Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 512.27

НЕЯВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД КАТЕГОРИЯМИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Аннотация. Формулируется ряд понятий и доказываются некоторые результаты о неявных операциях на различных категориях универсальных алгебр, обобщающие известные ранее результаты для псевдомногообразий, псевдоуниверсальных классов алгебр, позитивно-условных псевдомногообразий и т. д.

Ключевые слова: категории универсальных алгебр, псевдомногообразие, неявная операция. условно термальные операции.

При изучении различных классов универсальных алгебр важную роль играют так называемые неявные операции на этих алгебрах. Первоначально рассматриваемые в работах Эйленберга и Шутценберже [1] на классах конечных полугрупп, позднее подобные операции в работах Райтермана [2], Хиггинса [3] и др. изучались для случая произвольных универсальных алгебр. В работах автора [4–6] этот подход был реализован для ряда других классов конечных алгебр: псевдоуниверсальных классов, позитивно-условных псевдомногообразий, $\exists^+$-условных псевдомногообразий. При этом была выявлена связь неявных операций на этих классах с так называемыми условно термальными функциями, при различных вариациях понятия «условие». Цель настоящей работы — формулировка общих понятий и доказательство некоторых общих результатов о неявных операциях на различных категориях универсальных алгебр, обобщающих указанные выше частные случаи.

При этом далее нас будут интересовать преимущественно вопросы синтаксических описаний неявных операций и характеризации с помощью них тех или иных классов конечных алгебр.

Пусть $\mathscr{K}$ — некоторый абстрактный класс универсальных алгебр и $\overline{\mathscr{K}}$ — категория, объектами которой являются $\mathscr{K}$-алгебры, а морфизмами — те или иные гомоморфизмы между этими алгебрами, включая все изоморфные вложения $\mathscr{K}$-алгебр друг в друга.

Для любых $\mathscr{K}$-алгебры $\mathscr{A}$ и ее элементов $\{a_1, \dots, a_n\}$ через $\langle a_1, \dots, a_n\rangle_{\mathscr{A}}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, порожденную множеством $\{a_1, \dots, a_n\}$.

Функции $g_{\mathscr{A}}(x_1, \dots, x_n)$, определенные на $\mathscr{K}$-алгебрах $\mathscr{A}$, назовем *неявной* $\overline{\mathscr{K}}$*-операцией* g, если они коммутируют с $\mathscr{K}$-морфизмами и для любой $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$, любых $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$ имеет место включение $g_{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) \in \langle a_1, \dots, a_n\rangle_{\mathscr{A}}$.

Заметим, что если $\mathscr{K}$-алгебра $\mathscr{B}$ является подалгеброй $\mathscr{K}$-алгебры $\mathscr{A}$ и $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{B}$, то $g_{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) = g_{\mathscr{B}}(a_1, \dots, a_n)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00159–а).

Формальное равенство $g = h$ двух неявных $\overline{\mathscr{K}}$-операций будем называть *$\overline{\mathscr{K}}$-псевдотождеством.* Для $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ истинность $\overline{\mathscr{K}}$-псевдотождества $g = h$ на $\mathscr{A}$ означает совпадение функций g и h на $\mathscr{A}$ (при естественном добавлении, если нужно, фиктивных переменных). Под *$\overline{\mathscr{K}}$-промногообразием* будем понимать подкласс $\mathscr{K}_0$ класса $\mathscr{K}$, для которого существует совокупность $\Im$ $\mathscr{K}$-псевдотождеств такая, что $\mathscr{K}_0 = \{\mathscr{A} \in \mathscr{K} \mid \mathscr{A} \models \Im\}$.

Прежде всего заметим, что если класс $\mathscr{K}$ включает в себя n-порожденную $\mathscr{K}$-свободную алгебру и морфизмами категории $\overline{\mathscr{K}}$ являются все гомоморфизмы $\mathscr{K}$-алгебр друг в друга, то очевидно, что m-местные (где $m \leq n$) неявные $\overline{\mathscr{K}}$-операции суть термальные операции на $\mathscr{K}$-алгебрах. Тем самым при произвольно больших подобных n $\overline{\mathscr{K}}$-псевдотождества суть традиционные тождества, а $\overline{\mathscr{K}}$-промногообразия — это классы вида $\mathscr{K} \cap \mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ — некоторое многообразие алгебр.

Пусть L — некоторый фрагмент языка первого порядка сигнатуры σ, замкнутый относительно конъюнкций и включающий в себя формулу $x = x$. Любую формулу $\phi(x_1, \dots, x_n)$ из L будем называть *L-условием.* Понятие *L-условного терма над классом алгебр $\mathscr{K}$* определим следующим образом. Если $\phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_m(x_1, \dots, x_n)$, где $m \in \omega$, — некоторые L-условия и $t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_m(x_1, \dots, x_n)$ — термы сигнатуры σ, то схема

$$t(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \phi_1(x_1, \dots, x_n) \to t_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \phi_m(x_1, \dots, x_n) \to t_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

является L-условным термом над $\mathscr{K}$, если

$$\mathscr{K} \models \forall x_1, \dots, x_n \big(\bigvee_{i \leq m} \phi_i(x_1, \dots, x_n) \big)$$

и

$$\mathscr{K} \models \forall x_1, \dots, x_n (\phi_i(x_1, \dots, x_n) \& \phi_j(x_1, \dots, x_n) \to t_i(x_1, \dots, x_n) = t_j(x_1, \dots, x_n))$$

для любых $i, j \leq m$.

Любой L-условный терм t над $\mathscr{K}$ естественным образом определяет *L-условно термальную функцию $t_{\mathscr{A}}$ на $\mathscr{K}$-алгебрах*: если $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ и $a_1, \dots, a_n, b \in \mathscr{A}$, то $t_{\mathscr{A}}(a_1, \dots, a_n) = b$ тогда и только тогда, когда

$$\mathscr{A} \models \phi_i(a_1, \dots, a_n) \& t_i(a_1, \dots, a_n) = b$$

для некоторого $i \leq m$.

В силу включения в L формул вида $x = x$ очевидно, что все термальные функции на $\mathscr{K}$-алгебрах являются L-условно термальными на $\mathscr{K}$. В случае, когда L — совокупность всех бескванторных (всех бескванторных позитивных, всех экзистенционально позитивных) формул, понятия L-условного терма и L-условно термальной функции на классе $\mathscr{K}$ совпадают с понятиями условного (позитивно-условного, $\exists^+$-условного) терма (в силу существования для последних так называемой нормальной формы) и соответствующих условно (позитивно-условно, ...) термальных функций на $\mathscr{K}$-алгебрах, рассмотренных в работах [7–9] (обзоры соответствующих результатов см. в [10, 11]).

Под *L-условным тождеством над $\mathscr{K}$* будем понимать формальное равенство двух L-условных термов и будем говорить, что L-условное тождество $t_1 = t_2$ истинно на $\mathscr{K}$-алгебре $\mathscr{A}$, если L-условно термальные функции $t_{1\mathscr{A}}$ и

$t_{2\mathscr{A}}$ (при естественном добавлении, если нужно, фиктивных переменных) совпадают на алгебре $\mathscr{A}$. Под *L-условным многообразием* будем понимать любой класс $\mathscr{K}$ универсальных алгебр такой, что $\mathscr{K} = \{\mathscr{A} \mid \mathscr{A} \models \Im\}$ для некоторой совокупности L-условных тождеств над $\mathscr{K}$.

Будем говорить, что *фрагмент L согласован с категорией $\overline{\mathscr{K}}$*, если истинность L-формул на $\mathscr{K}$-алгебрах коммутирует с морфизмами из $\overline{\mathscr{K}}$. Очевидно, что в этом случае L-условно термальные функции над $\mathscr{K}$ определяют неявные $\overline{\mathscr{K}}$-операции. Категорию $\overline{\mathscr{K}}$ назовем *адекватной фрагменту L*, если любая неявная $\mathscr{K}$-операция определяется некоторой L-условно термальной функцией над $\mathscr{K}$ и фрагмент L согласован с категорией $\overline{\mathscr{K}}$.

Для любого класса алгебр $\mathscr{K}$ и любого кардинала α через $\mathscr{K}_\alpha$ будем обозначать класс $\{\mathscr{A} \in \mathscr{K} \mid |\mathscr{A}| < \alpha\}$, а для категории $\overline{\mathscr{K}}$ через $\overline{\mathscr{K}}_\alpha$ — полную подкатегорию категории $\overline{\mathscr{K}}$ с совокупностью объектов $\mathscr{K}_\alpha$.

Класс $\mathscr{K}$ конечных алгебр будем называть *L-условным псевдомногообразием*, если $\mathscr{K} = \mathscr{M}_{\aleph_0}$ для некоторого L-условного многообразия $\mathscr{M}$.

В дальнейшем будем рассматривать лишь конечные сигнатуры.

Теорема 1. *Пусть фрагмент L языка первого порядка согласован с некоторой категорией $\overline{\mathscr{K}}$ конечных универсальных алгебр. Если для некоторого класса $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{K}$ классы $(\mathscr{K}_0)_n$ (при $n \in \omega$) являются L-условными псевдомногообразиями, то $\mathscr{K}_0$ является $\overline{\mathscr{K}}$-промногообразием.*

Доказательство. Так как для любого $n \in \omega$ класс $(\mathscr{K}_0)_n$ является L-условным псевдомногообразием, то по теореме компактности найдется конечная совокупность $\Im_n$ L-условных тождеств такая, что $(\mathscr{K}_0)_n = \{\mathscr{A} \mid |\mathscr{A}| < \aleph_0, \mathscr{A} \models \Im_n\}$. При этом $\Im_m \models \Im_n$ для любых $m < n$. Пусть $\Im = \bigcup\limits_{n\in\omega} \Im_n$. Упорядочим $\Im$ по типу ω: $\Im = \left\{t_n^1 = t_n^2 \mid n \in \omega\right\}$, здесь t_j^i — L-условные термы. Таким образом, для любой конечной алгебры $\mathscr{A}$ условие $\mathscr{A} \in \mathscr{K}_0$ эквивалентно следующему: существует $m \in \omega$ такое, что $\mathscr{A} \models t_n^1 = t_n^2$ для любого $n \geq m$.

Пусть $\Im'$ — совокупность всех $\overline{\mathscr{K}}$-псевдотождеств, которым удовлетворяют все $\mathscr{K}_0$-алгебры. Покажем, что $\mathscr{K}_0 = \{\mathscr{A} \in \mathscr{K} \mid \mathscr{A} \models \Im'\}$. Включение $\mathscr{K}_0 \subseteq \{\mathscr{A} \in \mathscr{K} \mid \mathscr{A} \models \Im'\}$ очевидно, и пусть теперь $\mathscr{K}$-алгебра $\mathscr{A}$ не входит в $\mathscr{K}_0$. В силу замеченного выше найдется последовательность $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ такая, что для всех $m \in \omega$

$$\mathscr{A} \not\models t^1_{r_m}(x_1, \dots, x_{n_{r_m}}) = t^2_{r_m}(x_1, \dots, x_{x_{r_m}}).$$

Ввиду конечности сигнатуры класса $\mathscr{K}$ для любого $k \in \omega$ существует лишь конечное число типов изоморфизма $\mathscr{K}$-алгебр мощности, не превышающей k. Тем самым в последовательности r_m можно выделить подпоследовательность j_m ($m \in \omega$) такую, что для любого $k \in \omega$ и любой $\mathscr{K}_0$-алгебры $\mathscr{B}$ такой, что $|\mathscr{B}| \leq k$, на $\mathscr{B}$ истинны L-условные тождества

$$t^1_{jm}(x_1, \dots, x_{n_{j_m}}) = t^2_{jm}(x_1, \dots, x_{n_{j_m}})$$

при $m \geq k$.

Пусть $|\mathscr{A}| = n$. Так как

$$\mathscr{A} \not\models t^1_{j_m}(x_1, \dots, x_{n_{j_m}}) = t^2_{j_m}(x_1, \dots, x_{n_{j_m}}),$$

найдется некоторое логическое следствие L-условного тождества $t^1_{j_m} = t^2_{j_m}$ — L-условное тождество $h^1_{j_m}(x_1, \dots, x_n) = h^2_{j_m}(x_1, \dots, x_n)$ от n переменных такое, что

$$\mathscr{A} \not\models h^1_{j_m}(x_1, \dots, x_n) = h^2_{j_m}(x_1, \dots, x_n)$$

для любого $m \in \omega$. При этом для любого $k \in \omega$ и любой алгебры $\mathscr{B} \in \mathscr{K}_0$ такой, что $|\mathscr{B}| \le k$,

$$\mathscr{B} \models h^1_{j_m}(x_1, \dots, x_n) = h^2_{j_m}(x_1, \dots, x_n)$$

при $m \ge k$.

Два L-условных тождества $t_1 = t_2$ и $p_1 = p_2$ назовем *k-эквивалентными* ($k \in \omega$), если на любой $\mathscr{K}$-алгебре $\mathscr{B}$ мощности, не превышающей k, совпадают L-условно термальные функции, определяемые термами t_1 и p_1 и L-условными термами t_2 и p_2 соответственно. Тем самым для любого k и любой бесконечной совокупности L-условных тождеств от n переменных хотя бы один из классов k-эквивалентности на $\Im'$ бесконечен. На основе этого индукцией по $k \in \omega$ выбираем подпоследовательность $l_1 < l_2 < \dots < l_n < \dots$ последовательности $j_1 < j_2 < \dots < j_n < \dots$ такую, что для любого $k \in \omega$ L-условные тождества

$$h^1_{l_1} = h^2_{l_2}, \dots, h^1_{l_k} = h^2_{l_k}$$

k-эквивалентны. На $\mathscr{K}$-алгебрах определим неявные $\overline{\mathscr{K}}$-операции $g_1(x_1, \dots, x_n)$ и $g_2(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом: если $\mathscr{B} \in \mathscr{K}$ и $|\mathscr{B}| \le k$ для некоторого $k \in \omega$, то $g_{1_{\mathscr{B}}}(x_1, \dots, x_n)$ является L-условно термальной функцией на $\mathscr{B}$, определяемой L-условным над $\mathscr{K}$ термом $h^1_{l_k}$. Аналогично с помощью L-условного над $\mathscr{K}$ терма $h^2_{l_k}$ на $\mathscr{B}$ определяется функция $g_{2_{\mathscr{B}}}(x_1, \dots, x_n)$.

В силу выбора последовательности $l_1 < \dots < l_2 < \dots$ и согласованности фрагмента L с категорией $\overline{\mathscr{K}}$ операции g_1 и g_2 являются неявными $\overline{\mathscr{K}}$-операциями на $\mathscr{K}$, при этом на $\mathscr{K}$-алгебрах истинно $\overline{\mathscr{K}}$-псевдотождество

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = g_2(x_1, \dots, x_n),$$

так как если $\mathscr{B} \in \mathscr{K}$ и $|\mathscr{B}| \le k$, то

$$\mathscr{B} \models g_{1_{\mathscr{B}}}(x_1, \dots, x_n) = h^1_{l_k}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathscr{B} \models g_{2_{\mathscr{B}}}(x_1, \dots, x_n) = h^2_{l_k}(x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathscr{B} \models h^1_{l_k}(x_1, \dots, x_n) = h^2_{l_k}(x_1, \dots, x_n),$$

т. е. $\overline{\mathscr{K}}$-псевдотождество $g_1 = g_2$ входит в совокупность $\Im'$.

Поскольку $|\mathscr{A}| = n$ и

$$\mathscr{A} \not\models h^1_{l_n}(x_1, \dots, x_n) = h^2_{l_n}(x_1, \dots, x_n),$$

то

$$\mathscr{A} \not\models g_1(x_1, \dots, x_n) = g_2(x_1, \dots, x_n).$$

Полученное противоречие и доказывает равенство $\mathscr{K}_0 = \{\mathscr{A} \in \mathscr{K} \mid \mathscr{A} \models \Im'\}$. Теорема доказана.

Класс алгебр $\mathscr{K}$ назовем *$\mathscr{K}$-равномерно локально конечным*, если существует функция $l : \omega \to \omega$ такая, что для любой $\mathscr{A} \in \mathscr{K}$ и любых $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{A}$ найдется подалгебра $\mathscr{L}$ алгебры $\mathscr{A}$ такая, что $\mathscr{L} \in \mathscr{K}$, $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathscr{L}$ и $|\mathscr{L}| \le l(n)$. В случае, когда $\mathscr{K}$ замкнут относительно подалгебр, $\mathscr{K}$-равномерно локальная конечность равносильна традиционной равномерной локальной конечности класса $\mathscr{K}$. Будем говорить, что $\mathscr{K}$-алгебра $\mathscr{A}$ *$\mathscr{K}$-порождена множеством* $\{a_1, \dots, a_n\}$, если никакая собственная подалгебра алгебры $\mathscr{A}$, включающая в себя $\{a_1, \dots, a_n\}$, не является $\mathscr{K}$-алгеброй. Для любой $\mathscr{K}$-алгебры $\mathscr{A}$, $\mathscr{K}$-порожденной множеством $\{a_1, \dots, a_n\}$, под *$(L{-}\mathscr{A})$-диаграммой* $D^{\bar{a}}_{L\mathscr{A}}(x_1, \dots, x_n)$

кортежа $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ будем понимать конъюнкцию всех таких L-формул $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, что
$$\mathscr{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n).$$

Будем говорить, что *фрагмент* L $\overline{\mathscr{K}}$*-достаточен*, если для любой $\mathscr{K}$-алгебры $\mathscr{A}$, $\mathscr{K}$-порожденной множеством $\{a_1, \ldots, a_n\}$, любой $\mathscr{K}$-алгебры $\mathscr{B}$ и любых $b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$

$$\mathscr{B} \models D^{\bar{a}}_{L\mathscr{A}}(b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \text{ существует } \mathscr{K}\text{-морфизм } \varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$$

$$\text{такой, что } \varphi(a_i) = b_i \text{ для } i \leq n.$$

Теорема 2. *Если категория* $\mathscr{K}$ *является* $\mathscr{K}$*-равномерно локально конечной, фрагмент* L *согласован с категорией* $\overline{\mathscr{K}}$ *и* $\overline{\mathscr{K}}$*-достаточен, то категория* $\overline{\mathscr{K}}$ *адекватна фрагменту* L.

Доказательство. В силу согласованности L с $\overline{\mathscr{K}}$ L-условно термальные функции над $\mathscr{K}$ определяют неявные $\overline{\mathscr{K}}$-операции на $\overline{\mathscr{K}}$. Покажем обратное. Пусть $g(x_1, \ldots, x_n)$ — неявная $\overline{\mathscr{K}}$-операция. В силу $\mathscr{K}$-равномерной локальной конечности класса $\mathscr{K}$ и конечности сигнатуры существуют конечное число $\mathscr{K}$-алгебр $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$ $(s \in \omega)$ и кортежи их элементов $\bar{a}_j = \langle a^j_1, \ldots, a^j_n\rangle$ $(j \leq s)$ такие, что

1) алгебры $\mathscr{A}_j$ $\mathscr{K}$-порождены множеством $\{a^j_1, \ldots, a^j_n\}$ и

2) для любой $\mathscr{K}$-алгебры $\mathscr{A}$, порожденной множеством $\{a_1, \ldots, a_n\}$, существуют $j \leq s$ и изоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ на $\mathscr{A}_j$ такие, что $\varphi(a_1) = a^j_1, \ldots, \varphi(a_n) = a^j_n$.

Пусть $S = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s\}$. Определим на S отношение $\leq$ следующим образом: $\bar{a}_i \leq \bar{a}_j$, если существует $\overline{\mathscr{K}}$-морфизм ψ алгебры $\mathscr{A}_i$ в $\mathscr{A}_j$ такой, что

$$\psi(a^i_1) = a^j_1, \ldots, \psi(a^i_n) = a^j_n.$$

Пусть $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$, где $r \leq s$, — совокупность максимальных элементов частично упорядоченного множества $\langle S; \leq\rangle$. Так как $g_{\mathscr{A}_j}(a^j_1, \ldots, a^j_n) \in \langle a^j_1, \ldots, a^j_n\rangle_{\mathscr{A}_j}$, найдется терм $t_j(x_1, \ldots, x_n)$ такой, что

$$g_{\mathscr{A}_j}(a^j_1, \ldots, a^j_n) = t_j(a^j_1, \ldots, a^j_n).$$

Пусть $\phi_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j \leq r)$ — L-формула, входящая в $D^{\bar{a}_j}_{L\mathscr{A}_j}(x_1, \ldots, x_n)$, но такая, что для любого $i \neq j$

$$\mathscr{A}_i \not\models \phi_j(a^i_1, \ldots, a^i_n).$$

Тем самым $\mathscr{K} \models \forall x_1, \ldots, x_n\big(\phi_j(x_1, \ldots, x_n) \to D^{\bar{a}_j}_{L\mathscr{A}_j}(a_1, \ldots, a_n)\big)$.

Рассмотрим схему

$$t(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \phi_1(x_1, \ldots, x_n) \to t_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi_r(x_1, \ldots, x_n) \to t_r(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Покажем, что t является L-условным термом над $\mathscr{K}$ и L-условно термальные функции, соответствующие t на $\mathscr{K}$-алгебрах, определяют неявную $\overline{\mathscr{K}}$-операцию g.

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная $\mathscr{K}$-алгебра и $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$. В силу выбора алгебр $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_s$, согласованности фрагмента L с категорией $\overline{\mathscr{K}}$ и определения отношения $\leq$ на S найдется $j \leq r$ такое, что $\mathscr{A} \models \phi_j(a_1, \ldots, a_n)$. Тем самым

$$\mathscr{K} \models \forall x_1, \ldots, x_n \big(\bigvee_{j \leq r} \phi_j(a_1, \ldots, a_n) \big).$$

Пусть теперь $\mathscr{A} \in \mathscr{K}, a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$ и

$$\mathscr{A} \models \phi_i(a_1, \ldots, a_n) \ \& \ \phi_j(a_1, \ldots, a_n)$$

для $i, j \leq r$. Тогда

$$\mathscr{A} \models D^{\bar{a}_i}_{L\mathscr{A}_i}(a_1, \ldots, a_n) \ \& \ D^{\bar{a}_j}_{L\mathscr{A}_j}(a_1, \ldots, a_n).$$

В силу того, что L $\overline{\mathscr{K}}$-достаточен, существуют $\overline{\mathscr{K}}$-морфизмы φ_i и φ_j алгебр $\mathscr{A}_i$ и $\mathscr{A}_j$ соответственно в алгебру $\mathscr{A}$ такую, что

$$\varphi_i\big(a^i_1\big) = a_1, \quad \varphi_j\big(a^j_1\big) = a_1, \ldots, \varphi_i\big(a^i_n\big) = a_n, \quad \varphi_j\big(a^j_n\big) = a_n.$$

При этом

$$\mathscr{A}_i \models g_{\mathscr{A}_i}\big(a^i_1, \ldots, a^i_n\big) = t_i\big(a^i_1, \ldots, a^i_n\big),$$
$$\mathscr{A}_j \models g_{\mathscr{A}_j}\big(a^j_1, \ldots, a^j_n\big) = t_j\big(a^j_1, \ldots, a^j_n\big).$$

Так как g — неявная $\overline{\mathscr{K}}$-операция и термальные функции t_i, t_j коммутируют с $\overline{\mathscr{K}}$-морфизмами, то

$$\mathscr{A} \models g_{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t_i(a_1, \ldots, a_n) = t_j(a_1, \ldots, a_n).$$

Тем самым

$$\mathscr{K} \models \forall x_1, \ldots, x_n(\phi_i(x_1, \ldots, x_n) \ \& \ \phi_j(x_1, \ldots, x_n) \to t_i(x_1, \ldots, x_n) = t_j(x_1, \ldots, x_n))$$

и, значит, схема t определяет L-условный терм над $\mathscr{K}$. При этом

$$\mathscr{K} \models g(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n).$$

Теорема доказана.

Отметим, что для указанных выше примеров фрагментов L очевидным образом имеют место следующие свойства:

а) фрагмент, состоящий из экзистенционально позитивных формул согласован с любой категорией $\overline{\mathscr{K}}$;

б) фрагмент, состоящий из бескванторных формул, согласован с категориями $\overline{\mathscr{K}}$, морфизмами которых служат изоморфные вложения.

В случае $\mathscr{K}$-равномерной локальной конечности категории $\overline{\mathscr{K}}$ такой, что:

1) класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно подалгебр и $\overline{\mathscr{K}}$-морфизмы суть все гомоморфизмы $\mathscr{K}$-алгебр в $\mathscr{K}$-алгебры, фрагмент, состоящий из всех бескванторных позитивных формул, $\overline{\mathscr{K}}$-достаточен;

2) $\mathscr{K}$ замкнут относительно подалгебр и $\overline{\mathscr{K}}$-морфизмы суть изоморфные вложения $\mathscr{K}$-алгебр в $\mathscr{K}$-алгебры, фрагмент, состоящий из всех бескванторных формул, $\overline{\mathscr{K}}$-достаточен;

3) $\overline{\mathscr{K}}$-морфизмы суть все гомоморфизмы $\mathscr{K}$-алгебр в $\mathscr{K}$-алгебры, фрагмент, состоящий из экзистенционально-позитивных формул, $\overline{\mathscr{K}}$-достаточен.

Для указанных примеров категорий $\overline{\mathscr{K}}$ конечных алгебр и фрагментов L утверждение теорем 1 и 2 соответствует вариантам теоремы Райтермана [2] о псевдомногообразиях, теоремам из работ [4–6] о псевдоуниверсальных классах, о позитивно-условных и о $\exists^+$-условных псевдомногообразиях.

Две категории $\overline{\mathscr{K}}_1$ и $\overline{\mathscr{K}}_2$ универсальных алгебр называются *категорно эквивалентными*, если существует изоморфизм φ категории $\overline{\mathscr{K}}_2$ на категорию $\overline{\mathscr{K}}_2$, коммутирующий со стирающими функторами из категорий $\overline{\mathscr{K}}_1$, $\overline{\mathscr{K}}_2$ в категорию множеств и осуществляющий биекцию между совокупностями основных множеств подалгебр $\mathscr{K}_1$-алгебр на совокупность основных множеств подалгебр $\mathscr{K}_2$-алгебр.

Очевидно, что для любых двух категорно-эквивалентных категорий $\overline{\mathscr{K}}_1$ и $\overline{\mathscr{K}}_2$ универсальных алгебр совокупности неявных $\overline{\mathscr{K}}_1$-операций на $\mathscr{K}_1$-алгебрах и неявных $\overline{\mathscr{K}}_2$-операций на $\mathscr{K}_2$-алгебрах совпадают. В частности, сигнатурные операции $\mathscr{K}_1$-алгебр являются неявными $\overline{\mathscr{K}}_2$-операциями $\mathscr{K}_2$-алгебр, и наоборот.

Отметим также, что обратное неверно, т. е. существуют категории $\overline{\mathscr{K}}_1$ и $\overline{\mathscr{K}}_2$ универсальных алгебр такие, что основные множества $\mathscr{K}_1$- и $\overline{\mathscr{K}}_2$-алгебр одни и те же, неявные $\mathscr{K}_1$-операции на $\mathscr{K}_1$-алгебрах совпадают с неявными $\mathscr{K}_2$-операциями на $\mathscr{K}_2$-алгебрах, но категории $\overline{\mathscr{K}}_1$ и $\overline{\mathscr{K}}_2$ не являются категорно эквивалентными. Достаточно взять, к примеру, какое-либо многообразие $\mathscr{K}_1$ и в качестве $\overline{\mathscr{K}}_1$-морфизмов рассмотреть гомоморфизмы $\mathscr{K}_1$-алгебр в $\mathscr{K}_1$-алгебры. Пусть $\mathscr{K}_2 = \mathscr{K}_1$, а $\overline{\mathscr{K}}_2$-морфизмами помимо изоморфных вложений $\mathscr{K}_2$-алгебр в $\mathscr{K}_2$-алгебры будут лишь произвольные гомоморфизмы конечно порожденных $\mathscr{K}_2$-алгебр в $\mathscr{K}_2$-алгебры.

В силу теорем 1 и 2 имеют место следующие утверждения.

Следствие 1. *Если категории $\overline{\mathscr{K}}_1$ ($\overline{\mathscr{K}}_2$) являются $\overline{\mathscr{K}}_1$- ($\overline{\mathscr{K}}_2$)-равномерно локально конечными и основные множества $\mathscr{K}_1$- ($\mathscr{K}_2$)-алгебр суть одни и те же, фрагмент L_1 (L_2) языка первого порядка согласован с категорией $\overline{\mathscr{K}}_1$ ($\overline{\mathscr{K}}_2$) и $\overline{\mathscr{K}}_1$- ($\overline{\mathscr{K}}_2$)-достаточен, а сами категории $\overline{\mathscr{K}}_1$, $\overline{\mathscr{K}}_2$ категорно эквивалентны, то сигнатурные операции $\mathscr{K}_1$-алгебр являются L_2-условно термальными операциями $\mathscr{K}_2$-алгебр и, обратно, сигнатурные операции $\mathscr{K}_2$-алгебр являются L_1-условно термальными операциями $\mathscr{K}_1$-алгебр.*

Следствие 2. *Пусть для некоторой $\mathscr{K}$-равномерно локально конечной категории $\overline{\mathscr{K}}$ конечных универсальных алгебр фрагмент L языка первого порядка согласован с $\overline{\mathscr{K}}$ и $\overline{\mathscr{K}}$-достаточен. Тогда если для некоторого класса $\mathscr{K}_0 \subseteq \mathscr{K}$ классы $(\mathscr{K}_0)_n$ $(n \in \omega)$ являются L-условными псевдомногообразиями, то L-условным псевдомногообразием будет и класс $\mathscr{K}_0$.*

Различные примеры работ [5, 6] показывают, что требования конечности сигнатуры и $\overline{\mathscr{K}}$-равномерной локальной конечности категории $\overline{\mathscr{K}}$ в утверждениях теорем 1, 2 и следствий 1, 2 существенны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eilenberg S., Schutzenberger M. P.* On pseudovarieties // Adv. Math. 1976. V. 19, N 3. P. 413–418.
2. *J. Reiterman* The Birkhoff theorem for finite algebras // Algebra Univ. 1982. V. 14, N 1. P. 1–10.
3. *Higgins P. M.* An algebraic proof that pseudovarieties are defined by pseudoidentities // Algebra Univ. 1990. V. 27, N 4. P. 597–599.

4. *Пинус А. Г.* О неявных условных операциях на псевдоуниверсальных классах // Фундаментальная и прикладная математика. 2004. Т. 10, № 4. С. 174–182.
5. *Пинус А. Г.* Позитивно-условные псевдомногообразия и неявные операции на них // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 372–382.
6. *Пинус А. Г.* О $\exists^+$-условных многообразиях, $\exists^+$-условных псевдомногообразиях и неявных операциях на них // Алгебра и теория моделей. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. Т. 5. С. 138–161.
7. *Пинус А. Г.* Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах // Вычислительные системы. 1996. Т. 156. С. 59–78.
8. *Пинус А. Г.* Внутренние гомоморфизмы и позитивно-условные термы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 158–173.
9. *Пинус А. Г.* О функциях, коммутирующих с полугруппами преобразований алгебр // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1409–1418.
10. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
11. *Пинус А. Г.* Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 4. С. 35–72.

Статья поступила 27 июля 2007 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru