Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.9

ОБ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ДИХОТОМИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт

Аннотация. Для указанного в названии класса динамических систем установлен прямым методом Ляпунова критерий экспоненциальной дихотомии с ослабленным по сравнению со случаем любой непрерывной матрицы условием на производную функции Ляпунова вдоль траекторий системы. В качестве приложения получен достаточный признак дихотомии для векторного почти периодического уравнения второго порядка в терминах коэффициентов.

Ключевые слова: дихотомия, функция Ляпунова, оболочка почти периодической матрицы.

§ 1. Введение. Формулировка основного результата

1. В работе [1] доказан признак экспоненциальной устойчивости для системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N, \tag{1}$$

с почти периодической (п. п.) матрицей $A(t)$ в терминах эрмитовой формы

$$v(x,t) = \langle G(t)x, x\rangle \tag{2}$$

с положительно определенной гладкой п. п. матрицей $G(t)$ с ослабленным условием на производную формы (2) вдоль траекторий системы (1):

$$\dot{v}(x,t) = \langle F(t)x, x\rangle, \quad F = \dot{G} + GA + A^*G. \tag{3}$$

Для экспоненциальной устойчивости решения $x = 0$ достаточно лишь, чтобы форма (3) была неположительна и отлична от тождественного нуля на каждом ненулевом решении системы (1). В основе обоснования лежат свойства некоторых функций на компакте $K = H \times S$, где H — оболочка п. п. матрицы $A(t)$, S — единичная сфера в $\mathbb{C}^N$.

Позднее результаты работы [1] были распространены на другие классы п. п. уравнений: разностных, дифференциально-разностных, функционально-дифференциальных [2–9].

В данной работе приемы, аналогичные развитым в [1], применены к анализу более сложного типа поведения решений системы (1) — экспоненциальной дихотомии.

2. Будем, следуя [10], называть *взаимным наклоном подпространств* E_1, E_2 пространства $E = \mathbb{C}^N$ число

$$\mathrm{Sn}(E_1, E_2) = \inf |x_1 - x_2| \quad (x_k \in E_k,\ |x_k| = 1).$$

Здесь и далее $|\cdot|$ — эрмитова норма в E, так же обозначается согласованная с ней матричная норма. В частном случае, когда E_1, E_2 — вещественные прямые, $\mathrm{Sn}(E_1, E_2) = 2\sin\frac{\alpha}{2}$, где α — наименьший угол между прямыми.

Будем говорить, что для системы (1) с непрерывной на оси матрицей $A(t)$ и матрицей Коши $U(t)$ имеет место свойство *экспоненциальной дихотомии* (э-дихотомии), если фазовое пространство E распадается в прямую сумму подпространств E_1, E_2 так, что

1) при некоторых $\mu, \nu > 0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} &x \in E_1 \Rightarrow |U(t)x| \le \mu e^{-\nu(t-\tau)}|U(\tau)x| \ (t \ge \tau),\\ &x \in E_2 \Rightarrow |U(t)x| \le \mu e^{-\nu(\tau-t)}|U(\tau)x| \ (t \le \tau), \end{aligned} \tag{4}$$

2) взаимный наклон движущихся подпространств $E_{kt} = U(t)E_k$ отделен от нуля:

$$\mathrm{Sn}(E_{1t}, E_{2t}) \ge \mathrm{const} > 0. \tag{5}$$

3. Обозначим через $\mathscr{J}$ класс матриц $G : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ со свойствами:

$$\begin{gathered} G \in C^1,\ G^* = G,\ |G| \le \mathrm{const},\ |\det G| \ge \mathrm{const} > 0,\\ \text{эрмитова форма (2) индефинитна.} \end{gathered} \tag{6}$$

Известно [11]: для того чтобы система (1) с непрерывной ограниченной на оси матрицей $A(t)$ была э-дихотомична, необходимо и достаточно существование матрицы $G \in \mathscr{J}$ такой, что $F \le -mI$ $(m > 0)$. Этот результат повторен в [12]. В классе п. п. систем (1) имеет место следующее усиление.

Теорема 1. I. *Если для системы* (1) *с п. п. матрицей* $A(t)$ *существует матрица* $G \in \mathscr{J}$ *такая, что*

1°) G, $\dot G$ *п. п.,*

2°) $F \le 0$ $(t \in \mathbb{R})$,

3°) *форма* (3) *отлична от тождественного нуля на каждом решении* $x(t) \ne 0$ *системы* (1)*:* $\dot v(x(t), t) \not\equiv 0$,

то система (1) *э-дихотомична.*

II. *Если система* (1) *с п. п. матрицей* $A(t)$ *э-дихотомична, то существует матрица* $G \in \mathscr{J}$ *со свойствами* 1°–3°.

Обоснование опирается на пять лемм. В качестве приложения в § 4 доказан достаточный признак э-дихотомии для векторного п. п. уравнения второго порядка в терминах коэффициентов.

§ 2. Подготовительные леммы

1. Обозначим через $\mathfrak{M}$ банахово пространство непрерывных ограниченных функций $A : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$ с нормой $\|A\| = \sup|A|$.

Лемма 1. *Если* $A_n \to A$ *в* $\mathfrak{M}$, *то последовательность матриц Коши* $U_n(t)$ *систем* $\dot x = A_n x$ *равномерно на каждом отрезке* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *сходится к матрице Коши* $U(t)$ *системы* (1).

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\Delta = [0, a]$, $a > 0$. Обозначим $\xi_n(t) = |U_n(t) - U(t)|$. Вычитая из равенства

$$U_n(t) = I + \int_0^t A_n(\tau)U_n(\tau)\,d\tau$$

такое же равенство для $U(t)$ и оценивая норму левой части, получим

$$\xi_n(t) \le \alpha \int_0^t \xi_n(\tau)\,d\tau + \varepsilon_n, \quad t \in \Delta,$$

где $\alpha = \sup\limits_n \|A_n\|$, $\varepsilon_n = a \sup\limits_{t\in\Delta} |U(t)| \|A_n - A\|$. Применяя лемму Гронуолла, найдем $\xi_n(t) \le \varepsilon_n e^{\alpha t} \le \varepsilon_n e^{\alpha a}$, откуда следует требуемое.

2. Далее будем обозначать через $H(A)$ оболочку п. п. матрицы $A(t)$ — замыкание в $\mathfrak{M}$ семейства сдвигов $A(t+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. В силу критерия компактности Бохнера [13] $H(A)$ — компакт в $\mathfrak{M}$. Аналогично оболочка $H(A, G, \dot G)$ прямоугольной п. п. матрицы $(A, G, \dot G)$ — компакт в $\mathfrak{M}^3$. Если $(\mathscr{A}, \mathscr{G}, T) \in H(A, G, \dot G)$, то $T = \dot{\mathscr{G}}$. Если $\mathscr{A} \in H(A)$, то $A \in H(\mathscr{A})$.

Поставим в соответствие каждой тройке матриц $(\mathscr{A}, \mathscr{G}, \dot{\mathscr{G}}) \in H(A, G, \dot G)$ систему $\dot x = \mathscr{A} x$ и эрмитовы формы

$$w(x,t) = \langle \mathscr{G} x, x\rangle, \quad \dot w(x,t) = \langle \mathscr{F} x, x\rangle, \quad \mathscr{F} = \dot{\mathscr{G}} + \mathscr{G}\mathscr{A} + \mathscr{A}^*\mathscr{G}. \tag{7}$$

Лемма 2. *Если тройка $(A, G, \dot G)$ с п. п. матрицами удовлетворяет условиям 1°–3° теоремы 1, то каждая тройка $(\mathscr{A}, \mathscr{G}, \dot{\mathscr{G}}) \in H(A, G, \dot G)$ удовлетворяет таким же условиям:*

$$\begin{gathered} \mathscr{G} \in \mathscr{J},\ (\mathscr{A}, \mathscr{G}, \dot{\mathscr{G}}) \text{ п. п.},\ \mathscr{F} \le 0, \\ \dot w(x(t), t) \not\equiv 0 \text{ на решениях } x(t) \ne 0 \text{ системы } \dot x = \mathscr{A} x. \end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство. В проверке нуждается индефинитность матрицы $\mathscr{G}$ и неравенство (8) для $\dot w$.

(i) Из (6), в частности, следует: существуют постоянные $m_1, m_2 > 0$ такие, что спектр $G(t)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$ лежит внутри отрезков $\Delta_+ = [m_1, m_2]$, $\Delta_- = [-m_2, -m_1]$, при этом обе части спектра непусты. Отсюда вытекает такое же утверждение для всех $\mathscr{G} \in H(G)$.

(ii) Пусть для некоторой тройки $(\mathscr{A}, \mathscr{G}, \dot{\mathscr{G}}) \in H(A, G, \dot G)$ не выполняется неравенство (8) для $\dot w$: существует такой вектор $x_0 \in E$, $x_0 \ne 0$, что на решении $x(t) = V(t)x_0$ системы $\dot x = \mathscr{A} x$ с матрицей Коши $V(t)$ выполняется равенство

$$\dot w(x(t), t) = \langle V^*(t)\mathscr{F}(t)V(t)x_0, x_0\rangle \equiv 0, \tag{9}$$

где $\mathscr{F}$ — матрица (7). Так как $(A, G, \dot G) \in H(\mathscr{A}, \mathscr{G}, \dot{\mathscr{G}})$, существует последовательность сдвигов $(\mathscr{A}_n, \mathscr{G}_n) = (\mathscr{A}(t+\tau_n), \mathscr{G}(t+\tau_n))$ такая, что

$$(\mathscr{A}_n, \mathscr{G}_n, \dot{\mathscr{G}}_n) \to (A, G, \dot G) \quad \text{в } \mathfrak{M}^3.$$

Обозначим через $V_n(t)$ матрицу Коши системы $\dot x = \mathscr{A}_n x$:

$$V_n(t) = V(t+\tau_n)V^{-1}(\tau_n).$$

В силу леммы 1 имеет место равномерная на каждом отрезке сходимость $V_n(t) \rightrightarrows U(t)$, где $U(t)$ — матрица Коши системы (1). Построим последовательность векторов

$$f_n = |V(\tau_n)x_0|^{-1} V(\tau_n)x_0, \quad |f_n| = 1.$$

Нетрудно убедиться с учетом формулы для V_n, что равенство (9) с заменой t на $t+\tau_n$ равносильно равенству

$$\langle V_n^*(t)\mathscr{F}_n(t)V_n(t)f_n, f_n\rangle \equiv 0, \tag{10}$$

где $\mathscr{F}_n = \dot{\mathscr{G}}_n + \mathscr{G}_n\mathscr{A}_n + \mathscr{A}_n^*\mathscr{G}_n$. Выделяя подпоследовательность $f_{n_k} \to f_0$, $|f_0| = 1$, и переходя в равенстве (10) с заменой n на n_k к пределу при $n_k \to \infty$, получим

$$\langle U^*(t)F(t)U(t)f_0, f_0\rangle \equiv 0$$

или, что то же, $\dot{v}(x_0(t), t) \equiv 0$, где $x_0(t) = U(t)f_0$ — ненулевое решение системы (1), что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

3. Построим в условиях п. I теоремы 1 компакт $K = H(A, G, \dot{G}) \times S$, где S — единичная сфера в E. Поставим в соответствие каждой точке $y = (\mathscr{A}, \mathscr{G}, \dot{\mathscr{G}}, z_0) \in K$ числа

$$w(t,y) = \langle \mathscr{G}(t)z(t;\mathscr{A},z_0), z(t;\mathscr{A},z_0)\rangle, \quad \dot{w}(t,y) = \langle \mathscr{F}(t)z(t;\mathscr{A},z_0), z(t;\mathscr{A},z_0)\rangle,$$

где $z(t;\mathscr{A},z_0)$ — решение задачи Коши

$$\dot{z} = \mathscr{A}(t)z, \quad z(0) = z_0,$$

$\mathscr{F}$ — матрица (7). Ввиду непрерывной зависимости на каждом отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ решений этой задачи от коэффициентов и начальных данных функции $w(t,y)$, $\dot{w}(t,y)$ непрерывны на множестве $\mathbb{R} \times K$. Наконец, $\dot{w}(t,y) \not\equiv 0$ при каждой $y \in K$ в силу леммы 2.

Лемма 3. *В условиях первой части теоремы* 1 *существует отрезок* $\Delta_0 \subset \mathbb{R}$ *такой, что* $\dot{w}(t,y) \neq 0$ *при каждой* $y \in K$ *хотя бы в одной точке внутри* Δ_0.

Доказательство. Функция $\varphi : K \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\varphi(y) = \inf\{t \in \mathbb{R} : \dot{w}(t,y) \neq 0\},$$

полунепрерывна сверху, поэтому ограничена сверху: $\beta = \sup\varphi(y) < \infty$. Далее, функция

$$\psi(y) = \sup\{t \leq \beta : \dot{w}(t,y) \neq 0\}$$

полунепрерывна снизу, поэтому ограничена снизу: $\alpha = \inf\psi(y) > -\infty$. В качестве искомого отрезка Δ_0 можно выбрать любой отрезок, содержащий внутри $[\alpha, \beta]$. Лемма доказана.

Далее будем без ограничения общности считать $\Delta_0 = [0, 1]$.

Лемма 4. *В условиях первой части теоремы* 1 *для каждой* $y \in K$ *существует отрезок* $\Delta(y) \subset \Delta_0$ *со свойствами:*

$$\dot{w}(t,y) \leq -\gamma < 0 \ \textit{при}\ t \in \Delta(y), \quad \textit{длина}\ \Delta(y) \geq \delta > 0, \tag{11}$$

где γ, δ *не зависят от* y.

Доказательство. Так как функция $f(y) = \min\limits_{t\in\Delta_0} \dot{w}(t,y)$ непрерывна на K и с учетом леммы 3 $f(y) < 0$ на K, то $\max f(y) = -c < 0$. Поставим в соответствие каждой $y \in K$ отрезок $\Delta(y) \subset \Delta_0$ такой, что выполнено первое неравенство (11) при $\gamma = \frac{c}{2}$, при этом $\dot{w}(t,y) > -\gamma$ в точках $t \in \Delta_0 \setminus \Delta(y)$, достаточно близких к $\Delta(y)$; если таких отрезков несколько, зафиксируем какой-либо из них. Очевидно, длина $\Delta(y)$ непрерывно зависит от y, поэтому имеет место второе неравенство (11) при некотором $\delta \in (0, 1)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия п.* I *теоремы* 1, $x(t)$ *— ненулевое решение системы* (1). *Тогда для каждого* $n \in \mathbb{Z}$ *существует такой отрезок* $\omega_n \subseteq [n, n+1]$, *что*

$$\dot v(x(t), t) \le -\gamma |x(n)|^2 \text{ при } t \in \omega_n, \quad \text{длина } \omega_n \ge \delta, \tag{12}$$

где $v(x, t)$ *— форма* (2), γ, δ *— постоянные* (11).

В самом деле,

$$y_n = (A(\tau+n), G(\tau+n), \dot G(\tau+n), x(n)/|x(n)|) \in K$$

при $\tau \in \Delta_0$. Из определения $\dot w(t, y)$ следует, что

$$\dot w(\tau, y_n) = \dot v(x(\tau+n)/|x(n)|, \tau+n), \quad \tau \in \Delta_0. \tag{13}$$

Обозначим $\omega_n = \{t \in [n, n+1] : t = \tau + n,\ \tau \in \Delta(y_n)\}$. Из (13) и определения (11) отрезка $\Delta(y)$ получаем

$$\dot v(x(t)/|x(n)|, t) \le -\gamma \quad \text{при } t \in [n, n+1],$$

откуда вытекает (12).

4. Пусть система (1) с непрерывной матрицей $A(t)$ э-дихотомична, $\Gamma(t, \tau)$ — экспоненциально убывающая матрица Грина системы (1) [13–15]:

$$\begin{gathered} \frac{d\Gamma}{dt} = A(t)\Gamma, \quad \frac{d\Gamma}{d\tau} = -\Gamma A(\tau), \quad \Gamma(\tau+0, \tau) - \Gamma(\tau-0, \tau) = I, \\ |\Gamma(t, \tau)| \le \mu_0 e^{-\nu|t-\tau|} \text{ при некоторых } \mu_0, \nu > 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Справедливо утверждение [10]: уравнение $\dot x = Ax + f(t)$ с ограниченной на оси кусочно непрерывной правой частью имеет точно одно ограниченное на оси решение $x(t)$, и верна формула

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t, \tau) f(\tau)\, d\tau. \tag{15}$$

Лемма 5. *Пусть система* (1) *с п. п. матрицей* $A(t)$ *э-дихотомична,* $\varepsilon > 0$, ω *—* ε*-почти-период* $A(t)$*:*

$$A(t+\omega) = A(t) + \delta(t), \quad \|\delta\| < \varepsilon. \tag{16}$$

Тогда для матрицы Грина верна оценка

$$|\Gamma(t+\omega, \tau+\omega) - \Gamma(t, \tau)| \le \frac{\varepsilon\mu_0^2}{\nu}(1 + \nu|t-\tau|)e^{-\nu|t-\tau|}. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим $\Gamma_1(t, \tau) = \Gamma(t+\omega, \tau+\omega)$. Разность $\theta = \Gamma_1 - \Gamma$ — гладкая ограниченная в $\mathbb{R}^2$ функция. Вычитая первое равенство (14) из такого же равенства для Γ_1, получим $\frac{d\theta}{dt} = A(t)\theta + \delta(t)\Gamma_1(t, \tau)$. Представляя решение формулой (15), найдем

$$\theta(t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(t, s)\delta(s)\Gamma_1(s, \tau)\, ds.$$

Отсюда с учетом оценок (14), (16) для Γ, Γ_1, δ следует оценка

$$|\theta| \le \varepsilon\mu_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu(|t-s|+|s-\tau|)}\, ds,$$

совпадающая с (17). Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

I. Пусть для системы (1) с п. п. матрицей $A(t)$ существует матрица $G \in \mathscr{J}$, удовлетворяющая условиям 1°–3°.

1. Обозначим через $P_+(t)$, $P_-(t)$ спектральные проекторы, отвечающие положительной и отрицательной частям спектра $G(t)$:

$$P_\pm(t) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{\gamma_\pm} (\lambda I - G(t))^{-1}\, d\lambda,$$

где γ_+, γ_- — проходимые в положительном направлении окружности на λ-плоскости, окружающие отрезки Δ_+, Δ_- (см. § 2, п. 2(i)). Построим последовательности подпространств

$$E_n^+ = U^{-1}(n)P_+(n)E, \quad E_n^- = U^{-1}(n)P_-(n)E, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Выбирая в $E_n^\pm$ ортонормированные базисы

$$(e_{1n}^+, \ldots, e_{N_1 n}^+), \quad (e_{1n}^-, \ldots, e_{N_2 n}^-), \quad N_1 + N_2 = N,$$

и выделяя сходящиеся подпоследовательности, построим предельные ортонормированные цепочки:

$$(e_{1n_k}^+, \ldots, e_{N_1 n_k}^+) \to (e_1^+, \ldots, e_{N_1}^+) \ (n_k \to +\infty),$$

$$(e_{1n_j}^-, \ldots, e_{N_2 n_j}^-) \to (e_1^-, \ldots, e_{N_2}^-) \ (n_j \to -\infty).$$

Обозначим через E_1, E_2 линейные оболочки предельных цепочек соответственно $\{e_i^+\}$, $\{e_i^-\}$. Покажем, что E_1, E_2 удовлетворяют требованиям, указанным в определении э-дихотомии. В силу ограниченности на оси п. п. матрицы $A(t)$ требование (5) вытекает из (4) [10, гл. 4, лемма 3.2]; нужно показать выполнение оценок (4).

2. Пусть $x_0 \in E_1$, $x_0 \neq 0$, $x(t) = U(t)x_0$,

$$v(t) = v(x(t), t) = \langle G(t)U(t)x_0, U(t)x_0 \rangle.$$

Тогда $\dot v(t) = \langle F(t)U(t)x_0, U(t)x_0 \rangle$. Ввиду условия $F \le 0$ функция $v(t)$ невозрастающая.

2.1. Из определения подпространства E_1 следует, что $x_0 = \lim x_k$ при некоторых $x_k \in E_{n_k}^+$:

$$x_k = U^{-1}(n_k)P_+(n_k)y_k, \quad y_k \in E.$$

При $t \le n_k$ с учетом $\dot v \le 0$ имеем

$$\begin{aligned} \langle G(t)U(t)x_k, U(t)x_k \rangle &\ge \langle G(n_k)U(n_k)x_k, U(n_k)x_k \rangle \\ &= \langle G(n_k)P_+(n_k)y_k, P_+(n_k)y_k \rangle > 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$v(t) = \lim_{n_k \to +\infty} \langle G(t)U(t)x_k, U(t)x_k \rangle \ge 0$$

при любом $t \in \mathbb{R}$.

2.2. В силу следствия из леммы 4 при каждом $n \in \mathbb{Z}$ существует отрезок $[\alpha_n, \beta_n] \subseteq [n, n+1]$ такой, что

$$\dot v(t) \le -\gamma |x(n)|^2 \text{ при } t \in [\alpha_n, \beta_n], \quad \beta_n - \alpha_n = \delta, \tag{18}$$

где γ, δ — постоянные (11). Интегрируя неравенство (18) по отрезку $[\alpha_n, \beta_n]$, получим

$$v(\alpha_n) \geq v(\beta_n) + \gamma\delta|x(n)|^2,$$

откуда с учетом $\dot{v} \leq 0$ следует, что

$$v(n) \geq v(n+1) + \gamma\delta|x(n)|^2, \tag{19}$$

тем более

$$v(n) \geq \lim_{m\to+\infty} v(m) + \gamma\delta|x(n)|^2. \tag{20}$$

Покажем, что предел в правой части равен нулю. Применяя к $v(n+1)$ в (19) это неравенство с заменой n на $n+1$ и продолжая процесс, получим в пределе неравенство

$$v(n) \geq \lim_{m\to+\infty} v(m) + \gamma\delta \sum_{k=n}^{\infty} |x(k)|^2,$$

которое возможно, если ряд в правой части сходится, в частности, $|x(k)| \to 0$, поэтому

$$v(m) = \langle G(m)x(m), x(m)\rangle \leq \|G\||x(m)|^2 \to 0 \quad (m \to +\infty). \tag{21}$$

Из (20), (21) с учетом $\dot{v} \leq 0$ следует, что

$$v(t) \geq \gamma\delta|x(n)|^2 \quad (n \in \mathbb{Z},\ t \leq n). \tag{22}$$

2.3. Из (22) попутно вытекает: $v(t) > 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть $[\tau, t] \subset \mathbb{R}$, $[m, n]$ — наименьший отрезок с целыми m, n, содержащий $[\tau, t]$. С учетом невозрастания $v(t)$ и оценки (18) имеем

$$\int\limits_m^n \frac{\dot{v}(s)}{v(s)}\,ds = \sum_{k=m}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} \frac{\dot{v}(s)}{v(s)}\,ds \leq \sum_{k=m}^{n-1} \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} \frac{\dot{v}(s)}{v(s)}\,ds \leq \sum_{k=m}^{n-1} \frac{-\gamma|x(k)|^2}{v(k)},$$

откуда ввиду оценки (22)

$$\int\limits_m^n \frac{\dot{v}(s)}{v(s)}\,ds \leq -a(n-m), \quad a = \gamma\|G\|^{-1},$$

или после интегрирования

$$v(n) \leq e^{-a(n-m)} v(m). \tag{23}$$

С учетом выбора m, n и известного неравенства для решений системы (1)

$$|x(t_1)| \leq e^{\|A\|(t_1-t_2)}|x(t_2)| \quad (t_1 \geq t_2) \tag{24}$$

из (21) следует оценка $v(m) \leq \|G\|\,|x(m)|^2 \leq \|G\|e^{2\|A\|}|x(\tau)|^2$, из (22) и (24) — оценка $v(n) \geq \gamma\delta|x(n+1)|^2 \geq \gamma\delta e^{-4\|A\|}|x(t)|^2$. С учетом этого и неравенства $n - m \geq t - \tau$ из (23) имеем

$$|x(t)| \leq \mu e^{-\nu(t-\tau)}|x(\tau)|, \tag{25}$$

где $\mu = e^{3\|A\|}\sqrt{(\gamma\delta)^{-1}\|G\|}$, $\nu = \frac{a}{2}$. Первая оценка (4) доказана.

3. Случай $x_0 \in E_2$ приводится к рассмотренному в п. 2 случаю заменой времени $t = -t'$ и, следовательно, заменами в (1)–(3) $x(t)$ на $x(t') = x(-t)$, $A(t)$

на $\tilde{A}(t') = -A(-t')$, $G(t)$ на $\tilde{G}(t') = -G(-t')$. Получаемая на этом пути оценка вида (25) с заменой t, τ на t', τ' равносильна второй оценке (4).

Из (4), в частности, следует, что $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, поэтому с учетом $\dim E_1 + \dim E_2 = N$ имеет место прямое разложение $E = E_1 \oplus E_2$.

II. Пусть система (1) с п. п. матрицей $A(t)$ э-дихотомична. Построим матрицу

$$G_0(t) = \int\limits_t^\infty \Gamma^*(\tau,t)\Gamma(\tau,t)\,d\tau - \int\limits_{-\infty}^t \Gamma^*(\tau,t)\Gamma(\tau,t)\,d\tau, \tag{26}$$

где $\Gamma(t,\tau)$ — матрица Грина (12). Из результатов работы [12], в частности, следует, что

$$G_0 \in \mathscr{J}, \quad \dot{G}_0 + G_0 A + A^* G_0 \le -mI \quad (m > 0),$$

тем самым «с избытком» выполняются требования 2°, 3° при $G = G_0$. Покажем, что G_0 удовлетворяет требованию 1°.

Выполняя в обоих интегралах (26) замену $\tau = s + t$, получим

$$G_0(t) = \int\limits_0^\infty \Gamma^*(s+t,t)\Gamma(s+t,t)\,ds - \int\limits_{-\infty}^0 \Gamma^*(s+t,t)\Gamma(s+t,t)\,ds. \tag{27}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, ω — ε-почти период матрицы $A(t)$. Оценивая $|G_0(t+\omega) - G_0(t)|$ с учетом вытекающего из (17) неравенства

$$|\Gamma(s+t+\omega, t+\omega) - \Gamma(s+t,t)| \le \frac{\varepsilon\mu_0^2}{\nu}(1+\nu|s|)e^{-\nu|s|}$$

и оценки (14) для $|\Gamma|$, после простых вычислений получим оценку вида

$$|G_0(t+\omega) - G_0(t)| < \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = c\varepsilon, \quad c = c(\mu_0, \nu). \tag{28}$$

Отсюда следует почти периодичность матрицы (26). Дифференцируя (27) по t, с учетом равенств (14) и почти периодичности $A(t)$ приходим к оценке вида (28) с заменой G_0 на $\dot{G}_0$. Теорема доказана.

§ 4. Признак э-дихотомии для векторного п. п. уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = 0, \quad u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N = E, \tag{29}$$

с п. п. матрицами p, q. Будем говорить, что *уравнение* (29) *э-дихотомично*, если этим свойством обладает эквивалентная система (1), где

$$x = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -q & -p \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Теорема 2. *Пусть для уравнения* (29) *с п. п. матрицами* p, q *выполняются условия*

$$q^* = q, \quad q \le -mI \ (m > 0), \quad h = \dot{q} + pq + qp^* \ge 0, \quad \det h \not\equiv 0. \tag{31}$$

Тогда уравнение (29) *э-дихотомично.*

Доказательство. Положим $G = \operatorname{diag}(I, q^{-1})$. Тогда для матрицы F и формы $\dot{v}$ на решении $x(t)$ системы (1), (30) имеют место формулы

$$F = -\operatorname{diag}(0, q^{-1}hq^{-1}), \quad \dot{v}(x(t), t) = -\dot{u}^* q^{-1}hq^{-1}\dot{u}.$$

Если $x(t) \neq 0$, то равенство $\dot{u} \equiv 0$ невозможно: в противном случае из (29) получим $u \equiv 0$. Поэтому при условиях (31) с учетом ограниченности п. п. матрицы q и почти периодичности h для системы (1), (30) выполняются все требования п. I теоремы 1. Теорема доказана.

Обратим внимание, что здесь матрица F вырожденна и заведомо не удовлетворяет требованию $F \leq -mI$ (см. § 1, п. 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добровольский С. М., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений линейных систем с почти периодической матрицей // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 6. С. 10–14.
2. *Добровольский С. М., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для почти периодических систем // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 1. С. 151–153.
3. *Кириченова О. В., Котюргина А. С., Романовский Р. К.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 1. С. 170–174.
4. *Кириченова О. В.* Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 1. С. 45–48.
5. *Алексенко Н. В.* Устойчивость решений почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Изв. вузов. Математика. 2000. № 2. С. 3–6.
6. *Алексенко Н. В., Романовский Р. К.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.
7. *Романовский Р. К., Троценко Г. А.* Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.
8. *Троценко Г. А.* Об устойчивости решений почти периодической системы функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа // Изв. вузов. Математика. 2003. № 6. С. 77–81.
9. *Добровольский С. М., Рогозин А. В.* Прямой метод Ляпунова для почти периодической разностной системы на компакте // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 98–105.
10. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
11. *Майзель А. Д.* Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений // Тр. УрПИ. Сер. мат. 1954. № 51. С. 20–50.
12. *Кулик В. Л.* Квадратичные формы и дихотомия решений систем линейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 1. С. 43–49.
13. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
14. *Годунов С. К., Гордиенко В. М.* Матрица Грина. Краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 1. С. 39–76.
15. *Годунов С. К.* Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 5. С. 24–37.

Статья поступила 28 сентября 2006 г., окончательный вариант — 18 апреля 2007 г.

Романовский Рэм Константинович, Бельгарт Любовь Васильевна
Омский гос. технический университет, кафедра высшей математики,
пр. Мира, 11, Омск 644050
Belgart@mail.rambler.ru