} x < \infty, \quad C_1 = \{x \in C : \|x^-\| \leq 1\}.$$

Доказательство. Введем выпуклое множество

$$G = \operatorname{conv}|C_1| = \left\{ y = \sum_{i=1}^m \alpha_i |x_i| : x_i \in C_1,\ \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,\ m \in \mathbb{N} \right\}$$

и положим

$$G^1 = \bigl\{ y \in L^1_+(\mathbf{P}) : y \leq x \text{ для некоторого } x \in G \bigr\},$$

где $L^1(\mathbf{P})$ — банахова решетка $\mathbf{P}$-интегрируемых функций. Для доказательства леммы достаточно проверить, что для любого $A \in \mathscr{F}$ с $\mathbf{P}(A) > 0$ существует $c \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$cI_A \notin \overline{G^1 - L^1_+(\mathbf{P})}, \tag{2}$$

где черта означает замыкание в $L^1(\mathbf{P})$. Действительно, по теореме Яна ([6, теорема 2]) отсюда следует, что существует элемент $f \in L^\infty(\mathbf{P})$ с $\mathbf{P}(f > 0) = 1$ такой, что $\sup\limits_{y \in G^1} \mathbf{E}(yf) < \infty$. Заметим, что $y_n = x \wedge n \in G^1$ для любых $x \in G$, $n \in \mathbb{N}$. По теореме о монотонной сходимости отсюда следует, что

$$\sup_{x \in C_1} \mathbf{E_Q} x \leq \sup_{x \in G} \mathbf{E_Q} x = \sup_{y \in G^1} \mathbf{E}(yf) < \infty,$$

где $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = f$.

Чтобы доказать (2), будем рассуждать от противного. Пусть $A \in \mathscr{F}$, $\mathbf{P}(A) > 0$ и $cI_A \in \overline{G^1 - L^1_+(\mathbf{P})}$ для всех $c > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $z \in G$ такой, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{z < 1/\varepsilon\}) < \varepsilon. \tag{3}$$

В самом деле, пусть $c > 1/\varepsilon$, последовательность $y_n \in G^1 - L^1_+(\mathbf{P})$ сходится к cI_A с вероятностью 1 и $y_n \leq z_n$, $z_n \in G$. Тогда

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty (A \cap \{z_m < 1/\varepsilon\}) \right) \leq \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{m=n}^\infty (A \cap \{y_m < 1/\varepsilon\}) \right) = 0.$$

Следовательно,

$$\limsup_{n \to \infty} \mathbf{P}(A \cap \{z_n < 1/\varepsilon\}) \leq \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{m=n}^\infty (A \cap \{z_m < 1/\varepsilon\}) \right) = 0.$$

Элемент $z \in G$, удовлетворяющий (3), допускает представление

$$z = \sum_{i=1}^m \alpha_i |x_i| = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i + 2\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^- = x + y, \quad \alpha_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1,$$

где $x \in C_1$, $y \in X_+$, $\|y\| \le 2$. Используя неравенство

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbf{P}(B_1) + \mathbf{P}(B_2) - \mathbf{P}(B_1 \cup B_2) \ge \mathbf{P}(B_1) - \mathbf{P}(\Omega \backslash B_2),$$

находим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap \{x < 1/2\varepsilon\}) - \mathbf{P}(y \ge 1/2\varepsilon) &\le \mathbf{P}(A \cap \{x < 1/2\varepsilon\} \cap \{y < 1/2\varepsilon\}) \\ &\le \mathbf{P}(A \cap \{z < 1/\varepsilon\}) < \varepsilon. \qquad (4)\end{aligned}$$

Как известно, вложение банахова пространства X в метрическое пространство $L^0(\mathbf{P})$ непрерывно (см. [1, гл. 5, § 3, теорема 1]). Отсюда следует, что шар пространства X ограничен по вероятности. Поэтому для любого $\beta > 0$ существует последовательность $M_n \uparrow \infty$ такая, что

$$\mathbf{P}(y \ge M_n) \le \frac{\beta}{2^{n+1}} \quad \text{для всех } y \in X_+,\ \|y\| \le 2.$$

Положим $\varepsilon_n = \min\{1/M_n, \beta/2^n\}$. Неравенство (4) показывает, что существует последовательность $z_n \in \operatorname{conv}|C_1|$, допускающая представление

$$z_n = x_n + y_n, \quad x_n \in C_1,\ y_n \in X_+,\ \|y_n\| \le 2,$$

такое, что

$$\mathbf{P}(A \cap \{x_n < 1/\varepsilon_n\}) < \frac{\varepsilon_n}{2} + \mathbf{P}(y_n \ge 1/\varepsilon_n) \le \beta/2^{n+1} + \mathbf{P}(y_n \ge M_n) \le \beta/2^n.$$

Пусть

$$B_n = \{\omega \in A : \varepsilon_n x_n \ge 1\}, \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Тогда $\mathbf{P}(A \backslash B_n) \le \beta/2^n$ и

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A \backslash B) \le \mathbf{P}(B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A \backslash B_n) \le \mathbf{P}(B) + \beta.$$

Выбирая в качестве β любое число на интервале $(0, \mathbf{P}(A))$, заключаем, что $\mathbf{P}(B) > 0$.

Рассмотрим последовательность $v_n = I_B - \varepsilon_n x_n^- \in L^0(\mathbf{P})$. Неравенство

$$|v_n| = I_B + \varepsilon_n x_n^- \le \varepsilon_n x_n^+ + \varepsilon_n x_n^- = \varepsilon_n |x_n|$$

показывает, что v_n является элементом X. Кроме того,

$$\varepsilon_n x_n - v_n = \varepsilon_n x_n^+ - I_B \ge 0.$$

Следовательно, $v_n \in C - X_+ = C$. Из замкнутости конуса C и неравенства

$$\|v_n - I_B\| = \varepsilon_n \|x_n^-\| \le \varepsilon_n$$

вытекает, что $I_B \in C$. Но это невозможно в силу условия (1).

Полученное противоречие означает, что для любого $A \in \mathscr{F}$ с $\mathbf{P}(A) > 0$ найдется число $c > 0$ такое, что выполнено соотношение (2). Как было указано, отсюда вытекает утверждение леммы. □

Следует отметить, что в ходе доказательства леммы 1 принимались во внимание некоторые идеи работы [12], а именно понятие наследственно неограниченного множества и соответствующее разложение (см. [12, лемма 2.3]).

В следующих двух леммах рассматриваются общие банаховы решетки [1, гл. 10; 2, гл. 9], необязательно являющиеся идеальными пространствами. Обозначим через U, U' единичные шары банаховых пространств X, X' и положим $U'_+ = U' \cap X'_+$, где $X'_+ = \{f \in X' : \langle x, f\rangle \ge 0,\ x \in X_+\}$ — конус неотрицательных элементов X'. Напомним, что множество $H^\circ = \{f \in X' : \langle x, f\rangle \le 1,\ x \in H\}$ называется (*односторонней*) *полярой множества* $H \subset X$. Аналогичным образом определяется поляра $W^\circ \subset X$ множества $W \subset X'$.

Лемма 2. *Для любого элемента x банаховой решетки X верно равенство*

$$\|x^+\| = \sup\{\langle x, h\rangle : h \in U'_+\}.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\sup\{\langle x, h\rangle : h \in U'_+\} \le \sup\{\langle x^+, h\rangle : h \in U'_+\} \le \|x^+\|.$$

Докажем противоположное неравенство. Если $\sup\{\langle x, h\rangle : h \in U'_+\} = 0$, то $x \in (X'_+)^\circ = -X_+$. Следовательно, $\|x^+\| = 0$. Предположим, что

$$\sup\{\langle x, h\rangle : h \in U'_+\} = \alpha > 0,$$

и проверим, что $\|x^+\| \le \alpha$. Пусть

$$\langle u - v, g\rangle \le 1 \quad \text{для всех } u \in U,\ v \in X_+. \tag{5}$$

Полагая $u = 0$, заключаем, что $g \in X'_+$. Отсюда и из неравенства (5) следует, что

$$\begin{aligned}\|g\| = \sup\{|\langle w, g\rangle| : w \in U\} &\le \sup\{\langle w^+, g\rangle + \langle w^-, g\rangle : w \in U\}\\ &= \sup\{\langle |w|, g\rangle : w \in U\} \le \sup\{\langle u, g\rangle : u \in U\} \le 1,\end{aligned}$$

т. е. $g \in X'_+ \cap U' = U'_+$. Обратно, если $g \in U'_+$, то выполнено неравенство (5). Таким образом,

$$U'_+ = (U - X_+)^\circ,$$

и по теореме о биполяре [2, теорема 5.103] имеем $(U'_+)^\circ = \overline{U - X_+}$, где чертой обозначено замыкание по норме X.

Далее, поскольку $x/\alpha \in (U'_+)^\circ$, существует последовательность $(y_n - z_n)_{n=1}^\infty$, $y_n \in U$, $z_n \in X_+$, сходящаяся к x/α по норме. Отсюда следует, что

$$\|x^+/\alpha\| = \lim_{n\to\infty} \|(y_n - z_n)^+\| \le \limsup_{n\to\infty} \|y_n^+\| \le 1. \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть X — банахова решетка и C — замкнутый выпуклый конус в X, удовлетворяющий условию $C \cap X_+ = \{0\}$. Если существует элемент $f \in X'$ такой, что*

$$\sup_{x \in C_1} \langle x, f\rangle < \infty, \quad C_1 = \{x \in C : \|x^-\| \le 1\},$$

то существует элемент $g \in X'$, удовлетворяющий условиям $f \le g$, $g \in C^\circ$.

Доказательство. Пусть $\lambda = \sup\limits_{x \in C_1} \langle x, f\rangle$. Если утверждение леммы неверно, то

$$(f + \lambda U'_+) \cap C^\circ = \varnothing.$$

Применяя теорему отделимости к $\sigma(X', X)$-компактному множеству $f + \lambda U'_+$ и $\sigma(X', X)$-замкнутому множеству C°, заключаем, что существует $x \in X$ такой, что

$$\sup_{\eta \in C^\circ} \langle x, \eta\rangle < \inf\{\langle x, \zeta\rangle : \zeta \in f + \lambda U'_+\}.$$

Поскольку C является конусом, отсюда следует, что $\langle x, \eta\rangle \le 0$, $\eta \in C^\circ$ и $x \in C^{\circ\circ} = C$ по теореме о биполяре. Кроме того,

$$\langle x, f\rangle + \lambda \inf\{\langle x, h\rangle : h \in U'_+\} > 0. \tag{6}$$

По лемме 2

$$\inf\{\langle x, h\rangle : h \in U'_+\} = -\sup\{\langle -x, h\rangle : h \in U'_+\} = -\|(-x)^+\| = -\|x^-\|. \quad (7)$$

Поскольку $0 \neq x \in C$, то $x \notin X_+$ и $\|x^-\| > 0$. Из соотношений (6), (7) вытекает, что

$$\langle x/\|x^-\|, f\rangle > \lambda.$$

Но это противоречит определению λ, так как $x/\|x^-\| \in C_1$. $\square$

В случае $X = L^\infty(\mathbf{P})$ лемма 3 доказана в работе [7, лемма 2.5]. Следует отметить, что данное утверждение верно и для незамкнутого конуса C. Соответствующий результат в контексте локально выпукло-телесных пространств Рисса получен в работе [13, теорема 1].

Доказательство теоремы 1. В силу леммы 1 существует вероятностная мера $\mathbf{Q}$, эквивалентная $\mathbf{P}$, такая, что $C \subset L^1(\mathbf{Q})$. Отсюда следует, что $X \subset L^1(\mathbf{Q})$, так как $-X_+ \subset C$ (ср. с [14, теорема 7]). Кроме того, по лемме 1 строго положительный на X функционал $x \mapsto \langle x, f\rangle = \mathbf{E}_\mathbf{Q} x$, $f \in L^\infty(\mathbf{P})$ ограничен сверху на C_1. Как известно, любой положительный функционал на банаховой решетке непрерывен [2, теорема 9.6]. Следовательно, $f \in X'$, и искомый элемент g существует по лемме 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
2. *Aliprantis C.D., Border K.C.* Infinite dimensional analysis. A hitchhicker's guide. Berlin: Springer-Verl., 2006.
3. *Väth M.* Ideal spaces. Berlin: Springer-Verl., 1997. (Lecture Notes in Math.; V. 1664).
4. *Jouini E., Napp C., Schachermayer W.* Arbitrage and state price deflators in a general intertemporal framework // J. Math. Econom. 2005. V. 41, N 6. P. 722–734.
5. *Kreps D. M.* Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities // J. Math. Econom. 1981. V. 8, N 1. P. 15–35.
6. *Yan J. A.* Caractérisation d'une classe d'ensembles convexes de L^1 ou H^1 // Séminare de Probabilites XIV. Berlin: Springer-Verl., 1980. P. 220–222. (Lecture Notes in Math. V. 784).
7. *Rokhlin D. B.* The Kreps–Yan theorem for L^∞ // Int. J. Math. Math. Sci. 2005. V. 2005, N 17. P. 2749–2756.
8. *Cascales D., Namioka I., Orihuela J., Raja M.* Banach spaces and topology (I) // Encyclopedia of general topology. New York: Elsevier, 2003. P. 449–453.
9. *Cassese G.* Yan theorem in L^∞ with applications to asset pricing // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2007. V. 23, N 4. P. 551–562.
10. *Corson H. H.* The weak topology of a Banach space // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101, N 1. P. 1–15.
11. *Богачев В. И.* Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. Т. 1.
12. *Brannath W., Schachermayer W.* A bipolar theorem for $L^0_+(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ // Séminaire de Probabilités XXXIII. Berlin: Springer-Verl., 1999. P. 349–354. (Lecture Notes in Math.; V. 1709).
13. *Rokhlin D., Schachermayer W.* A note on lower bounds of martingale measure densities // Illinois J. Math. 2006. V. 50, N 4. P. 815–824.
14. *Лозановский Г. Я.* О некоторых банаховых структурах // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 3. С. 584–599.

Статья поступила 11 октября 2007 г.

Рохлин Дмитрий Борисович
Южный федеральный университет,
Факультет математики, механики и компьютерных наук,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090
rokhlin@math.rsu.ru