Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.55

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕСТОВОГО РАНГА СВОБОДНОЙ РАЗРЕШИМОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Е. И. Тимошенко, М. А. Шевелин

Аннотация. Вычислен тестовый ранг свободной разрешимой алгебры Ли конечного ранга.

Ключевые слова: алгебра Ли разрешимая, тестовый ранг.

§ 1. Введение

Элемент g алгебры (группы) G называется *тестовым*, если любой эндоморфизм φ алгебры (группы) G, оставляющий элемент g на месте, является автоморфизмом, т. е. из условия $\varphi(g) = g$ следует, что φ — автоморфизм.

Естественным обобщением понятия тестового элемента является понятие тестового набора.

Пусть G является n-порожденной алгеброй (группой). Набор элементов $\{g_1, \dots, g_m\}$, $m \leq n$, называется *тестовым*, если для всякого эндоморфизма φ алгебры (группы) G из условий $\varphi(g_i) = g_i$ при $i = 1, \dots, m$ вытекает, что φ — автоморфизм.

Тестовым рангом алгебры (*группы*) G называется минимум длин тестовых наборов.

В большинстве работ по исследованию тестовых элементов и тестовых рангов рассматриваются группы. Параллельно изучаются тестовые ранги для алгебр Ли.

Вопрос о существовании группы ранга $r \geq 3$, тестовый ранг которой равен двум, сформулирован Файном на сайте программы Магнус (http://www.grouptheory.org; Magnus program web site; Open Problems, FP15). Отвечая на этот вопрос, первый автор данной статьи в [1] вычислил тестовый ранг свободной метабелевой группы ранга r. Оказалось, что тестовый ранг этой группы равен $r - 1$ при $r \geq 2$. В [2, 3] независимо друг от друга авторы вычислили тестовый ранг свободной метабелевой алгебры Ли. Оказалось, что он так же, как для групп, на единицу меньше ранга алгебры.

В работе [4] изучались тестовые элементы в цветных метабелевых супералгебрах Ли ранга два.

В [5] найдены допустимые значения для тестовых рангов некоторых свободных полинильпотентных групп. Доказано, что тестовый ранг свободной группы произведения многообразий $AN_{c_1} \dots N_{c_l}$ абелевых групп A и нильпотентных групп N_{c_i} либо равен рангу группы, либо на единицу меньше его. Аналог этого результата для алгебр Ли получен в [6].

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05.01.00292).

Внимание к тестовым рангам свободных разрешимых групп объясняется отчасти вопросом Файна и Шпильрайна, сформулированным в Коуровской тетради [7, вопрос 14.88], а также на упомянутом выше сайте проблем Магнуса. Авторы вопроса спрашивают, существуют ли тестовые элементы в свободной разрешимой группе $F_2(A^l)$ ранга два при $l \geq 3$. Первому автору статьи удалось решить проблему 14.88. Более того, в работе [8] им доказано, что тестовый ранг группы $F_r(AN_{c_1} \dots N_{c_l})$ при любом $r \geq 2$ и любом наборе классов $(c_1, \dots, c_l)$ равен $r - 1$.

Целью данной заметки является определение тестового ранга свободной разрешимой алгебры Ли, точнее, доказана следующая теорема, обобщающая результаты из [2, 3] о тестовом ранге свободной метабелевой алгебры Ли.

Теорема. *Тестовый ранг свободной разрешимой алгебры Ли G ранга $r \geq 2$ равен $r - 1$.*

§ 2. Подготовительные результаты

Умножение в алгебре Ли G над полем k обозначаем как коммутатор, i-й член нижнего центрального ряда обозначаем через G^i, i-й коммутант — через $G^{(i)}$. Введем сокращение для длинных коммутаторов: $[a, b; 0] = a$, $[a, b; m] = [[a, b; m - 1], b]$ при $m > 0$.

Пусть G — свободная разрешимая ступени $n > 1$ алгебра Ли над полем k с множеством свободных порождающих $\{x_1, \dots, x_r\}$, $A = G^{(n-1)}$. Универсальную обертывающую алгебру для G/A обозначаем через R. Из результатов работы [9] следует, что существует базис $\{l_\lambda \mid \lambda = 1, 2 \dots\}$ алгебры G/A, согласованный с нижним центральным рядом алгебры G/A, т. е. натуральный ряд может быть разбит на такие непересекающиеся отрезки I_j, что множество $\{l_\lambda \mid \lambda \in I_j\}$ есть базис $(G/A)^j$ по модулю $(G/A)^{j+1}$. По теореме Пуанкаре — Биркгофа — Витта множество B, состоящее из произведений

$$l_{\lambda_1} \dots l_{\lambda_p} \quad (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p),$$

является k-базисом алгебры R. Рассмотрим функцию d, определенную на B правилом $d(l_\mu) = n$, если $l_\mu \in (G/A)^n \setminus (G/A)^{n+1}$. При помощи этой функции можно определить d-степень одночлена $l_{\lambda_1} \dots l_{\lambda_p}$ формулой $d(l_{\lambda_1} \dots l_{\lambda_p}) = d(\lambda_1) + \dots + d(\lambda_p)$. Одночлены из B упорядочиваем следующим образом. Одночлены с меньшим значением d считаем меньшими. Для двух одночленов $m_1 = l_{\lambda_1} \dots l_{\lambda_p}$ и $m_2 = l_{\mu_1} \dots l_{\mu_q}$ из B с одинаковым значением d и $p < q$ считаем, что $m_1 > m_2$ (более «короткие» одночлены больше). Одночлены из B с одинаковыми значениями d и $p = q$ сравниваем словарно слева направо. Это правило определяет полный порядок на B.

Если $\lambda > \mu$, то

$$l_\lambda l_\mu = l_\mu l_\lambda + [l_\lambda, l_\mu].$$

При этом по определению d значения функции d на элементах l_κ, возникающих при разложении $[l_\lambda, l_\mu]$, равны $d(l_\mu l_\lambda)$. Поэтому для таких κ имеем $l_\mu l_\lambda < l_\kappa$. Применяя стандартный процесс, позволяющий устранять «инверсии» в произведениях букв l_λ за счет добавления строго больших таких произведений, получаем, что порядок, введенный на B, имеет следующее свойство. Для двух одночленов m_1, m_2 из B

$$m_1 m_2 = m_3 + \text{линейная комбинация строго больших одночленов из } B.$$

Здесь через m_3 обозначен одночлен из B, составленный из тех же букв l_μ, что m_1 и m_2 (с учетом кратностей), записанных в порядке неубывания.

Определяем функцию $\omega(u)$ на $R \setminus \{0\}$ как наименьшее значение, принимаемое функцией d на одночленах из B, входящих в запись u с ненулевыми коэффициентами. Докажем, что

$$\omega(uv) = \omega(u) + \omega(v). \tag{1}$$

Чтобы сделать это, рассмотрим одночлен $m_1 = l_{\lambda_1} \dots l_{\lambda_p}$ $(\lambda_1 \le \dots \le \lambda_p)$ — младший среди одночленов наименьшей d-степени, входящих в запись u по базису B с ненулевыми коэффициентами, и аналогичный одночлен $m_2 = l_{\mu_1} \dots l_{\mu_q}$ $(\mu_1 \le \dots \le \mu_q)$, построенный по v. Элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_q$ расположим в виде неубывающей последовательности $\nu_1, \dots, \nu_{p+q}$. Тогда младший среди одночленов наименьшей d-степени, действительно входящих в разложение элемента uv по базису B, есть $m_3 = l_{\nu_1} \dots l_{\nu_{p+q}}$. По построению одночлен m_3 не имеет подобных слагаемых среди одночленов, возникающих при разложении uv по базису B. По определению функции ω имеем $\omega(uv) = \omega(m_3) = \omega(m_1) + \omega(m_2) = \omega(u) + \omega(v)$, что и требовалось.

Очевидно, что для функции ω справедливо также свойство

$$\omega(f - g) \ge \min(\omega(f), \omega(g)).$$

Векторное k-пространство A обычным способом наделяется структурой правого модуля над универсальной обертывающей алгеброй $U(G/A)$, например, для $a \in A$

$$a(x_1 + A)(x_2 + A) = [[a, x_1], x_2].$$

Пусть F — свободная алгебра Ли над k с порождающим множеством $X_1, \dots, X_r$, T — свободная ассоциативная алгебра с множеством свободных порождающих $X_1, \dots X_r$ над тем же полем, рассмотренная как универсальная обертывающая алгебры F. Каждый элемент $f \in F$ допускает единственную запись в виде

$$f = X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_r f_r \quad (f_1, \dots, f_r \in T).$$

Элементы $f_1, \dots, f_r$ называются *производными Фокса* элемента f и обозначаются через $f_i = D_i f$. Представим G в виде $G = F/N'$ для некоторого идеала N алгебры F. Если взять $g \in G$, то мы называем *производными Фокса* образы соответствующих элементов в ассоциативной алгебре $U(F/N) = U(G/A)$, где $A = N/N'$. Функции $D_i : G \to U(G/A)$ k-линейны и обладают следующими свойствами.

1. $D_i(gh) = D_i(g)h'$.

2. $D_i([g, h]) = D_i(g)h' - D_i(h)g'$.

В этих двух равенствах $g' = g + A$, $h' = h + A$, $g, h \in G$.

3. Если $b_1, \dots, b_r$ — набор элементов алгебры G, $\varphi : G \to G$ — эндоморфизм, определенный правилом $x_i\varphi = b_i$ $(1 \le i \le r)$, $g \in G$, то

$$D_i(g\varphi) = \sum_k (D_k(g)\varphi_1) D_i(b_k),$$

где через φ_1 обозначен единственный эндоморфизм ассоциативной алгебры $U(G/A)$, удовлетворяющий условиям $(x_i + AU(G))\varphi_1 = b_i + AU(G)$ $(1 \le i \le r)$.

4. $\omega(D_i(u)) \ge 1$ при $u \in G'$.

Напомним свойства вложения Магнуса для свободной разрешимой алгебры Ли (см. [10]). Обозначим через M свободный правый R-модуль с базисом $e_1, \dots, e_r$ и через $\bar{x}_i$ — смежный класс $x_i + AU(G)$. Рассмотрим отображение μ подмножества $\{x_1, \dots, x_r\}$ алгебры G в алгебру Ли D матриц вида

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix},$$

заданное для $i = 1, \dots, r$ правилом $x_i \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x}_i & 0 \\ e_i & 0 \end{pmatrix}$. Подалгебра Ли G_1 алгебры D, порожденная образами $\mu(x_i)$ $(i = 1, \dots, r)$, разрешима ступени n, и μ продолжается до изоморфизма $\mu : G \longrightarrow G_1$. При этом $\mu(A) \subseteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{pmatrix}$, в частности, R-модуль A без кручения. Элемент $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum e_i r_i & 0 \end{pmatrix} \in D$ принадлежит $\operatorname{im} \mu$ тогда и только тогда, когда $\sum \bar{x}_i r_i = 0$.

Ассоциативная алгебра R может быть индуктивно представлена как объединение алгебр косых многочленов над областями Оре, поэтому она сама является областью Оре и, следовательно, имеет классическое тело частных $Q(R)$. Поэтому тензорное произведение $A \otimes_R Q(R)$ есть векторное пространство над телом $Q(R)$ и $\dim A \otimes_R Q(R) = r - 1$. Рассмотрим ненулевые элементы $h_2, \dots, h_r \in A$ такие, что h_i принадлежит подалгебре в G, порожденной элементами x_1 и x_i. При этом

$$\mu(h_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e_1 D_1(h_i) - e_i D_i(h_i) & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mu(h_i)$ $(2 \le i \le r)$, очевидно, линейно независимы над $Q(R)$ и, следовательно, образуют базис в пространстве $A \otimes_R Q(R)$.

Отсюда следует, что $A \otimes_R Q(R)$ порождается как модуль над $Q(R)$ любым таким набором $h_2, \dots, h_r$ ненулевых элементов из A, что h_i есть длинный коммутатор, содержащий в своей записи только буквы x_1 и x_i.

Лемма 1. *Пусть m — целое положительное число, y_1, y_2, g — ненулевые элементы алгебры G. Предположим, что*

1) $y_1 \in G'$ *или* $y_2 \in G'$,

2) $g \in G^{(n-1)}$ *принадлежит подалгебре, порожденной элементами* x_1, x_2.

Если эндоморфизм φ алгебры G задан правилом $x_i \varphi = y_i$ $(1 \le i \le r)$, то $[[g, x_1; m], x_2; m]\varphi \ne [[g, x_1; m], x_2; m]$.

Доказательство. Для элемента $f \in U(G/A)$ через $f[y]$ обозначим образ элемента f относительно эндоморфизма φ_1, индуцированного эндоморфизмом φ на алгебре $U(G/A)$.

Вычислим первую производную Фокса от элемента $g\varphi$:

$$D_1(g\varphi) = (D_1(g))[y] D_1(y_1) + (D_2(g))[y] D_1(y_2).$$

Поскольку $0 = D_1(g)x_1 + D_2(g)x_2 \in U(G/A)$, то $\omega(D_1(g)) = \omega(D_2(g))$.

Предположим, что $[[g, x_1; m], x_2; m] = [[g, x_1; m], x_2; m]\varphi$, и найдем первую производную Фокса от обеих частей этого равенства:

$$D_1(g) x_1^m x_2^m = ((D_1(g))[y] D_1(y_1) + (D_2(g))[y] D_1(y_2)) y_1^m y_2^m. \tag{2}$$

Очевидно,

$$\omega(D_1(g)) \le \omega((D_1(g))[y]) \le \omega((D_1(g))[y]) D_1(y_1),$$

$$\omega(D_1(g)) \leq \omega((D_2(g))[y]) \leq \omega((D_2(g))[y])D_1(y_2).$$

По условию какой-то из элементов y_1, y_2 принадлежит коммутанту. Поэтому значение ω на правой части равенства (2) как минимум на 1 превосходит значение той же функции на левой части; противоречие.

Лемма 2. *Обозначим $R = U(G/A)$. Пусть $a, b \in R$ — два ненулевых элемента, l — линейная комбинация порождающих $x_1, \dots, x_r$. Одно из следующих двух утверждений является истинным:*

1) $ax_1 \neq b(l+u)$ для всех $u \in (G/A)' \setminus \{0\}$;

2) $ax_1^2 \neq b(l+u)^2$ для всех $u \in (G/A)' \setminus \{0\}$.

Доказательство. Допустим, что оба утверждения ложны. Это означает, что найдутся два таких ненулевых элемента u_1, u_2, лежащих в коммутанте, и две такие линейные комбинации l_1, l_2 порождающих, что $ax_1 = b(l_1+u_1)$ и $ax_1^2 = b(l_2+u_2)^2$. Отсюда $ax_1^2 = b(l_1+u_1)x_1 = b(l_2+u_2)^2$. Сократив на b, получим равенство $(l_1+u_1)x_1 = (l_2+u_2)^2$. Запишем $l_1 = \gamma_1 x_1 + l_1'$, $l_2 = \gamma_2 x_2 + l_2'$, здесь l_1', l_2' — линейные комбинации $x_2, \dots, x_r$ $(\gamma_1, \gamma_2 \in k)$. Тогда

$$\gamma_1 x_1^2 + (l_1' + u_1)x_1 = \gamma_2^2 x_1^2 + 2\gamma_2(l_2' + u_2)x_1 + \gamma_2[x_1, l_2' + u_2] + (l_2' + u_2)^2. \tag{3}$$

Пусть S обозначает универсальную обертывающую алгебру идеала в G/A, порожденного $x_2, \dots, x_r$. Рассмотрим R как алгебру косых многочленов $R = S[x_1; d]$ с левыми коэффициентами S и дифференцированием d таким, что $d(s) = [x_1, s]$ для всех $s \in S$. Это позволяет сравнить коэффициенты при степенях x_1 в (3) и получить

$$\gamma_2^2 = \gamma_1, \quad 2\gamma_2 l_2' - l_1' = u_1 - 2\gamma_2 u_2 \quad \text{и} \quad (l_2' + u_2)^2 = \gamma_2[l_2' + u_2, x_1].$$

Если $\gamma_2 = 0$, то из второго равенства получаем $l_1' \in (G/A)'$, что невозможно, так как $u_1 \neq 0$. Поэтому $\gamma_2 \neq 0$ и $\gamma_1 \neq 0$. Тем самым третье равенство дает противоречие, поскольку $[l_2' + u_2, x_1] \in (G/A)'$, тогда как $(l_2' + u_2)^2 \notin G/A$.

Следствие. *Для любых двух ненулевых элементов $a, b \in R$ найдется такое целое положительное число m, что равенство*

$$ax_1^m = b(l+u)^m, \quad \text{где } l = \sum_{1 \leq i \leq r} \gamma_i x_i \text{ и } u \in (G/A)',$$

влечет $u = 0$, $l = \gamma_1 x_1$.

Лемма 3. *Пусть $u_1, \dots, u_n \in A$. Рассмотрим эндоморфизм φ, определенный правилом $x_i\varphi = \xi_i x_i + u_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Если φ действует на A тождественно, то $\xi_i = 1$ при $(1 \leq i \leq r)$ и φ — автоморфизм.*

Доказательство. Положим $y_i = \xi_i x_i + u_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Пусть $\xi_1 = 0$. В случае, когда $u_1 = 0$, каждый ненулевой коммутатор порождающих, принадлежащий A и имеющий в своей записи букву x_1, переходит в 0 под действием φ, что противоречит условию. Если же $u_1 \neq 0$, то $x_1\varphi = u_1 \in A$, $[x_1, u_1] \neq 0$ и $[x_1, u_1]\varphi = [u_1, u_1\varphi] = [u_1, u_1] = 0$, что опять противоречит условию. Поэтому $\xi_1 \neq 0$ и вообще $\xi_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq r)$. Следовательно, $x_i = \xi_i^{-1}(y_i - u_i)$. Так как $u_i\varphi = u_i$, то x_i принадлежат подалгебре, порожденной $y_1, \dots, y_r$. Поэтому эндоморфизм φ сюръективен.

Возьмем $a \in A$, $a \neq 0$. По условию $a\varphi = a$ и $[a, x_1]\varphi = [a, x_1]$. С другой стороны, $0 \neq [a, x_1]\varphi = [a, \xi_1 x_1 + u_1] = \xi_1[a, x_1]$. Следовательно, $\xi_1 = 1$. Точно так же $\xi_i = 1$ при $2 \leq i \leq r$.

Пусть $f \in G$, $f\varphi = 0$. Так как φ индуцирует на G/A тождественное отображение, то $f\varphi \equiv f (\mathrm{mod}\ A)$, т. е. $f \in A$. По условию $f\varphi = f$, откуда $f = 0$. Таким образом, φ инъективен, т. е. является автоморфизмом.

Лемма 4. *Пусть эндоморфизм φ алгебры G задан правилом $x_i\varphi = \xi_i x_i + u_i$ ($u_i \in A$, $\xi_i \in k \setminus \{0\}$, $1 \le i \le r$). Тогда для любого элемента $h \in G$*

$$h\varphi = h(\xi_1 x_1, \dots, \xi_r x_r) + \sum_{1 \le j \le r} \mu_j u_j D_j(h(\xi_1 x_1, \dots, \xi_r x_r)) \quad (\mu_j \in k). \tag{4}$$

Доказательство. Формулу (4) достаточно проверить, в случае, когда h является коммутатором порождающих элементов. Для коммутаторов веса 1 (т. е. когда $h = x_i$) она очевидна. Общий случай получается индукцией по весу коммутатора.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Пусть m — целое число из следствия. Рассмотрим ненулевые элементы $g_2, \dots, g_r \in A$, удовлетворяющие условиям:

1) g_i принадлежит подалгебре, порожденной x_1 и x_i ($2 \le i \le r$),

2) g_i является коммутатором порождающих.

Положим $h_i = [[g_i, x_1; m], x_i; m]$. Проверим, что элементы $h_2, \dots, h_r$ образуют тестовое множество. Возьмем эндоморфизм φ такой, что $x_i\varphi = y_i$ ($1 \le i \le r$), и пусть $h_i\varphi = h_i$ для всех i. Нам нужно убедиться, что φ — автоморфизм. Вычислим производные Фокса от обеих частей равенства $h_i\varphi = h_i$:

$$(D_j(g_i))x_1^m x_i^m = (D_j(g_i\varphi))y_1^m y_i^m.$$

По лемме 1 элементы $y_1, \dots, y_r$ не лежат в коммутанте. Используя следствие из леммы 2, мы получаем, что $y_i = \xi_i x_i + u_i$ ($u_i \in A$, $\xi_i \in k$). Представим φ в виде $\varphi = \xi\psi$, где $x_i\xi = \xi_i x_i$, $x_i\psi = x_i + v_i$ ($v_i = u_i\xi^{-1} \in A$, $1 \le i \le r$). По лемме 1 при $i = 1, \dots, r$ имеем $\xi_i \ne 0$, т. е. ξ — (диагональный) автоморфизм. По лемме 4 $h_j\varphi = h_j\xi + \sum\limits_i \mu_i u_i D_i(h\xi)$ ($\mu_i \in k$). Заметим, что все отличные от нуля слагаемые $\mu_i u_i D_i(h\xi)$ из предыдущего равенства имеют большую степень, чем $h_j\xi$, поскольку $u_i \in A$. Поэтому $\sum\limits_i \mu_i u_i D_i(h\xi) = 0$. Это означает, что $h_j\xi = h_j$ ($2 \le j \le r$). Следовательно, достаточно проверить, что ψ является автоморфизмом. Иными словами, можно считать далее, что $\xi = 1$.

Элементы $h_2, \dots, h_r$ порождают правое векторное пространство $A \otimes_R Q(R)$ над классическим телом частных $Q(R)$ алгебры $R = U(G/A)$, поскольку для каждого $g \in A$ можно подобрать такие элементы $b_0, b_2, \dots, b_r \in R$, что $gb_0 = h_2 b_2 + \dots + h_r b_r$. Из того, что φ индуцирует на G/A тождественное отображение, следует, что φ корректно продолжается до эндоморфизма пространства A над телом $Q(R)$. Ясно, что это продолжение является тождественным эндоморфизмом. Тем самым φ действует на A тождественно. Отсюда по лемме 3 следует, что φ — автоморфизм. Этим доказано, что тестовый ранг G не больше, чем $r - 1$. Противоположное неравенство следует из [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко Е. И.* Тестовые элементы и тестовый ранг свободной метабелевой группы // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 6. С. 1451–1456.
2. *Чирков И. В., Шевелин М. А.* Тестовые наборы в свободных метабелевых алгебрах Ли // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1401–1407.
3. *Esmerligil Z., Ekici N.* Test sets and test rank of a free metabelian Lie algebra // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 11. P. 5581–5589.

4. *Esmerligil Z.* Test elements of a free color metabelian Lie superalgebra of rank two // J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser. 2004. V. 17, N 1. P. 25–29.
5. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* О тестовом ранге некоторых свободных полинильпотентных групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 37–50.
6. *Esmerligil Z., Kahyalar D., Ekici N.* Test rank of F/R' Lie algebras // Internat. J. Algebra Comput. 2006. V. 16, N 4. P. 817–825.
7. *Коуровская тетрадь* №15. Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.
8. *Тимошенко Е. И.* Вычисление тестового ранга свободной разрешимой группы // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 4. С. 447–457.
9. *Бокуть Л. А.* База свободных полинильпотентных алгебр Ли // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 4. С. 13–20.
10. *Харлампович О. Г.* Условие Линдона для разрешимых алгебр Ли // Изв. вузов. Математика. 1984. № 9. С. 50–59.

Статья поступила 30 мая 2007 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. архитектурно-строительный университет,
ул. Ленинградская, 113, Новосибирск 630008
etim@sibstrin.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru