Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1

УДК 512.66

KER–COKER–ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АДДИТИВНЫХ КАТЕГОРИЙ

Я. А. Копылов, В. И. Кузьминов

Аннотация. Изучен вопрос справедливости леммы о змее (существования и точности Ker-Coker-последовательности) в P-полуабелевой категории. Получено одно обобщение леммы о змее в квазиабелевой категории.

Ключевые слова: строгий морфизм, P-полуабелева категория, квазиабелева категория, Ker-Coker-последовательность.

Введение

В последнее время гомологическая алгебра в аддитивных категориях, не являющихся абелевыми, получила весьма активное развитие в связи с изучением гомологических аспектов функционального анализа, топологической алгебры и некоторых других вопросов. Были рассмотрены различные классы аддитивных категорий с ядрами и коядрами (см., например, [1–9]).

В работах [10, 11] изучалась Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma, \tag{I}$$

связанная с коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & B_1 \arrow[r, "\psi_1"] & C_1, & \end{tikzcd}$$

удовлетворяющей условиям $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$, в произвольной квазиабелевой категории. Было исследовано, как влияет предположение о свойствах одного из морфизмов α, β или γ на точность последовательности (I) и свойства образующих ее морфизмов.

В настоящей работе рассматриваются два обобщения ситуации работы [10].

В § 1 рассмотрен вопрос о Ker-Coker-последовательности в P-полуабелевой категории, т. е. категории, полуабелевой в смысле В. П. Паламодова (в [7, 10–13] такие категории назывались *предабелевыми*). Разница, возникающая со случаем квазиабелевой категории, состоит в том, что в P-полуабелевой категории

Работа выполнена при поддержке Специального целевого проекта GALA в рамках Программы NEST Комиссии Европейских сообществ (грант 028766), Государственной программы поддержки научных школ и молодых ученых (грант НШ–5682.2008.1) и гранта Президента РФ (грант МК–2137.2008.1).

для справедливости многих рассуждений из [10] приходится налагать на ядра (коядра) некоторых морфизмов в исходной диаграмме условие стабильности относительно универсальных (коуниверсальных) квадратов. Построение связывающего морфизма δ Ker-Coker-последовательности, например, возможно в случае, если $\operatorname{coker}\psi_0$ — стабильное коядро или $\ker\varphi_1$ — стабильное ядро в упомянутом смысле.

В § 2 рассматривается диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \\ {\scriptstyle\alpha}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\Big\downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1, \end{array} \tag{II}$$

в которой строки полуточны, в квазиабелевой категории. Ей соответствуют две полуточные «половинки» Ker-Coker-последовательности

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \tag{III}$$

и

$$\operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{IV}$$

В [14] Номура доказал, что в точной категории последовательность (III) точна в члене $\operatorname{Ker}\beta$, если φ_1 и канонический морфизм гомологий строк (II) $\chi : H(B_0) \to H(B_1)$ являются мономорфизмами, а последовательность (IV) точна в члене $\operatorname{Coker}\beta$, если ψ_0 и $\chi : H(B_0) \to H(B_1)$ — эпиморфизмы.

В настоящей работе показано, что эти факты верны в квазиабелевой категории, если потребовать, чтобы морфизм φ_1 был ядром, а морфизм φ_0 строгим (соответственно чтобы морфизм ψ_0 был коядром, а морфизм ψ_1 строгим).

§ 1. Ker-Coker-последовательность в P-полуабелевой категории

Мы будем рассматривать аддитивные категории, в которых выполнена следующая

Аксиома 1. *Каждый морфизм α имеет ядро $\operatorname{Ker}\alpha$ и коядро $\operatorname{Coker}\alpha$.*

В категории, в которой выполнена аксиома 1, для каждого морфизма α определено его каноническое разложение $\alpha = (\operatorname{im}\alpha)\bar{\alpha}(\operatorname{coim}\alpha)$, где

$$\operatorname{im}\alpha = \ker\operatorname{coker}\alpha, \quad \operatorname{coim}\alpha = \operatorname{coker}\ker\alpha.$$

Морфизм α называется *строгим*, если $\bar{\alpha}$ — изоморфизм.

Будем использовать следующие обозначения: O_c — класс всех строгих морфизмов, M — класс всех мономорфизмов, M_c — класс всех строгих мономорфизмов, P — класс всех эпиморфизмов, P_c — класс всех строгих эпиморфизмов. Будем писать $\alpha \,|\, \beta$, если $\alpha = \ker\beta$ и $\beta = \operatorname{coker}\alpha$.

Лемма 1 [1, 7, 15, 16]. *В аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме 1, выполнены следующие утверждения*:

1) $\ker\alpha \in M_c$, $\operatorname{coker}\alpha \in P_c$ *для любого морфизма* α;

2) $\alpha \in M_c \iff \alpha = \operatorname{im}\alpha$, $\alpha \in P_c \iff \alpha = \operatorname{coim}\alpha$;

3) *морфизм α строгий тогда и только тогда, когда он может быть представлен в виде $\alpha = \alpha_1\alpha_0$, где $\alpha_0 \in P_c$, $\alpha_1 \in M_c$; для любого такого представления $\alpha_0 = \operatorname{coim}\alpha$, $\alpha_1 = \operatorname{im}\alpha$;*

4) *если коммутативный квадрат*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \tag{1}$$

коуниверсален, то $f \in M \Longrightarrow g \in M$, $f \in M_c \Longrightarrow g \in M_c$, если он универсален, то $g \in P \Longrightarrow f \in P$, $g \in P_c \Longrightarrow f \in P_c$.

Аддитивная категория называется *Р-полуабелевой*, *полуабелевой* (*в смысле Паламодова*) [8, 9] или *предабелевой* [7], если в ней выполнены аксиома 1 и следующая

Аксиома 2. *Для любого морфизма α морфизм $\bar{\alpha}$ является мономорфизмом и эпиморфизмом.*

Лемма 2 [10]. *В произвольной Р-полуабелевой категории выполнены следующие утверждения:*

1) *$gf \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$, $gf \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$;*

2) *если $f, g \in M_c$ и fg определено, то $fg \in M_c$; если $f, g \in P_c$ и fg определено, то $fg \in P_c$;*

3) *если $fg \in O_c$, $f \in M$, то $g \in O_c$; если $fg \in O_c$, $g \in P$, то $f \in O_c$.*

Аддитивная категория, удовлетворяющая аксиоме 1, называется *квазиабелевой* [4] (*полуабелевой* в смысле Райкова [1] или *почти абелевой* [5]), если в ней выполнена следующая

Аксиома 3. *Если квадрат* (1) *коуниверсален, то $f \in P_c \Longrightarrow g \in P_c$. Если квадрат* (1) *универсален, то $g \in M_c \Longrightarrow f \in M_c$.*

Как известно [1, 4, 5, 16], всякая квазиабелева категория Р-полуабелева. Как недавно показано Румпом [17], существуют Р-полуабелевы категории, не являющиеся квазиабелевыми.

В [16, теорема 1] В. И. Кузьминов и А. Ю. Черевикин установили следующий факт.

Лемма 3. *Аддитивная категория $\mathscr{A}$ с ядрами и коядрами* Р-*полуабелева, тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

Р1) *если квадрат* (1) *коуниверсален, то $f \in P_c \Longrightarrow g \in P$;*

Р2) *если квадрат* (1) *универсален, то $g \in M_c \Longrightarrow f \in M$.*

Если для морфизма $f \in P_c$ в коуниверсальном квадрате (1) в аддитивной категории с ядрами и коядрами всегда $g \in P_c$ (для морфизма $g \in M_c$ в универсальном квадрате (1) всегда $f \in M_c$), то f называется *стабильным коядром* (g называется *стабильным ядром*).

Говорят, что последовательность $\ldots \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} \ldots$ в Р-полуабелевой категории *точна в члене* B, если $\operatorname{im} a = \ker b$ (или, что равносильно, $\operatorname{coker} a = \operatorname{coim} b$).

Для произвольного коммутативного квадрата (1) будем обозначать символом $\hat{g} : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta$ морфизм, заданный условием $g(\ker\alpha) = (\ker\beta)\hat{g}$, а символом $\hat{f} : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta$ — морфизм, заданный условием $\hat{f}(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)f$.

Лемма 4 [15]. *Для произвольного коуниверсального квадрата* (1) *в аддитивной категории, удовлетворяющей аксиоме* 1, *$\hat{g}$ — изоморфизм.*

Справедливо и двойственное утверждение.

Всюду в дальнейшем в этом параграфе категория $\mathscr{A}$, в которой мы рассматриваем диаграммы, предполагается Р-полуабелевой.

Пусть квадрат (1) коуниверсален, $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P$, $\beta_1 \in M_c$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha_1} & D \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ F & \xrightarrow{\beta_1} & B. \end{array} \tag{2}$$

В силу коуниверсальности этого квадрата существует такой морфизм $\alpha_0 : C \to E$, что $\alpha_1\alpha_0 = \alpha$ и $h\alpha_0 = \beta_0 g$.

Лемма 5. *Если $\beta \in O_c$, то $\alpha_0 \in P$. Если $f \in M_c$ и g — изоморфизм, то h — изоморфизм и $\alpha_0 \in P$.*

Доказательство. Квадрат

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\alpha_0} & E \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & {\scriptstyle h}\downarrow \\ A & \xrightarrow{\beta_0} & F \end{array}$$

коуниверсален [15]. В силу леммы 3 условие $\beta \in O_c$ (т. е. $\beta_0 \in P_c$) влечет, что $\alpha_0 \in P$. Пусть $f \in M_c$ и g — изоморфизм. По лемме 1 $h \in M_c$. Так как $\beta_0 g \in P$ и $\beta_0 g = h\alpha_0$, то $h \in P$. Следовательно, h — изоморфизм и $\alpha_0 = h^{-1}\beta_0 g$ — эпиморфизм. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть квадрат* (1) *коуниверсален. Тогда если $\beta \in O_c$, то $\hat f \in M$.*

Доказательство почти дословно совпадает с доказательством леммы 6 в [10].

Лемма 7. *Пусть квадрат*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\alpha} & D \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ A & \xrightarrow{\beta} & B \end{array} \tag{3}$$

коммутативен, $f \in M$ и морфизм $h : \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker} f$ определен условием $\operatorname{coker} f = h(\operatorname{coker}\beta)$. *Тогда*

1) *если $\beta \in O_c$, то $\hat f \in M$;*

2) *если $f \in M_c$ и $\operatorname{coker}\beta$ — стабильное коядро, то $\hat f = \ker h$.*

Доказательство. 1. Так как $f \in M$, квадрат (3) коуниверсален. Поэтому утверждение 1 следует из леммы 6.

2. Пусть $f \in M_c$. В силу леммы 5 можно предполагать, что $\beta \in M_c$.

Пусть $x : X \to \operatorname{Coker}\beta$ — морфизм такой, что $hu = 0$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{s} & X \\ {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle x}\downarrow \\ B & \xrightarrow{\operatorname{coker}\beta} & \operatorname{Coker}\beta. \end{array} \tag{4}$$

Так как $(\operatorname{coker} f)v = hxs = 0$ и $f = \ker\operatorname{coker} f$, найдется такой морфизм $w : Y \to D$, что $v = fw$. Так как квадрат (4) коуниверсален, то $v(\ker s) = \ker(\operatorname{coker}\beta) = \beta$. Поэтому

$$\hat{f}(\operatorname{coker}\alpha)w(\ker s) = (\operatorname{coker}\beta)fw(\ker s) = (\operatorname{coker}\beta)v(\ker s) = (\operatorname{coker}\beta)\beta = 0.$$

Поскольку $\operatorname{coker}\beta$ — стабильное коядро, $s \in P_c$ и, следовательно, $s = \operatorname{coker}(\ker s)$. Значит, существует морфизм $c : X \to \operatorname{Coker}\alpha$ такой, что $(\operatorname{coker}\alpha)w = cs$. Имеем

$$\hat{f}cs = \hat{f}(\operatorname{coker}\alpha)w = (\operatorname{coker}\beta)fw = (\operatorname{coker}\beta)v = xs.$$

Так как $s \in P$, получаем $x = \hat{f}c$. Этим условием c определяется однозначно в силу того, что $\hat{f} \in M$ (лемма 6). Таким образом, $\hat{f} = \ker h$.

Лемма доказана.

Пусть в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & & \end{array} \tag{5}$$

$\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi_1 = \ker\psi_1$. Как и в случае абелевой категории, диаграмме (5) соответствуют две полуточные части Ker-Coker-последовательности

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \tag{6}$$

и

$$\operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon = \widehat{\varphi}_0$, $\zeta = \widehat{\psi}_0$, $\tau = \widehat{\varphi}_1$, $\theta = \widehat{\psi}_1$.

Предположим теперь, что ψ_0 — стабильное коядро. Тогда определен связывающий морфизм $\delta : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, объединяющий (6) и (7) в Ker-Coker-последовательность

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{8}$$

Морфизм δ строится следующим образом. Пусть

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & \operatorname{Ker}\gamma \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\ker\gamma} \\ B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \end{array} \tag{9}$$

— коуниверсальный квадрат, а

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 \\ {\scriptstyle\operatorname{coker}\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ \operatorname{Coker}\alpha & \xrightarrow{t} & Y \end{array} \tag{10}$$

— универсальный квадрат. Так как $\psi_0\varphi_0 = 0$, существует единственный морфизм $w : A \to \operatorname{Ker}\psi_0$ такой, что $\varphi_0 = (\ker\psi_0)w$. Поскольку $\ker\psi_0 = \operatorname{im}\varphi_0$, то $w = \overline{\varphi}_0(\operatorname{coim}\varphi_0) \in P$. В силу $\psi_1\beta u = \gamma(\ker\gamma)s = 0$ и $\varphi_1 = \ker\psi_1$ существует единственный морфизм $m : X \to A_1$ такой, что $\varphi_1 m = \beta u$. Далее, по лемме 4 $\operatorname{Ker} s = \operatorname{Ker}\psi_0$, откуда имеем цепочку равенств

$$\varphi_1 m(\ker s)w = \beta u(\ker s)w = \beta(\ker\psi_0)w = \beta\varphi_0 = \varphi_1\alpha;$$

значит, $\alpha = m(\ker s)w$. Следовательно, $(\operatorname{coker}\alpha)m(\ker s)w = (\operatorname{coker}\alpha)\alpha = 0$, откуда $(\operatorname{coker}\alpha)m(\ker s) = 0$, ибо $w \in P$. Так как ψ_0 — стабильное коядро, то $s = \operatorname{coker}\ker s$. Поэтому найдется единственный морфизм $\delta : \operatorname{Ker}\gamma \to \operatorname{Coker}\alpha$, удовлетворяющий соотношению $(\operatorname{coker}\alpha)m = \delta s$. Для морфизма δ имеем $t\delta s = t(\operatorname{coker}\alpha)m = v\varphi_1 m = v\beta u$. Так как $t \in M$ (лемма 3), условие

$$t\delta s = v\beta u \tag{11}$$

определяет морфизм δ однозначно при выбранных квадратах (9) и (10) и позволяет доказать его естественность.

Двойственное рассуждение показывает, что в случае, когда φ_1 — стабильное ядро, тоже определен связывающий морфизм $\tilde\delta$, удовлетворяющий условию (11). Так как $t \in M$, $s \in P$, то в случае, когда одновременно ψ_0 — стабильное коядро и φ_1 — стабильное ядро, построенные двумя способами связывающие морфизмы δ и $\tilde\delta$ совпадают.

Пусть морфизм β из диаграммы (5) представлен в виде $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 : B_0 \to B$, $\beta_1 : B \to B_1$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{\varphi} & B \\
{\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta_1} \\
A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1.
\end{array}$$

Пусть $\psi = \operatorname{coker}\varphi$, $\psi : B \to C$. По лемме 1 $\varphi \in M_c$ и поэтому $\varphi = \ker\psi$. Найдутся морфизмы $\alpha_0 : A_0 \to A$, $\gamma_0 : C_0 \to C$, $\gamma_1 : C \to C_1$, для которых $\alpha_1\alpha_0 = \alpha$ и диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_0}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_0}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_0}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\psi} & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\beta_1}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma_1}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1 & &
\end{array} \tag{12}$$

коммутативна. Нетрудно убедиться, что $\gamma_1\gamma_0 = \gamma$.

Лемма 8. *Если* $\beta_0 \in P$, $\beta_1 \in M_c$, $\operatorname{coker}\alpha$ — *стабильное коядро, морфизм* $\widehat{\alpha}_1 : \operatorname{Coker}\alpha_0 \to \operatorname{Coker}\alpha$ *определен условием* $(\operatorname{coker}\alpha)\alpha_1 = \widehat{\alpha}_1(\operatorname{coker}\alpha_0)$, *а морфизм* $\tau : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta$ — *условием* $\tau(\operatorname{coker}\alpha) = (\operatorname{coker}\beta)\varphi_1$, *то* $\widehat{\alpha}_1 = \ker\tau$.

Доказательство. Условие стабильности $\operatorname{coker}\alpha$ делает законным применение леммы 7 к коммутативному квадрату

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Im}\alpha_0 & \xrightarrow{\operatorname{im}\alpha_0} & A \\
{\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_1} \\
\operatorname{Im}\alpha_0 & \xrightarrow{\alpha_1(\operatorname{im}\alpha_0)} & B_1,
\end{array}$$

что дает $\widehat{\alpha}_1 = \ker h$, где морфизм $h : \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\alpha_1$ определен условием $h(\operatorname{coker}\alpha) = \operatorname{coker}\alpha_1$. Далее следуем доказательству леммы 10 в [10]. Лемма доказана.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & A_0 \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & B_0 \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\beta_0"'] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_0"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\psi"] & C, & \end{tikzcd} \tag{13}$$

в которой $\psi_0 = \operatorname{coker}\varphi_0$, $\varphi = \ker\psi$.

Лемма 9. *Если для диаграммы* (13) *связывающий морфизм* $\bar{\bar{\delta}} : \operatorname{Ker}\gamma_0 \to \operatorname{Coker}\alpha_0$ *определен и* $\beta_0 \in P_c$, *то* $\bar{\bar{\delta}} \in P$.

Доказательство. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"'] & \operatorname{Ker}\gamma_0 \arrow[d, "\ker\gamma_0"'] \\ B_0 \arrow[r, "\psi_0"] & C_0 \end{tikzcd}$$

и универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\operatorname{coker}\alpha_0"'] & B \arrow[d, "v"'] \\ \operatorname{Coker}\alpha_0 \arrow[r, "t"] & Y. \end{tikzcd}$$

Так как $\psi\beta_0 u = \gamma_0(\ker\gamma_0)s = 0$, существует такой морфизм $h : X \to A$, что $\varphi h = \beta_0 u$. Рассуждая, как в доказательстве леммы 11 в [10], получаем, что квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h"'] & B_0 \arrow[d, "\beta_0"'] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd}$$

коуниверсален.

По лемме 3 $h \in P$, поэтому $(\operatorname{coker}\alpha_0)h \in P$. Так как $t\bar{\bar{\delta}}s = v\beta_0 u = v\varphi h = t(\operatorname{coker}\alpha_0)h$ и $t \in M$ по лемме 3, имеем $\bar{\bar{\delta}}s = (\operatorname{coker}\alpha_0)h \in P$, откуда $\bar{\bar{\delta}} \in P$. Лемма доказана.

Докажем следующую версию теоремы 1 из [10] для P-полуабелевых категорий.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если в диаграмме* (5) ψ_0 *и* $\operatorname{coker}\alpha$ — *стабильные коядра и* $\beta \in O_c$, *то последовательность* (8) *точна в члене* $\operatorname{Coker}\alpha$;

2) *если в* (5) φ_1 *и* $\ker\gamma$ — *стабильные ядра и* $\beta \in O_c$, *то последовательность* (8) *точна в члене* $\operatorname{Ker}\gamma$.

Доказательство. 1. Пусть $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P_c$, $\beta_1 \in M_c$. В диаграмме (12), соответствующей этому разложению β, по лемме 6 $\gamma_1 \in M$ и поэтому $\ker\gamma = \ker\gamma_0$. Так как ψ_0 — стабильное коядро, определен связывающий морфизм $\bar{\bar{\delta}}$

для диаграммы (13). В силу естественности связывающего морфизма $\delta = \widehat{\alpha}_1\bar{\delta}$. По лемме 9 $\bar{\delta} \in P$, а по лемме 8 $\widehat{\alpha}_1 = \ker\tau$. Следовательно, $\operatorname{im}\delta = \ker\tau$, т. е. последовательность (8) точна в члене $\operatorname{Coker}\alpha$.

Утверждение 2 получается из утверждения 1 по двойственности.

Теорема доказана.

Доказательство следующей леммы совпадает с первой частью доказательства теоремы 2 в [10].

Лемма 10. *Пусть в диаграмме* (5) $\varphi_0 = \ker\psi_0$ ($\psi_1 = \operatorname{coker}\psi_1$). *Тогда* $\varepsilon = \ker\zeta$ ($\theta = \operatorname{coker}\tau$).

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если в диаграмме* (5) $\varphi_0 \in O_c$, $\ker\alpha$ *— стабильное ядро, то последовательность* (6) *точна и* $\varepsilon \in O_c$*; если в* (5) $\alpha \in O_c$, *то последовательность* (6) *точна;*

2) *если в диаграмме* (5) $\psi_1 \in O_c$, $\operatorname{coker}\gamma$ *— стабильное коядро, то последовательность* (7) *точна и* $\theta \in O_c$*; если в* (5) $\gamma \in O_c$, *то последовательность* (7) *точна.*

Доказательство. Представим φ_0 в виде композиции $\varphi_0 = \varphi_0''\varphi_0'$, $\varphi_0' \in P$, $\varphi_0'' \in M_c$, $\varphi_0' : A_0 \to A_0'$, $\varphi_0'' : A_0' \to B_0$. Поскольку $\varphi_0'' = \ker\psi_0$, существует такой морфизм $\alpha' : A_0' \to A_1$, что $\varphi_1\alpha' = \beta\varphi_0''$. Тогда $\alpha'\varphi_0' = \alpha$. Так как $\varphi_0' \in P$, то квадрат

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha} & A_1 \\ {\scriptstyle\varphi_0'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ A_0' & \xrightarrow{\alpha'} & A_1 \end{array}$$

универсален. Морфизм φ_0' индуцирует морфизм $\widehat{\varphi}_0{}' : \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\alpha'$, а морфизм φ_0'' — морфизм $\widehat{\varphi}_0{}'' : \operatorname{Ker}\alpha' \to \operatorname{Ker}\beta$, причем $\varepsilon = \widehat{\varphi}_0{}''\widehat{\varphi}_0{}'$. По лемме 10 $\widehat{\varphi}_0{}'' = \ker\zeta$.

Пусть $\varphi_0 \in O_c$. Тогда $\varphi_0' \in P_c$. По утверждению, двойственному п. 2 леммы 7, заключаем, что $\widehat{\varphi}_0{}' \in P_c$. Следовательно, $\varepsilon \in O_c$ и $\operatorname{im}\varepsilon = \ker\zeta$.

Пусть теперь $\alpha \in O_c$. Утверждение, двойственное п. 1 леммы 7, дает соотношение $\widehat{\varphi}_0' \in P$. Снова имеем $\widehat{\varphi}_0{}'' = \ker\zeta$.

П. 1 доказан полностью, а п. 2 получается из него по двойственности. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если в диаграмме* (5) $\alpha \in O_c$ *и* $\ker\gamma$ *и* φ_1 *— стабильные ядра, то последовательность* (8) *точна в членах* $\operatorname{Ker}\beta$ *и* $\operatorname{Ker}\gamma$. *Если* $\gamma \in O_c$ *и* $\operatorname{coker}\alpha$ *и* ψ_0 *— стабильные коядра, то последовательность* (8) *точна в членах* $\operatorname{Coker}\beta$ *и* $\operatorname{Coker}\alpha$.

Доказательство. Представим морфизм β в виде $\beta = \beta_1\beta_0$, $\beta_0 \in P_c$, $\beta_1 \in M$, и рассмотрим соответствующую диаграмму (12). По лемме 1 $\alpha_1 \in M$, и по лемме 6 $\gamma_1 \in M$. Следовательно, $\ker\alpha = \ker\alpha_0$, $\ker\beta = \ker\beta_0$, $\ker\gamma = \ker\gamma_0$. Ker-Coker-последовательности, соответствующие диаграммам (5) и (13), связаны между собой следующей коммутативной диаграммой:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \operatorname{Ker}\alpha_0 & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \operatorname{Ker}\beta_0 & \xrightarrow{\bar{\zeta}} & \operatorname{Ker}\gamma_0 & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \operatorname{Coker}\alpha_0 & \to & 0 & \to & 0 \\ \Big\| & & \Big\| & & \Big\| & & {\scriptstyle\widehat{\alpha}_1}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \operatorname{Ker}\alpha & \xrightarrow{\varepsilon} & \operatorname{Ker}\beta & \xrightarrow{\zeta} & \operatorname{Ker}\gamma & \xrightarrow{\delta} & \operatorname{Coker}\alpha & \xrightarrow{\tau} & \operatorname{Coker}\beta & \xrightarrow{\theta} & \operatorname{Coker}\gamma. \end{array} \tag{14}$$

По лемме 7 строгость α влечет, что $\widehat{\alpha}_1 \in M$. Поэтому $\ker\bar{\bar{\delta}} = \ker\delta$. По п. 2 теоремы 1 верхняя строка диаграммы (14) точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma_0$. Поэтому нижняя строка точна в члене $\operatorname{Ker}\gamma$.

Точность в члене $\operatorname{Ker}\beta$ следует из теоремы 2.

Второе утверждение теоремы получается из первого по двойственности.

Теорема доказана.

§ 2. Одно обобщение Ker-Coker-последовательности в квазиабелевой категории

Всюду в этом параграфе мы работаем в квазиабелевой категории $\mathscr{A}$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1, \end{array} \tag{15}$$

где $\psi_0\varphi_0 = 0$ и $\psi_1\varphi_1 = 0$.

Как и выше, имеются две полуточные последовательности

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\zeta} \operatorname{Ker}\gamma \tag{16}$$

и

$$\operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\tau} \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\theta} \operatorname{Coker}\gamma. \tag{17}$$

Под (ко)гомологиями $H(B)$ последовательности $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ такой, что $\psi\varphi = 0$, понимается коядро естественного морфизма $r : \operatorname{Im}\varphi \to \operatorname{Ker}\psi$ или, что эквивалентно, ядро естественного морфизма $q : \operatorname{Coker}\varphi \to \operatorname{Coim}\psi$ (см. [12, 13]).

Для диаграммы (15) имеем коммутативную диаграмму из естественных морфизмов

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Im}\varphi_0 & \xrightarrow{r_0} & \operatorname{Ker}\psi_0 \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & {\scriptstyle t}\downarrow \\ A_1 = \operatorname{Im}\varphi_1 & \xrightarrow{r_1} & \operatorname{Ker}\psi_1\ . \end{array} \tag{18}$$

Здесь $t : \operatorname{Ker}\psi_0 \to \operatorname{Ker}\psi_1$ — морфизм ядер строк квадрата

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{\psi_0} & C_0 \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & C_1, \end{array}$$

$s : \operatorname{Im}\varphi_0 \to \operatorname{Im}\varphi_1$ — морфизм ядер строк квадрата

$$\begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{\operatorname{coker}\varphi_0} & \operatorname{Coker}\varphi_0 \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & {\scriptstyle\hat{\beta}}\downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\operatorname{coker}\varphi_1} & \operatorname{Coker}\varphi_1, \end{array}$$

где $\hat{\beta}$ — морфизм коядер строк квадрата

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\downarrow \\ A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1, \end{array}$$

и морфизмы r_0 и r_1 возникают из полуточности строк в (15). Тем самым определен естественный морфизм гомологий $\chi : H(B_0) \to H(B_1)$ — морфизм коядер строк квадрата (18).

Мы докажем следующее утверждение, являющееся квазиабелевой версией следствия B2 из статьи Номуры [14].

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если в диаграмме* (15) $\varphi_0 \in O_c$, $\varphi_1 \in M_c$ *и морфизм* $\chi : H(B_0) \to H(B_1)$ *является мономорфизмом, то последовательность* (16) *точна*;

2) *если в* (15) $\psi_1 \in O_c$, $\psi_0 \in P_c$ *и* χ — *эпиморфизм, то последовательность* (17) *точна*.

Доказательство. 1. Пусть морфизм $x : X \to \operatorname{Ker}\beta$ таков, что $\zeta x = 0$. Покажем, что $x = (\operatorname{im}\varepsilon)\tilde{x}$ для некоторого единственного $\tilde{x}$.

Без ограничения общности можем считать, что $x = \operatorname{im} x \in M_c$.

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Im}\varphi_0 & \xrightarrow{r_0} & \operatorname{Ker}\psi_0 & \xrightarrow{\operatorname{coker} r_0} & H(B_0) = \operatorname{Coker} r_0 \\ {\scriptstyle s}\downarrow & & {\scriptstyle t}\downarrow & & {\scriptstyle\chi}\downarrow \\ A_1 = \operatorname{Im}\varphi_1 & \xrightarrow{r_1} & \operatorname{Ker}\psi_1 & \xrightarrow{\operatorname{coker} r_1} & H(B_1) = \operatorname{Coker} r_1. \end{array}$$

Так как $0 = (\ker\gamma)\zeta x = \psi_0(\ker\beta)x$, существует морфизм $z : X \to \operatorname{Ker}\psi_0$ такой, что $(\ker\beta)x = (\ker\psi_0)z$. Далее, $(\ker\psi_1)tz = \beta(\ker\psi_0)z = \beta(\ker\beta)x = 0$ и $\ker\psi_1 \in M_c$, поэтому $tz = 0$. Поскольку $\chi(\operatorname{coker} r_0)z = (\operatorname{coker} r_1)tz = 0$ и $\chi \in M$, то $(\operatorname{coker} r_0)z = 0$. В силу $r_0 \in M_c$ будет $r_0 = \ker\operatorname{coker} r_0$, поэтому найдется морфизм $\sigma : X \to \operatorname{Im}\varphi_0$ такой, что $z = r_0\sigma$.

Имеем $r_1 s\sigma = tr_0\sigma = tz = 0$. Так как $r_1 \in M_c$, получаем $s\sigma = 0$.

Представим φ_0 в виде $\varphi_0 = (\operatorname{im}\varphi_0)\varphi_0'$. Тогда $\varphi_0' \in P_c$. Рассмотрим коуниверсальный квадрат

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{y_2} & X \\ {\scriptstyle y_1}\downarrow & & {\scriptstyle\sigma}\downarrow \\ A_0 & \xrightarrow{\varphi_0'} & \operatorname{Im}\varphi_0. \end{array}$$

Заметим, что $s = \beta(\operatorname{im}\varphi_0)$. Имеем

$$\varphi_1\alpha y_1 = \beta\varphi_0 y_1 = \beta(\operatorname{im}\varphi_0)\varphi_0' y_1 = \beta(\operatorname{im}\varphi_0)\sigma y_2 = 0.$$

Так как $\varphi_1 \in M$, отсюда следует, что $\alpha y_1 = 0$. Значит, существует морфизм $y : Y \to \operatorname{Ker}\alpha$ со свойством $y_1 = (\ker\alpha)y$. Тогда

$$\begin{aligned} (\ker\beta)xy_2 &= (\ker\psi_0)zy_2 = (\ker\psi_0)r_0\sigma y_2 \\ &= (\operatorname{im}\varphi_0)\sigma y_2 = (\operatorname{im}\varphi_0)\varphi_0' y_1 = \varphi_0 y_1 = \varphi_0(\ker\alpha)y = (\ker\beta)\varepsilon y. \end{aligned}$$

Поскольку $\ker\beta \in M_c$, это дает

$$xy_2 = \varepsilon y. \tag{19}$$

Пусть $\varepsilon = (\operatorname{im}\varepsilon)\varepsilon'$. В формуле (19) $x \in M_c$, $y_2 \in P_c$, поэтому $x = \operatorname{im}(xy_2) = (\operatorname{im}\varepsilon)(\operatorname{im}(\varepsilon' y))$. Можем взять $\tilde{x} = \operatorname{im}(\varepsilon' y)$. Условие $x = (\operatorname{im}\varepsilon)\tilde{x}$ определяет $\tilde{x}$ однозначно, так как $\operatorname{im}\varepsilon$ — мономорфизм.

Утверждение 1 теоремы доказано. Утверждение 2 получается по двойственности.

Теорема доказана.

Я. А. Копылов выражает благодарность за гостеприимство и превосходные условия для работы Институту математики Макса Планка в Бонне, где была получена часть результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Райков Д. А.* Полуабелевы категории // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1006–1009.
2. *Jurchescu M.* Categorii // Deleanu A., Jurchescu M., Andreian-Cazacu C. Topologie, categorie, suprafeţe riemanniene. Ed. Academiei, Bucureşti. 1966. P. 73–241.
3. *Succi Cruciani R.* Sulle categorie quasi abeliane // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1973. V. 18, N 1. P. 105–119.
4. *Schneiders J. P.* Quasi-abelian categories and sheaves // Mem. Soc. Fr., Nouv, Sèr. 1999. V. 76.
5. *Rump W.* Almost abelian categories // Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. 2001. V. 42, N 3. P. 163–225.
6. *Rump W.* $*$-Modules, tilting, and almost abelian categories // Comm. Algebra. 2001. V. 29, N 8. P. 3293–3325. Erratum (Misprints generated via electronic editing) // Comm. Algebra. 2002. V. 30. P. 3567–3568.
7. *Bănică C., Popescu N.* Sur les catégories preábéliennes // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1965. V. 10, N 5. P. 621–635.
8. *Паламодов В. П.* Гомологические методы в теории локально выпуклых пространств // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 3–65.
9. *Паламодов В. П.* На многообразии Штейна комплекс Дольбо расщепляется в положительных размерностях // Мат. сб. 1972. Т. 188, № 2. С. 287–315.
10. *Копылов Я. А., Кузьминов В. И.* О Ker-Coker-последовательности в полуабелевой категории // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 615–624.
11. *Глотко Н. В., Кузьминов В. И.* О когомологической последовательности в полуабелевой категории // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 1. С. 41–50.
12. Копылов Я. А., Кузьминов В. И. О точности когомологической последовательности для короткой точной последовательности комплексов в полуабелевой категории // Тр. конф. «Геометрия и приложения». Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 2001. С. 76–83.
13. *Kopylov Ya. A., Kuz′minov V. I.* Exactness of the cohomology sequence corresponding to a short exact sequence of complexes in a semiabelian category // Siberian Adv. Math. 2003. V. 13, N 3. P. 72–80.
14. *Nomura Y.* An exact sequence generalizing a theorem of Lambek // Arch. Math. 1971. V. 22. P. 467–478.
15. *Букур И., Деляну А.* Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972.
16. *Кузьминов В. И., Черевикин А. Ю.* О полуабелевых категориях // Сиб. мат. журн. 1972. Т. 13, № 6. С. 1284–1294.
17. *Rump W.* A counterexample to Raĭkov's conjecture // Bull. London Math. Soc. 2008. V. 40, N 6. P. 985–994.

Статья поступила 11 марта 2008 г.

Копылов Ярослав Анатольевич, Кузьминов Владимир Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`yakop@math.nsc.ru`, `kuzminov@math.nsc.ru`