Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 517.983

О $\langle 2,1\rangle$–КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРАХ

В. Б. Коротков

Аннотация. Рассматривается класс $L_{2,1}$ линейных непрерывных операторов в L_2, являющихся суммами операторов умножения на ограниченные измеримые функции и операторов, отображающих единичный шар L_2 в множества, компактные в L_1. Доказывается, что функциональное уравнение с оператором из $L_{2,1}$ эквивалентно интегральному уравнению с ядром, удовлетворяющим условию Карлемана. Доказывается также, что если $T \in L_{2,1}$ и для любого унитарного оператора V в L_2 оператор VTV^{-1} принадлежит $L_{2,1}$, то $T = \alpha 1 + C$, где α — число, 1 — тождественный оператор в L_2, C — компактный оператор в L_2.

Ключевые слова: компактный оператор, $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор, оператор умножения, интегральный оператор, карлемановский интегральный оператор, интегральное уравнение.

Пусть (X,μ) — пространство с положительной конечной мерой, не имеющей атомов. Всюду в статье будем считать, что $L_2 = L_2(X,\mu)$ — сепарабельное пространство. Через $\|f\|$ обозначается L_2-норма элемента $f \in L_2$, через (f,g) — скалярное произведение элементов f, g из L_2. Под оператором в L_2 всюду далее будем понимать линейный непрерывный оператор, действующий из L_2 в L_2. Оператор L в L_2 называется *интегральным*, если существует определенная на $X \times X$ $(\mu\times\mu)$-измеримая $(\mu\times\mu)$-п. в. конечная функция $K(s,t)$ такая, что для всех $f \in L_2$

$$Lf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t)$$

для μ-п. в. $s \in X$; интеграл понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* L.

Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Карлемана

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п. в. } s \in X.$$

Интегральный оператор Γ называется *оператором Гильберта — Шмидта*, если его ядро $\Gamma(s,t)$ удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта

$$\int\limits_X \int\limits_X |\Gamma(s,t)|^2\, d\mu(t)\, d\mu(s) < \infty.$$

Определение 1. Оператор в L_2 называется *компактным*, если он отображает единичный шар L_2 в множество, компактное в L_2, и $\langle 2,1\rangle$-*компактным* [1, с. 94], если он отображает единичный шар L_2 в множество, компактное в $L_1 = L_1(X,\mu)$.

Так как $\mu X < \infty$, то каждый компактный оператор в L_2 является $\langle 2,1\rangle$-компактным. Обратное утверждение неверно: существуют $\langle 2,1\rangle$-компактные операторы в L_2, не являющиеся компактными.

Пример. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств с положительными мерами, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\mu E_n} < \infty$. Рассмотрим оператор τ в L_2, определяемый равенствами

$$\tau f = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu E_n}}, \quad f \in L_2,$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в L_2, χ_{E_n} — характеристическая функция множества E_n. Оператор τ некомпактный, ибо

$$\|\tau\varphi_n - \tau\varphi_m\| = \left\|\frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu E_n}} - \frac{\chi_{E_m}}{\sqrt{\mu E_m}}\right\| = \sqrt{2} \quad \text{при } n \neq m,\ n,m = 1,2,3,\dots.$$

Оператор τ $\langle 2,1\rangle$-компактный, так как

$$\sup_{\|f\|\le 1}\left\|\tau f - \sum_{n=1}^{m}(f,\varphi_n)\frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{\mu E_n}}\right\|_1 \le \sum_{n=m+1}^{\infty}\sqrt{\mu E_n} \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

здесь $\|\cdot\|_1$ — норма в L_1.

Оператор T в L_2 называется *почти компактным* [2], если для любого $\varepsilon > 0$ найдется множество e_ε такое, что $\mu e_\varepsilon < \varepsilon$ и оператор $P_{ce_\varepsilon}T$-компактен; здесь $P_{ce_\varepsilon}f = \chi_{ce_\varepsilon}f$, $f \in L_2$, $ce_\varepsilon = X \setminus e_\varepsilon$, χ_{ce_ε} — характеристическая функция множества ce_ε. Каждый почти компактный оператор $\langle 2,1\rangle$-компактен. Действительно, пусть T — почти компактный оператор в L_2. Тогда найдутся измеримые множества X_n, $n = 1,2,\dots$, такие, что $\mu X_n < 1/n$ и $T_n = P_{CX_n}T$ — компактные операторы. Так как для любого $n = 1,2,3,\dots$

$$\sup_{\|f\|\le 1}\|Tf - T_n f\|_1 \le \frac{1}{\sqrt{n}}\sup_{\|f\|\le 1}\|Tf\| \le \frac{1}{\sqrt{n}}\|T\|,$$

то T — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор. Важным примером почти компактного оператора является произвольный интегральный оператор в L_2 [2; 3, с. 66; 4].

Определение 2. Пусть $a(s)$ — определенная на X μ-измеримая μ-п. в. конечная функция. Число α называется *существенным значением функции* $a(s)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu\{s \mid s \in X,\ |\alpha - a(s)| < \varepsilon\} > 0.$$

Лемма 1. *Пусть A — оператор умножения на функцию $a \in L_\infty = L_\infty(X,\mu)$: $Af(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_2$, Q – $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор в L_2, α — существенное значение функции $a(s)$. Тогда найдется ортонормированная последовательность $\{f_n\} \subset L_2$ такая, что*

$$\|Q^* f_n\| < 1/n, \quad \|(A^* - \bar{\alpha}1)f_n\| < 1/n,\ n = 1,2,3,\dots,$$

здесь Q^* и A^* — операторы, сопряженные к операторам Q и A.

Доказательство. Пусть $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся измеримых множеств с положительными мерами такая, что $|\overline{a(s)} - \bar{\alpha}| < 1/n$ для всех $s \in e_n$, $n = 1,2,3,\dots$. Зафиксируем индекс n. Пусть

$\{g_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ — ограниченная в L_∞ ортонормированная последовательность функций, обращающихся в 0 вне e_n. Так как Q — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор, сопряженный оператор $Q^* : L_\infty \to L_2$ компактен. Тогда последовательность $\{Q^* g_{n,m}\}_{m=1}^{\infty}$ компактна в L_2, кроме того, она слабо сходится к 0. Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} \|Q^* g_{n,m}\| = 0$. Поэтому для любого $n = 1,2,3,\dots$ найдется номер m_n такой, что $\|Q^* g_{n,m_n}\| < 1/n$. Так как множества e_n попарно не пересекаются и для любого $n = 1,2,3,\dots$ функция $f_n = g_{n,m_n}$ равна 0 вне e_n, то $\{f_n\}$ — ортонормированная последовательность. При этом $\|(A^* - \bar{\alpha}1)f_n\| = \|(\overline{a(s)} - \bar{\alpha})f_n(s)\| < 1/n$. Лемма 1 доказана.

Если Q — интегральный оператор, то оператор $T = A + Q$ называется *интегральным оператором 3-го рода* [1, с. 5]. В случае, когда Q — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор, оператор $T = A + Q$ естественно назвать *$\langle 2,1\rangle$-компактным оператором 3-го рода.* Тогда функциональное уравнение

$$Tx(s) \equiv a(s)x(s) - \lambda Qx(s) = f(s) \tag{1}$$

будет обобщением интегрального уравнения 3-го рода.

Следствие. *Функциональное уравнение (1) с $\langle 2,1\rangle$-компактным оператором 3-го рода эквивалентно интегральному уравнению*

$$\alpha y(s) + \int\limits_X [K_1(s,t) - \lambda K_2(s,t)]y(t)\,d\mu(t) = g(s), \tag{2}$$

где α — существенное значение функции $a(s)$, $y = Ux$, $g = Uf$, U — унитарный оператор в L_2, не зависящий от x, f, λ, ядра K_1 и K_2 удовлетворяют условию Карлемана. В случае $\alpha = 0$ уравнение (2) умножением обеих его частей на функцию

$$\Lambda(s) = \left[\int\limits_X (|K_1(s,t)|^2 + |K_2(s,t)|^2)\,d\mu(t) + 1\right]^{-1/2}$$

сводится к интегральному уравнению 1-го рода с ядром

$$\Lambda(s)K_1(s,t) - \lambda\Lambda(s)K_2(s,t),$$

удовлетворяющим условию Гильберта — Шмидта.

Справедливость следствия вытекает из доказанной леммы 1 и теоремы 2 из [5].

Теорема. *Пусть T — оператор в L_2. Если для любого унитарного оператора V в L_2 оператор VTV^{-1} является суммой оператора умножения на функцию из L_∞ и $\langle 2,1\rangle$-компактного оператора в L_2, то $T = \alpha 1 + C$, где α — число, C — компактный оператор в L_2.*

Доказательство. Так как (X,μ) — пространство с положительной конечной сепарабельной мерой, не имеющей атомов, в силу теоремы 3 из [6, с. 170; 7, с. 154–155; 1, с. 13–14] можно считать без ограничения общности, что $L_2 = L_2(0,1)$.

Пусть $T = A + Q$, где $Af(s) = a(s)f(s)$, $f \in L_2$, $a \in L_\infty$, Q — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор, α — существенное значение функции $a(s)$. Рассмотрим ортонормированную систему $\{f_n\}$, построенную в доказательстве леммы 1. В доказательстве этой леммы было показано, что

$$\|(T^* - \bar{\alpha}1)f_n\| = \|(A^* - \bar{\alpha}1)f_n + Q^* f_n\| < 1/n + 1/n, \quad n = 1,2,3,\dots.$$

Положим $K = T - \alpha 1$. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|K^* f_n\|^2 < \infty$. Введем оператор Гильберта — Шмидта

$$\Gamma f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, f_n) K^* f_n, \quad f \in L_2.$$

Так как $K^* f_n - \Gamma f_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, то $\mathrm{im}(K - \Gamma^*) \equiv (K - \Gamma^*) L_2 \subseteq F^{\perp}$, где $F^{\perp}$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке последовательности $\{f_n\}$. Определим унитарный оператор W в L_2 равенствами

$$W f_n^{\perp} = r_n, \quad W f_n = u_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $\left\{f_n^{\perp}\right\}$ — ортонормированный базис в $F^{\perp}$, $\{r_n\}$ — ортонормированная последовательность функций Радемахера, $\{u_n\} = \{w_n\} \setminus \{r_n\}$, $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша в $L_2(0,1)$. Тогда

$$\mathrm{im}[W(K - \Gamma^*)W^{-1}] \subseteq W F^{\perp} = R, \tag{3}$$

где R — замкнутая линейная оболочка последовательности $\{r_n\}$. По условию теоремы $WTW^{-1} = A_1 + Q_1$, где $A_1 f(s) = a_1(s) f(s)$, $f \in L_2$, $a_1 \in L_\infty$, Q_1 — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор в L_2. Тогда $WKW^{-1} = A_1 + Q_1 - \alpha 1$. Так как

$$W(K^* - \Gamma)W^{-1} u_n = W(K^* - \Gamma) f_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

то

$$W\Gamma W^{-1} u_n = WK^* W^{-1} u_n = \overline{a_1(s)} u_n - \bar{\alpha} u_n + Q_1^* u_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Но $\|W\Gamma W^{-1} u_n\| \to 0$ при $n \to 0$, $\|Q_1^* u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, так как $Q_1^* : L_\infty \to L_2$ — компактный оператор, $\{u_n\}$ — ортонормированная последовательность и $|u_n(s)| = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, для п. в. $s \in [0,1]$. Следовательно, $\|(\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha}) u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что $a_1(s) = \alpha$ для п. в. $s \in [0,1]$. Предположим противное. Тогда найдутся $\beta > 0$ и $e \subset [0,1]$ такие, что $\mu e > 0$ и $|a_1(s) - \alpha| \geq \beta$ для всех $s \in e$. Имеем $\|(\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha}) u_n\| \geq \beta \sqrt{\mu e}$. Это противоречит тому, что $\|(\overline{a_1(s)} - \bar{\alpha}) u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $WKW^{-1} = A_1 - \alpha 1 + Q_1 = Q_1$. В силу (3) $\mathrm{im}(W(K - \Gamma^*)W^{-1}) \subseteq R$. Тогда $\mathrm{im}(Q_1 - W\Gamma^* W^{-1}) \subseteq R$.

Таким образом, оператор $Q_2 = Q_1 - W\Gamma^* W^{-1}$ $\langle 2,1\rangle$-компактен и принимает значения в R. Покажем, что Q_2 — компактный оператор. Пусть $\{\psi_n\}$ — произвольная слабо сходящаяся к 0 последовательность. Тогда $\{Q_2 \psi_n\}$ сходится к 0 по норме $L_1(0,1)$. Так как $Q_2 \psi_n \in R$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, по неравенству А. Я. Хинчина [8, с. 154] $\|Q_2 \psi_n\| \leq 8 \|Q_2 \psi_n\|_1$, где $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1(0,1)$. Отсюда $\|Q_2 \psi_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно, Q_2 — компактный оператор. Тогда Q_1 — компактный оператор. Но $WTW^{-1} = \alpha 1 + Q_1$, поэтому $T = \alpha 1 + C$, где $C = W^{-1} Q_1 W$ — компактный оператор.

Лемма 2. *Пусть $M_1 + B_1 = M_2 + B_2$, где $M_i f = m_i f$, $f \in L_2$, $m_i \in L_\infty$, $i = 1, 2$, B_i — $\langle 2,1\rangle$-компактный оператор в L_2, $i = 1, 2$. Тогда $M_1 = M_2$, $B_1 = B_2$.*

Доказательство. Покажем, что $M_1 = M_2$. Предположим противное. Тогда найдутся $\gamma > 0$ и $E \subset X$, $\mu E > 0$, такие, что $|m_1(s) - m_2(s)| \geq \gamma$ для всех $s \in E$. Пусть $\{r_{n,E}\}$ — ортонормированная последовательность обобщенных функций Радемахера с носителями в E [7, с. 11–12]. Мы имеем $|r_{n,E}(s)| = \frac{\chi_E(s)}{\sqrt{\mu E}}$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $s \in X$. Отсюда в силу $\langle 2,1\rangle$-компактности оператора $B_2 - B_1$ получим $\|(B_2 - B_1) r_{n,E}\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, но $\|(m_1 - m_2) r_{n,E}\|_1 \geq \gamma \sqrt{\mu E}$. Это противоречие показывает, что $m_1(s) = m_2(s)$ для п. в. $s \in X$. Следовательно, $M_1 = M_2$, и тогда $B_1 = B_2$.

Следствие 1. *Пусть B — оператор в L_2. Если для любого унитарного оператора V в L_2 оператор VBV^{-1} $\langle 2,1\rangle$-компактен, то B — компактный оператор.*

Доказательство. По доказанной теореме $B = \alpha 1 + C$, где C — компактный оператор. Так как $VBV^{-1} = \alpha 1 + VCV^{-1}$ и операторы VBV^{-1}, VCV^{-1} $\langle 2,1\rangle$-компактны, то по лемме 2 $\alpha = 0$, следовательно, $B = C$.

Следствие 2. *Пусть M — оператор в L_2. Если для любого унитарного оператора V в L_2 оператор VMV^{-1} является оператором умножения на функцию из L_∞, то $M = \alpha 1$.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Халмош П., Сандер В.* Ограниченные интегральные операторы в пространствах L^2. М.: Наука, 1985.
2. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.
3. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск, 1979. С. 64–68.
4. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
5. *Коротков В. Б.* О приведении семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 3. С. 149–151.
6. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
7. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
8. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958.

Статья поступила 10 января 2008 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090