Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 512.542

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДКЛАССЫ ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н. В. Савельева, Н. Т. Воробьев

Аннотация. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *π-максимальным*, если $\mathfrak{F}$ является максимальным (по включению) подклассом класса Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп. Доказано, что $\mathfrak{F}$ — π-максимальный класс Фиттинга в точности тогда, когда существует такое простое $p \in \pi$, что индекс $\mathfrak{F}$-радикала $G_\mathfrak{F}$ в G равен 1 или p для каждой π-группы G. Отсюда следует, что существуют максимальные подклассы в локальном классе Фиттинга. Это отрицательно решает вопрос А. Н. Скибы о том, что не существует максимальных подклассов Фиттинга в локальном классе Фиттинга (см. [1, вопрос 13.50]).

Ключевые слова: класс Фиттинга, максимальный подкласс Фиттинга, локальный класс Фиттинга, $\mathfrak{F}$-радикал, класс Локетта, лаушева группа, фиттингова пара.

Введение

В теории классов Фиттинга конечных разрешимых групп одной из трудных проблем является проблема нахождения критерия максимальности подкласса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{X}$, сформулированная в 1974 г. Брайсом и Косси (см. [2, с. 170], а также [3, X.4, с. 735]). Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *максимальным* (*по включению*) подклассом Фиттинга класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ (обозначают $\mathfrak{F} \lessdot \mathfrak{X}$), если $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}$ и из того, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{F}, \mathfrak{X}\}$. Заметим, что указанная выше проблема решена Брайсом и Косси [1] лишь для случая, когда $\mathfrak{X}$ совпадает с тривиальным нормальным классом Фиттинга $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп (см. [3, X.4, теорема 4.26]).

Основной результат настоящей работы — описание необходимого и достаточного условия максимальности подкласса Фиттинга $\mathfrak{F}$ в классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп, который ненормален для всякого непустого собственного подмножества π множества всех простых чисел. Если $\mathfrak{F} \lessdot \mathfrak{S}_\pi$, то $\mathfrak{F}$ будем называть просто *π-максимальным классом Фиттинга.*

Нами установлено, что $\mathfrak{F}$ является π-максимальным классом Фиттинга в точности тогда, когда существует простое число $p \in \pi$ такое, что индекс $\mathfrak{F}$-радикала $G_\mathfrak{F}$ в группе G равен 1 или p для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как класс Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ локален, то из доказанной теоремы, в частности, следует, что существуют максимальные подклассы Фиттинга в ненормальном локальном классе Фиттинга, и тем самым подтверждается отрицательный ответ на вопрос А. Н. Скибы, сформулированный в «Коуровской тетради» (см. [1, вопрос 13.50]). Заметим, что первые примеры максимальных нормальных классов Фиттинга в нормальном локальном классе $\mathfrak{S}$ анонсированы в [4]. Мы также подтверждаем существование нетривиальных π-максимальных подклассов Фиттинга построением конкретных примеров.

Все рассматриваемые группы в настоящей работе конечны и разрешимы, если не оговорено противное. В определениях и обозначениях мы следуем [3].

1. Предварительные сведения

Классом Фиттинга называется нормально наследственный класс групп $\mathfrak{F}$, замкнутый относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп.

Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга, то подгруппу $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называют *$\mathfrak{F}$-радикалом* группы G, если она является наибольшей из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. *Произведением* $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ называется класс всех таких групп G, для которых фактор-группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{H}$. Хорошо известно, что класс $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Для доказательства основного результата будем использовать операторы «*» и «$_\star$», которые были определены Локеттом [5]. Для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^\star$ обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^\star} = G_{\mathfrak{F}^\star} \times H_{\mathfrak{F}^\star}$. Класс $\mathfrak{F}_\star$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^\star = \mathfrak{F}^\star$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\star$, то $\mathfrak{F}$ называют *классом Локетта.*

Секцией Локетта непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется множество всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{X}^\star = \mathfrak{F}^\star$. Секцию Локетта класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ обозначают $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{F})$ [5]. *Подсекцией Локетта* класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют множество

$$\{\mathfrak{H} : \mathfrak{H} \in \mathrm{Locksec}(\mathfrak{F}), \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}\}.$$

Его обозначают $\mathrm{Locksub}(\mathfrak{F})$.

Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *гомоморфом*, если каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$. Гомоморф $\mathfrak{H}$ называется *насыщенным*, если из того, что $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$, следует $G \in \mathfrak{H}$.

Мы будем использовать следующие известные свойства операторов Локетта, собранные в следующей лемме.

Лемма 1.1 [3, X.1.13, X.1.8(b), X.1.15]. *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, * и $_\star$ — операторы Локетта, то справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — множество непустых классов Фиттинга, то $(\bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i)^\star = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i^\star$;*

2) [6, лемма 3] *если $\mathfrak{H}$ является насыщенным гомоморфом, то $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^\star = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{H}$;*

3) *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{H}^\star$;*

4) $(\mathfrak{F}_\star)_\star = (\mathfrak{F}^\star)_\star = \mathfrak{F}_\star \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^\star = (\mathfrak{F}_\star)^\star$.

Неединичный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют *нормальным в классе Фиттинга* $\mathfrak{X}$ (обозначают как $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$) или *$\mathfrak{X}$-нормальным*, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}$-радикал $G_{\mathfrak{F}}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой для любой группы $G \in \mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathbb{P}$ множество всех простых чисел. Следующая лемма представляет известную характеризацию $\mathfrak{X}$-нормальных классов Фиттинга.

Лемма 1.2 [4, X.3.3, X.3.7]. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathfrak{F} \neq (1)$ — класс Фиттинга и $\mathfrak{X}$ — класс Локетта, то $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^\star \triangleleft \mathfrak{X}$;*

2) *если* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, *то* $(1) \neq \mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$ *только в случае, когда* $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}_\pi$; *в частности,* $(1) \neq \mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}$.

Всякое отображение $h : \mathbb{P} \to \{$классы Фиттинга$\}$ называют *функцией Хартли* или *H-функцией* [7]. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *локальным*, если существует такая функция Хартли f, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \big(\bigcap\limits_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{p'}\big)$, где $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$. В [8] установлено, что справедлива

Лемма 1.3. *Каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта.*

Известно, что если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и N — нормальная подгруппа группы G, то $N_\mathfrak{F} = N \cap G_\mathfrak{F}$.

Непосредственной проверкой легко установить, что справедлива

Лемма 1.4. *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — классы Фиттинга. Тогда если $\mathfrak{X}$ — радикальный гомоморф и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\mathfrak{F}_1\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_2\mathfrak{X}$.*

2. π-Нормальные и π-максимальные классы

Напомним, что если $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, то класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ называют *нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ или просто *π-нормальным* (обозначают $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$), если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой π-группы G ее $\mathfrak{F}$-радикал является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы G.

Если $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют *$\mathfrak{F}$-инъектором* G, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой N для любой субнормальной подгруппы N группы G. Следующая лемма устанавливает связь между π-максимальными и π-нормальными классами Фиттинга и представляет самостоятельный интерес.

Лемма 2.1. *Каждый π-максимальный класс Фиттинга π-нормален.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} \lessdot \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{N}_\pi$ — класс всех нильпотентных π-групп. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, то $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Но $\mathfrak{F}$ максимален в $\mathfrak{S}_\pi$, поэтому возможны два случая: либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$, либо $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Рассмотрим отдельно каждый из них.

Случай 1. $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi$. В этом случае ввиду утверждения 1 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{F}^\star = (\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^\star = \mathfrak{S}_\pi^\star \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^\star$. Но класс $\mathfrak{S}_\pi$ — локальный класс Фиттинга, так как он определяется H-функцией f такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{S}_\pi, & \text{если } p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

Следовательно, по лемме 1.3 $\mathfrak{S}_\pi$ — класс Локетта. Кроме того, легко видеть, что класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ — насыщенный гомоморф, поэтому ввиду утверждения 2 леммы 1.1 получаем $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^\star = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, по утверждению 3 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{S}_\pi^\star = \mathfrak{S}_\pi$. Заметим также, что $\mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi$. Отсюда ввиду ассоциативности операции умножения классов Фиттинга и леммы 1.1 следует, что

$$\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi = (\mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi)\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi^2 = \big(\mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi^2\big)\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi^3 = \ldots = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi^n.$$

Итак, для любого натурального n справедливо равенство $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi^n$.

Но ввиду того, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}_\pi^n = \mathfrak{S}_\pi$ и класс $\mathfrak{N}_\pi^n$ является насыщенным гомоморфом, с учетом утверждения 3 леммы 1.1 справедливы включения

$$\mathfrak{S}_\pi \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^\star \mathfrak{N}_\pi^n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}^\star = \mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{S}_\pi.$$

Итак, $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}_\pi$, и по утверждению 2 леммы 1.2 $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, в первом случае теорема верна.

Случай 2. $\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. В данном случае по утверждению 1 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{S}_\pi^\star \cap (\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^\star = \mathfrak{S}_\pi^\star$. Так как $\mathfrak{S}_\pi$ — класс Локетта, то $\mathfrak{S}_\pi^\star = \mathfrak{S}_\pi$. Кроме того, по утверждению 2 леммы 1.1 получаем $(\mathfrak{F}\mathfrak{N}_\pi)^\star = \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi$. Поэтому справедливо равенство

$$\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi.$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{S}_\pi \subseteq \mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi$. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, по утверждению 3 леммы 1.1 имеем $\mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{S}_\pi^\star = \mathfrak{S}_\pi$. Ввиду того, что $\mathfrak{N}_\pi$ — радикальный гомоморф, по лемме 1.4 $\mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_\pi$. Очевидно, $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$, и поэтому $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, $\mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Таким образом, $\mathfrak{F}^\star\mathfrak{N}_\pi = \mathfrak{S}_\pi$. Последнее равенство равносильно тому, что для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$ справедливо $G/G_{\mathfrak{F}^\star} \in \mathfrak{N}_\pi$.

Пусть V — $\mathfrak{F}^\star$-инъектор группы G. Так как любая подгруппа нильпотентной группы субнормальна в ней, то $V/G_{\mathfrak{F}^\star}$ — субнормальная подгруппа в $G/G_{\mathfrak{F}^\star}$. Следовательно, V субнормальна в G, что влечет равенство $V = G_{\mathfrak{F}^\star}$. Таким образом, подгруппа $G_{\mathfrak{F}^\star}$ является $\mathfrak{F}^\star$-максимальной в G для любой π-группы G. Поэтому $\mathfrak{F}^\star$ нормален в $\mathfrak{S}_\pi$. Значит, по утверждению 1 леммы 1.2 класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в $\mathfrak{S}_\pi$.

Лемма доказана.

3. π-Лаушева группа

Для доказательства критерия π-максимальности будем использовать понятие группы Лауша [9] (см. также [3, X.4.2]) и ее свойства. Напомним процедуру построения такой группы для класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$.

Понятие группы Лауша связано с понятием ограниченного прямого произведения (см. [2, X.4, с. 721]). Напомним, что если $\{G_\mu\}_{\mu\in M}$ — множество групп, то их ограниченное прямое произведение $D_M = \underset{\mu\in M}{\times} G_\mu$ состоит из всех таких функций $f : M \to \bigcup\limits_{\mu\in M} G_\mu$ конечного носителя, что $f(\mu) \in G_\mu$ для всех $\mu \in M$, с групповой операцией, определенной следующим образом: $(fg)(\mu) = f(\mu)g(\mu)$. Пусть $N \subseteq M$ и $D_N = \underset{\nu\in N}{\times} G_\nu$. Под естественным вложением $\varepsilon_N : D_N \to D_M$ понимают отображение, ставящее в соответствие элементу $f_0 \in D_N$ следующий элемент f из D_M:

$$f(\lambda) = \begin{cases} f_0(\lambda), & \text{если } \lambda \in N, \\ 1, & \text{если } \lambda \notin N. \end{cases}$$

Если G и H — группы, то изоморфизм $\alpha : G \to H$ называется *субнормальным* (*нормальным*) *вложением* G в H, если $G\alpha \lhd\lhd H$ ($G\alpha \lhd H$). Очевидно, что ε_N является нормальным вложением D_N в D_M. В специальном случае, когда $N = \{\nu\}$ — одноэлементное множество, полагают $G = G_\nu$ и используют символ ε_G для обозначения естественного вложения группы G ($= D_{\{\nu\}}$) в D_M. Следуя [3], множество всех субнормальных вложений G в H обозначим символом $\mathrm{Snemb}(G \to H)$ и подмножество нормальных вложений — символом $\mathrm{Nemb}(G \to H)$.

Пусть $\mathfrak{E}$ — класс всех конечных групп. Зафиксируем множество $\mathscr{E}$, содержащее в точности по одному представителю из каждого класса изоморфных групп. Таким образом, для каждой группы $G \in \mathfrak{E}$ существует единственная группа $G_0 \in \mathscr{E}$ такая, что $G \cong G_0$. Определим для каждого класса Фиттинга $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{E}$ множество $\mathrm{Set}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X} \cap \mathscr{E}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга конечных групп и $\Delta(\mathfrak{F}) = \times\{G : G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})\}$. Рассмотрим подгруппу

$$\Gamma(\mathfrak{F}) = \langle (g^{-1}\varepsilon_G)(g_\alpha \varepsilon_N) : G, H \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F}),\ g \in G,\ \alpha \in \mathrm{Nemb}(G \to H)\rangle,$$

группы $\Delta(\mathfrak{F})$. Как установлено в [3, X.4.3(a)], подгруппа $\Gamma(\mathfrak{F})$ нормальна в $\Delta(\mathfrak{F})$, и коммутант $\Delta(\mathfrak{F})'$ содержится в $\Gamma(\mathfrak{F})$.

Определение 3.1 [3, X.4.2]. Фактор-группа $\Lambda(\mathfrak{F}) = \Delta(\mathfrak{F})/\Gamma(\mathfrak{F})$ называется группой Лауша класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

Будем использовать данную конструкцию группы Лауша для случая, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$. Такую группу назовем π-*лаушевой* и будем обозначать ее символом Λ_π. Таким образом, $\Lambda_\pi = \Lambda(\mathfrak{S}_\pi)$.

Ввиду того, что $\Delta(\mathfrak{F})$ — ограниченное прямое произведение конечных групп, $\Delta(\mathfrak{F})$ — группа кручения. Следовательно, с учетом X.4.3(a) из [3] (см. выше) группа Лауша класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ является абелевой группой кручения.

Для изложения необходимых в дальнейшем известных свойств группы Лауша класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ будем также использовать понятие фиттинговой пары для $\mathfrak{F}$. Напомним, что пара (A, d) называется *фиттинговой парой* для $\mathfrak{F}$ (или $\mathfrak{F}$-*фиттинговой парой*), если A — абелева группа (в общем случае бесконечная) и $d : \mathrm{Set}(\mathfrak{F}) \to \{\mathrm{Hom}(G, A) : G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})\}$ — отображение с тем свойством, что образ d_G для всех $G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})$ является гомоморфизмом G в A, удовлетворяющим следующим двум условиям.

FP1. $d_G = \alpha \circ d_H$ для всех $G, H \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})$ и для всех нормальных вложений $\alpha : G \to H$.

FP2. $A = \{gd_G : G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F}), g \in G\}$.

$\mathfrak{F}$-фиттингова пара (Λ, δ) называется *универсальной*, если для любой $\mathfrak{F}$-фиттинговой пары (A, d) существует гомоморфизм $\varphi : \Lambda \to A$ такой, что $d_G = \delta_G \circ \varphi$ для всех групп $G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})$.

Лемма 3.2 [3, X.4.5(i)]. *Пусть $\mathfrak{X}$ — D_0-замкнутый подкласс класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\Xi(\mathfrak{X}) = \{g\delta_G : g \in G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{X})\}$. Тогда $\Xi(\mathfrak{X})$ является подгруппой группы Лауша $\Lambda(\mathfrak{F})$.*

Лемма 3.3 [3, X.4.14]. *Пусть Λ_π — π-лаушева группа. Пусть $\Xi(\mathfrak{X}) = \{x\delta_X : x \in X \in \mathrm{Set}(\mathfrak{X})\}$ для $\mathfrak{X} \in \mathrm{Locksub}(\mathfrak{S}_\pi)$ — подмножество Λ_π. Тогда отображение*

$$\Xi : \mathfrak{X} \to \Xi(\mathfrak{X})$$

является решеточным изоморфизмом между решеткой π-нормальных классов Фиттинга и решеткой подгрупп π-лаушевой группы Λ_π.

Лемма 3.4 [3, X.4.15]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс Фиттинга π-групп и S — подгруппа группы Лауша Λ_π, а $\mathfrak{G}$ — определенный единственным образом класс Фиттинга в подсекции Локетта $\mathrm{Locksub}(\mathfrak{F})$ такой, что $\Xi(\mathfrak{G}) = S$. Если $G \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})$, то $G_{\mathfrak{G}} = \{g \in G : g\delta_G \in S\}$.*

4. Критерий π-максимальности

Теорема 4.1. *Пусть π — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{S}_\pi$ — класс Фиттинга. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ π-максимален;*

(2) *существует простое число $p \in \pi$ такое, что $|G : G_\mathfrak{F}| \in \{1, p\}$ для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть $\Xi(\mathfrak{F}) = \{x\delta_X : x \in X \in \mathrm{Set}(\mathfrak{F})\}$. Тогда по лемме 3.2 группа $\Xi(\mathfrak{F})$ является подгруппой π-лаушевой группы Λ_π. Заметим, что ввиду утверждения X.4.3(a) из [3] Λ_π — абелева группа.

Так как $\mathfrak{F} \lessdot \mathfrak{S}_\pi$, по лемме 2.1 $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$. Следовательно, по утверждению 2 леммы 1.2 имеем $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}_\pi = \mathfrak{S}_\pi^\star$, поэтому $\mathfrak{F} \in \mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$. Если класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ содержится в $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi)$, то $\mathfrak{X}^\star = \mathfrak{S}_\pi$. Тогда из $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^\star$ получаем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{X} \in \mathrm{Locksub}(\mathfrak{S}_\pi)$. Следовательно, $\mathrm{Locksec}(\mathfrak{S}_\pi) = \mathrm{Locksub}(\mathfrak{S}_\pi)$. Таким образом, по лемме 3.3 существует решеточный изоморфизм между π-нормальными классами и подгруппами группы Лауша Λ_π. Из π-максимальности $\mathfrak{F}$ по лемме 3.3 следует, что $\Xi(\mathfrak{F})$ — максимальная подгруппа π-лаушевой группы Λ_π. Но так как Λ_π — группа кручения, то $\Lambda_\pi/\Xi(\mathfrak{F}) \cong Z_p$ для некоторого $p \in \pi$. Тогда из леммы 3.4 следует, что для всех групп $G \in \mathfrak{S}_\pi$ фактор-группа $G/G_\mathfrak{F}$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\Lambda_\pi/\Xi(\mathfrak{F})$.

Но $\Lambda_\pi/\Xi(\mathfrak{F})$ — группа простого порядка p. Следовательно, либо $G/G_\mathfrak{F} = \Lambda/\Xi(\mathfrak{F}) \cong Z_p$, либо $G = G_\mathfrak{F}$. Отсюда вытекает, что $|G/G_\mathfrak{F}| \in \{1, p\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{S}_\pi$. Это доказывает (2).

(2) $\Longrightarrow$ (1). Предположим, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ не максимален в $\mathfrak{S}_\pi$. Тогда существует такой класс Фиттинга $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{S}_\pi$.

Пусть G и H — группы из классов $\mathfrak{M}\backslash\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{S}_\pi\backslash\mathfrak{M}$ соответственно. Так как по условию для любой π-группы ее индекс по $\mathfrak{F}$-радикалу равен простому числу $p \in \pi$, то $|G/G_\mathfrak{F}| = |H/H_\mathfrak{F}| = p$. Но $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$. Значит, $H_\mathfrak{F} \leq H_\mathfrak{M}$.

Из того, что $|H/H_\mathfrak{F}| = p$, следует, что $H_\mathfrak{F}$ — максимальная нормальная подгруппа группы H. Следовательно, ввиду $H_\mathfrak{F} \leq H_\mathfrak{M}$ получаем, что либо $H_\mathfrak{M} = H$, либо $H_\mathfrak{F} = H_\mathfrak{M}$. Если $H_\mathfrak{M} = H$, то $H \in \mathfrak{M}$; получаем противоречие с выбором группы H.

Следовательно, справедливо равенство

$$H_\mathfrak{F} = H_\mathfrak{M}. \tag{4.1.1}$$

Пусть $T = G \times H$. Если предположить, что $T \in \mathfrak{M}$, то из того, что $H \lhd T$, следует, что $H \in \mathfrak{M}$, что невозможно ввиду выбора H. Значит, $T_\mathfrak{M} < T$.

Так как $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$, имеем $(T_\mathfrak{M})_\mathfrak{F} = T_\mathfrak{M} \cap T_\mathfrak{F} = T_\mathfrak{F}$.

Заметим, что $T_\mathfrak{M} = G \times H_\mathfrak{M}$. Пусть $T_\mathfrak{M} \in \mathfrak{F}$. Тогда из $G \lhd T_\mathfrak{M}$ получаем $G \in \mathfrak{F}$. Последнее противоречит выбору группы G.

Следовательно, $T_\mathfrak{M} \notin \mathfrak{F}$ и

$$(T_\mathfrak{M})_\mathfrak{F} = T_\mathfrak{F} < T_\mathfrak{M}. \tag{4.1.2}$$

С другой стороны, ввиду (4.1.1) имеем $H_\mathfrak{F} = H_\mathfrak{M}$. Тем самым $T_\mathfrak{M} = G \times H_\mathfrak{M} \in \mathfrak{F}$ и $G \lhd T_\mathfrak{M}$.

Поэтому $T_\mathfrak{M} \leq T_\mathfrak{F}$. Последнее противоречит равенству (4.1.2). Значит, $\mathfrak{F} \lessdot \mathfrak{S}_\pi$.

Теорема доказана.

В случае $\pi = \mathbb{P}$ получаем

Следствие 4.2 [3, теорема X.4.26]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) *$\mathfrak{F}$ максимален в классе всех конечных разрешимых групп $\mathfrak{S}$;*

(ii) *существует такое простое p, что $|G : G_{\mathfrak{F}}| \in \{1, p\}$ для всех групп $G \in \mathfrak{S}$.*

5. Примеры

5.1. Процедура построения первого примера в идейном плане восходит к известным результатам Блессеноля и Гашюца [10], относящимся к конструированию разрешимых нормальных классов Фиттинга, и состоит в построении специальной фиттинговой пары для $\mathfrak{F}$.

Пусть $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $p \in \pi$ — фиксированное простое число, A — циклическая группа порядка $p-1$ и G — любая группа из класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$. Обозначим через $\mathscr{L}$ некоторый главный ряд группы G. Пусть $\mathscr{M} = \{M_1, M_2, \dots, M_r\}$ — множество всех главных p-факторов группы G и $\mathscr{M} \neq \varnothing$. Тогда каждый элемент $g \in G$ индуцирует автоморфизм α_g на M_i $(i = 1, 2, \dots, r)$. Пусть $n = \dim(M_i)$ и m — отображение группы автоморфизмов $A(M_i)$ группы M_i в группу невырожденных матриц $GL(M_i)$ порядка n с элементами a_{ij}, принадлежащими полю Галуа F_p, т. е. $\alpha_g m = \|a_{ij}\|$. Пусть теперь h — отображение группы $GL(M_i)$ в мультипликативную группу $F_p^\star$ поля F_p такое, что

$$\|a_{ij}\|h = \det \|a_{ij}\|.$$

Легко видеть, что h — гомоморфизм, поэтому произведение $d = mh$ является гомоморфизмом группы $A(M_i)$ в $A = F_p^\star$. Итак,

$$\alpha_g mh = \alpha_g d = \det \|a_{ij}\|.$$

Пусть $\alpha_g d = d_i^p(g)$ и $d_G^p(g) = \prod\limits_{i=1}^{r} d_i^p(g)$ для всех $g \in G$.

Если $\mathscr{M} = \varnothing$, то положим $d_G^p(g) = 1$. Нетрудно заметить, что отображение $d_G^p : G \to A$ — гомоморфизм.

Пусть теперь $p = 3$. Непосредственной проверкой легко убедиться, что пара (A, d), где $A = F_3^\star$ и $d : \mathfrak{F} \to \bigcup\{\mathrm{Hom}(G, A)\}$, удовлетворяет условию FP1 определения фиттинговой пары для $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{M} = \big(G \in \mathfrak{F} : d_G^3(G) = 1\big)$. Тогда, применяя теорему IX.2.11 из [3], получаем, что $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга и $G_{\mathfrak{M}} = \mathrm{Ker}(d_G)$. Теперь максимальность $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{F}$ вытекает из теоремы 4.1, так как $|A| = 2$ и по утверждению IX.4.2(b) из [3] получаем $|G/G_{\mathfrak{M}}| \in \{1, 2\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$.

5.2. Пусть $3 \in \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$. Тогда класс групп $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ определим следующим образом: $G \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда G действует на своих элементах порядка 3^n как группа четных подстановок (n произвольное натуральное). Ввиду результата Камины [11] получаем, что $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга индекса 2 в классе $\mathfrak{F}$, т. е. $|G/G_{\mathfrak{M}}| \in \{1, 2\}$ для всех групп G из $\mathfrak{F}$, и $\mathfrak{M} \lessdot \mathfrak{F}$ по теореме 4.1.

В заключение заметим, что ввиду произвольности выбора натурального n в локальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ существует счетное множество максимальных подклассов Фиттинга.

6. Приложения

6.1. Существование ненормальных π-максимальных подклассов. Херцфельд [12] и А. Н. Скибой (см. [13, пример 19.1]) показано, что каждая неединичная локальная формация не имеет максимальных по включению подформаций. Проблема существования максимальных подклассов Фиттинга в минимальном нормальном классе Фиттинга сформулирована Х. Лаушем в [14, вопрос 9.18] и решена отрицательно Н. Т. Воробьевым [8]. В связи с этим естествен следующий вопрос, сформулированный А. Н. Скибой.

Проблема [1, вопрос 13.50]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?*

Отрицательный ответ на указанную проблему дает

Теорема 6.1.1. *В локальном классе Фиттинга $\mathfrak{S}_\pi$ существуют ненормальные π-максимальные классы Фиттинга.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \subset \pi \subset \mathbb{P}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга такой, что для любой π-группы G индекс $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ принадлежит $\{1, p\}$ для некоторого простого числа $p \in \pi$. Тогда по теореме 4.1 $\mathfrak{F} \lessdot \mathfrak{S}_\pi$ (такие классы $\mathfrak{F}$ существуют ввиду построенных выше примеров 5.1 и 5.2). Следовательно, по лемме 2.1 $\mathfrak{F} \lhd \mathfrak{S}_\pi$. Но тогда по утверждению 2 леммы 1.2 имеем $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{S}_\pi \neq \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$ — ненормальный класс Фиттинга.

Теорема доказана.

6.2. О классе Фиттинга с условием Локетта. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем *классом Фиттинга с условием Локетта в классе Фиттинга* $\mathfrak{X}$ или $\mathscr{L}_{\mathfrak{X}}$*-классом*, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{F}_\star = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}_\star$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{F}$ назовем просто $\mathscr{L}$*-классом.*

Ввиду результата Брайса и Косси [15] проблема построения каждого разрешимого класса Локетта $\mathfrak{F}$ как пересечения класса Локетта и некоторого нормального класса Фиттинга эквивалентна тому, что $\mathfrak{F}$ удовлетворяет равенству $\mathfrak{F}_\star = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\star$ — условию Локетта, где $\mathfrak{S}_\star$ — минимальный по включению элемент секции Локетта класса $\mathfrak{S}$, т. е. $\mathfrak{S}_\star$ — минимальный нормальный класс Фиттинга. В [15] установлено, что условие Локетта выполняется для разрешимых локальных наследственных классов Фиттинга. В [6] получен общий результат: доказано, что каждый разрешимый локальный класс Фиттинга удовлетворяет условию Локетта.

До настоящего времени в теории классов Фиттинга одной из трудных остается проблема описания групп класса Фиттинга, порожденного симметрической группой из трех символов (см., например, [3, XI.3.4, с. 801]). Напомним, что если $\mathfrak{F} = \operatorname{Fit} S_3$, где S_3 — симметрическая группа из трех символов, то

$$\operatorname{Fit} S_3 = \cap\{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X} \text{ — класс Фиттинга и } S_3 \in \mathfrak{X}\}.$$

Выделяя максимальный подкласс в $\mathfrak{F} = \operatorname{Fit} S_3$, мы получаем новую информацию об этом классе.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — классы Фиттинга, то через $\mathfrak{F} \vee \mathfrak{H}$ обозначают класс Фиттинга, порожденный объединением $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Теорема 6.2.1. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является $\mathscr{L}$-классом.*

Доказательство. Покажем, что для $\mathfrak{F}$ выполняется условие Локетта.

Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_\star \vee \mathfrak{F}$, ввиду утверждения 4 леммы 1.1

$$\mathfrak{F}_\star \vee (\mathfrak{F} \cap (\mathfrak{F}_\star)^\star) = \mathfrak{F}_\star \vee (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}^\star) = \mathfrak{F}_\star \vee \mathfrak{F}.$$

Тогда для всех групп $G \in \mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F}_\star$, применяя следствие 2.6 (см. [16, с. 42]), имеем

$$\mathfrak{F}_\star \vee \mathfrak{F} = \{G : (G \times S_3)_{\mathfrak{F}_\star} \text{ входит подпрямо в } G \times S_3\}.$$

Итак, $(G \times S_3)_{\mathfrak{F}^\star}$ входит подпрямо в $G \times S_3$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}\backslash\mathfrak{F}_\star$. Следовательно, ввиду примера 2.7.2 (см. [16, с. 42]) имеем $|G/G_{\mathfrak{F}}| = 2$. Следуя доказательству теоремы 4.1 (утверждение 2) $\Longrightarrow$ 1)), заключаем, что $\mathfrak{F}_\star \lessdot \mathfrak{F}$. Из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$ ввиду утверждений 3 и 4 леммы 1.1 вытекает, что $\mathfrak{F}_\star \subseteq \mathfrak{S}_\star$. Следовательно, с учетом того, что $\mathfrak{F}_\star \subset \mathfrak{F}$, получаем включение $\mathfrak{F}_\star \subseteq \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\star \subseteq \mathfrak{F}$. Ввиду $\mathfrak{F}_\star \lessdot \mathfrak{F}$ справедливо одно из следующих равенств: $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\star = \mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_\star = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\star$. Если выполняется первое равенство, то $\mathfrak{S}_\star \supseteq \mathfrak{F}$. Это противоречит тому, что ввиду примера Камины [11] $S_3 \notin \mathfrak{S}_\star$ и $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{S}_\star$.

Таким образом, выполняется условие $\mathfrak{F}_\star = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\star$, и $\mathfrak{F}$ — $\mathscr{L}$-класс.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 13-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995.
2. *Bryce R. A., Cossey J.* Maximal Fitting classes of finite soluble groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. V. 10. P. 169–175.
3. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
4. *Воробьев Н. Т.* О проблеме существования максимальных классов Фиттинга // Веснiк Вiцебскага дзяржаўнага унiверсiтэта iмя П. М. Машэрава. 1997. № 4. С. 60–61.
5. *Lockett F. P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^\star$ // Math. Z. 1974. Bd 137. S. 131–136.
6. *Воробьев Н. Т.* О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Мат. заметки. 1988. Т. 43, № 2. С. 161–168.
7. *Воробьев Н. Т.* О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1296–1302.
8. *Воробьев Н. Т.* О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35, № 6. С. 485–497.
9. *Lausch H.* On normal Fitting classes // Math. Z. 1973. Bd 130, № 1. S. 67–72.
10. *Blessenohl D., Gaschütz W.* Über normale Schunk und Fittingklassen // Math. Z. 1970. Bd 148, № 1. S. 1–8.
11. *Camina A. R.* A note on Fitting classes // Math. Z. 1974. Bd 136, № 4. S. 351–352.
12. *Hertzfeld U. C.* Frattini classes of formations of finite groups // Boll. Un. Mat. Ital. 1988. V. B, N 7. P. 601–611.
13. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.
14. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). 11-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО АН РАН, 1990.
15. *Bryce R. A., Cossey J.* A problem in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. 1975. Bd 141, № 2. S. 99–110.
16. *Cusack E.* The join of two Fitting classes // Math. Z. 1979. Bd 167. S. 37–47.

Статья поступила 25 апреля 2007 г.

Савельева Наталья Валентиновна, Воробьев Николай Тимофеевич
Витебский гос. университет им. П. М. Машерова,
Московский пр., 33, Витебск 210038, Беларусь
nato2000@yandex.ru, nicholas@vsu.by