Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 510.5

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ m–СТЕПЕНИ

С. Ю. Подзоров

Аннотация. Дается описание типов изоморфизма главных идеалов верхней полурешетки m-степеней, порожденных арифметическими множествами. Результат Лахлана 1972 г. для вычислимо перечислимых m-степеней распространяется на произвольные уровни арифметической иерархии. В качестве следствий этого результата устанавливается характеризация типов локального изоморфизма полурешеток Роджерса арифметических нумераций конечных семейств и доказывается, что нетривиальные полурешетки Роджерса нумераций, вычислимых на разных уровнях арифметической иерархии, не могут быть изоморфны, если разрыв между уровнями больше 1.

Ключевые слова: арифметическая иерархия, m-сводимость, дистрибутивная верхняя полурешетка, лахлановская полурешетка, нумерация, полурешетка Роджерса.

В 1972 г. Лахлан [1] описал полурешетки, изоморфные главным идеалам верхней полурешетки вычислимо перечислимых m-степеней. Позднее в работе [2] показано, что полурешетка удовлетворяет описанию Лахлана тогда и только тогда, когда она является дистрибутивной верхней полурешеткой с наибольшим и наименьшим элементами, имеющей Σ^0_3-представление. Таким образом, по результатам упомянутых двух работ справедливо следующее утверждение: верхняя полурешетка изоморфна главному идеалу полурешетки вычислимо перечислимых m-степеней тогда и только тогда, когда она является ограниченной дистрибутивной полурешеткой, допускающей Σ^0_3-представление.

Основным результатом данной работы является обобщение этого утверждения, позволяющее распространить его на арифметические m-степени. Доказывается, что для любого натурального n верхняя полурешетка изоморфна главному идеалу полурешетки m-степеней Σ^0_{n+1}-множеств тогда и только тогда, когда она является ограниченной дистрибутивной полурешеткой, допускающей Σ^0_{n+3}-представление. Более того, ограниченными дистрибутивными полурешетками с Σ^0_{n+3}-представлениями будут также все главные идеалы верхней полурешетки m-степеней, порожденные Δ^0_{n+2}-множествами, и для каждой ограниченной дистрибутивной полурешетки с Σ^0_{n+3}-представлением найдется коиммунное либо вычислимое Σ^0_{n+1}-множество, порождающее изоморфный этой полурешетке главный идеал верхней полурешетки m-степеней. Последнее усиливает основной результат работы [3] и вместе с результатами работы [4] позволяет расширить класс полурешеток, являющихся главными идеалами и сегментами в полурешетках Роджерса арифметических нумераций. Это, в частности, влечет усиление результатов о различии типов изоморфизма полурешеток Роджерса арифметических нумераций разных уровней арифметической иерархии, представленных в работах [5, 6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00336), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта 4413.2006.1).

§ 1. Главные идеалы полурешетки арифметических m-степеней

Основные понятия, относящиеся к теории вычислимости, можно найти в [7], к теории решеток — в [8], к теории нумераций — в [9]. Мы предполагаем, что читателю они известны. Во введении к книге [9] также содержатся полезные сведения, относящиеся к дистрибутивным полурешеткам.

Для обозначения значения нумерации ν на натуральном числе x будем, следуя традиции, писать νx вместо $\nu(x)$, опуская скобки. Для частичной функции f через δf обозначим ее область определения, а через ρf — область значений.

Для предупорядоченного множества $\mathscr{A} = \langle A, \leq \rangle$ ассоциированное с ним частично упорядоченное множество будем обозначать через $\widetilde{\mathscr{A}} = \langle \widetilde{A}, \leq \rangle$ (сохраняя одно и то же обозначение для предпорядка и ассоциированного с ним порядка), а элемент $\widetilde{A}$, содержащий $x \in A$ (класс эквивалентности), — через $[x]_{\mathscr{A}}$ (либо просто через $[x]$, если ясно, о каком $\mathscr{A}$ идет речь). Предупорядоченное множество $\mathscr{A}$ будем называть *предрешеткой* (*верхней предполурешеткой*, *нижней предполурешеткой*), если $\widetilde{\mathscr{A}}$ является решеткой (верхней полурешеткой, нижней полурешеткой). Предрешетку (верхнюю предполурешетку) будем называть *дистрибутивной*, если ассоциированная с ней решетка (верхняя полурешетка) дистрибутивна. В дальнейшем верхние полурешетки (верхние предполурешетки) мы называем просто полурешетками (предполурешетками), поскольку нижние полурешетки мы рассматривать не будем. Для предрешетки (предполурешетки) $\mathscr{A}$ запись $\mathscr{A} = \langle A, \leq; u, v \rangle$ ($\mathscr{A} = \langle A, \leq; u \rangle$) будет означать, что u и v — бинарные операции на $\mathscr{A}$, представляющие на $\widetilde{\mathscr{A}}$ операции взятия точной верхней и точной нижней граней соответственно (т. е. для любых $x, y \in A$ $[u(x,y)] = \sup\{[x],[y]\}$ и $[v(x,y)] = \inf\{[x],[y]\}$).

Если в полурешетке $\mathscr{L}$ есть наименьший или наибольший элементы, то обозначаем их через $\bot_{\mathscr{L}}$ и $\top_{\mathscr{L}}$ соответственно.

Пусть $\mathscr{L} = \langle L, \leq^{\mathscr{L}}; \vee^{\mathscr{L}} \rangle$ — полурешетка с носителем L, ν — нумерация множества L и $n \in \mathbb{N}$. Скажем, что ν является Σ^0_n-*представлением* полурешетки $\mathscr{L}$, если выполнены следующие свойства:

1) бинарное отношение «$\nu x \leq^{\mathscr{L}} \nu y$» на $\mathbb{N}$ принадлежит классу Σ^0_n арифметической иерархии;

2) существует вычислимая функция $u : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ такая, что $\nu u(x,y) = \nu x \vee^{\mathscr{L}} \nu y$ для любых $x, y \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, что ν является n-*лахлановским представлением* полурешетки $\mathscr{L}$, если существует последовательность $\{\mathscr{D}_i = \langle D_i, \leq_i \rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ конечных дистрибутивных предрешеток, для которой выполнены следующие свойства:

1) $D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots$ — сильно вычислимая последовательность конечных подмножеств натурального ряда и $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} D_i = \mathbb{N}$;

2) для всех i $\quad 0, 1 \in D_i$ и для всех $x \in D_i$ $\quad 0 \leq_i x \leq_i 1$;

3) для $x, y \in D_i$ из $x \leq_i y$ следует $x \leq_{i+1} y$, определенные естественным образом отображения $\widetilde{\mathscr{D}}_i$ в $\widetilde{\mathscr{D}}_{i+1}$ сохраняют точные верхние грани;

4) тернарное отношение «$x \leq_i y$» принадлежит классу Π^0_{n+2} арифметической иерархии;

5) существуют последовательности функций $\{u_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{v_i : D_i^2 \to D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, вычислимые равномерно по i, такие, что $\mathscr{D}_i = \langle D_i, \leq_i; u_i, v_i \rangle$;

6) для всех $x, y \in \mathbb{N}$ справедливо $\nu x \leq^{\mathscr{L}} \nu y \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})(x, y \in D_i \,\&\, x \leq_i y)$.

Из определений сразу следует, что каждое n-лахлановское представление является Σ^0_{n+3}-представлением. Легко показать, что если полурешетка $\mathscr{L}$ имеет n-лахлановское представление для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то она содержит наименьший элемент $\perp_{\mathscr{L}} = \nu 0$, наибольший элемент $\top_{\mathscr{L}} = \nu 1$ и является дистрибутивной (так как она изоморфна прямому пределу $\varinjlim_{i\in\mathbb{N}} \widetilde{\mathscr{D}}_i$).

В работе [2] доказано следующее утверждение.

Если полурешетка $\mathscr{L}$ дистрибутивна, содержит наибольший и наибольший элементы и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ обладает Σ^0_{n+3}-представлением ν, то существует n-лахлановское представление μ полурешетки $\mathscr{L}$ такое, что $\nu \le \mu$.

При $n = 0$ это утверждение совпадает с утверждением теоремы 1 из указанной работы. Далее в замечании 1 (из работы [2]) отмечено, что результат остается справедливым для произвольного $n \in \mathbb{N}$, причем в доказательстве необходимо сделать лишь одно незначительное изменение.

При рассмотрении m-степеней мы игнорируем m-степени множеств $\varnothing$, $\mathbb{N}$ и, таким образом, считаем, что в полурешетке $\mathscr{L}^m = \langle L^m, \le^{\mathscr{L}^m}; \vee^{\mathscr{L}^m}\rangle$ всех m-степеней содержится наименьший элемент $\perp_{\mathscr{L}^m}$, состоящий из вычислимых множеств. Для произвольного $U \subseteq \mathbb{N}$, не равного $\varnothing$ и $\mathbb{N}$, через $\deg_m(U)$ обозначим m-степень множества U, а через $\mathscr{L}^m_U = \left\langle L^m_U, \le^{\mathscr{L}^m_U}; \vee^{\mathscr{L}^m_U}\right\rangle$ — главный идеал в $\mathscr{L}^m$, порожденный элементом $\deg_m(U)$.

Если $X \subseteq \mathbb{N}$ и ε — отношение эквивалентности на $\mathbb{N}$, то пусть $[X]_\varepsilon$ обозначает множество $\{y \in \mathbb{N} : (\exists x \in X)(\langle x, y\rangle \in \varepsilon)\}$. Если X и ε вычислимо перечислимы, то множество $[X]_\varepsilon$ также вычислимо перечислимо. Скажем, что эквивалентность ε *согласована с* X, если $X = [X]_\varepsilon$.

Введем, следуя [1], Ψ-оператор. Для произвольного $U \subseteq \mathbb{N}$ и вычислимо перечислимого $X \subseteq \mathbb{N}$ пусть

1) если $X \cap U \ne \varnothing$ и $X \not\subseteq U$, то $\Psi(U \mid X) = \deg_m(f^{-1}(U))$, где f — всюду определенная вычислимая функция такая, что $\rho f = X$ (ясно, что $\Psi(U \mid X)$ не зависит от выбора f);

2) если $X \cap U = \varnothing$ или $X \subseteq U$, то $\Psi(U \mid X) = \perp_{\mathscr{L}^m}$.

Отметим без доказательства следующие свойства Ψ-оператора:

1) для $a \in L^m$ справедливо $a \le^{\mathscr{L}^m} \deg_m(U) \Leftrightarrow$ существует вычислимо перечислимое множество X такое, что $a = \Psi(U \mid X)$;

2) $\Psi(U \mid X_1 \cup X_2) = \Psi(U \mid X_1) \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi(U \mid X_2)$;

3) если $U_1 =^* U_2$ и $X_1 =^* X_2$, то $\Psi(U_1 \mid X_1) = \Psi(U_2 \mid X_2)$ (здесь и далее $=^*$ означает равенство по модулю конечных множеств);

4) если вычислимо перечислимая эквивалентность ε согласована с U, то $\Psi(U \mid X) = \Psi(U \mid [X]_\varepsilon)$;

5) если $X_2 \cap U \ne \varnothing$ и $X_2 \not\subseteq U$, то $\Psi(U \mid X_1) \le^{\mathscr{L}^m} \Psi(U \mid X_2)$ тогда и только тогда, когда существует частичная вычислимая функция θ такая, что $X_1 \subseteq \delta\theta$, $\theta(X_1) \subseteq X_2$ и $(\forall x \in X_1)(x \in U \leftrightarrow \theta(x) \in U)$.

Пусть $\mathscr{E}$ обозначает решетку всех вычислимо перечислимых множеств, а $\mathscr{E}^*$ — фактор-решетку решетки $\mathscr{E}$ по модулю конечных множеств. Из свойств 1–3 Ψ-оператора легко следует, что при каждом фиксированном $U \ne \varnothing, \mathbb{N}$ отображение $\lambda X \Psi(U \mid X)$ является эпиморфизмом решетки $\mathscr{E}^*$ (рассматриваемой как верхняя полурешетка) на полурешетку $\mathscr{L}^m_U$.

Пусть $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — универсальная вычислимая последовательность всех одноместных частичных вычислимых функций. Пусть для $i \in \mathbb{N}$ W_i обозначает вычислимо перечислимое множество с клиниевским номером i (т. е. $W_i = \delta\theta_i$), а $\{W_i^t\}_{t,i\in\mathbb{N}}$ — двойная сильно вычислимая последовательность конечных множеств такая, что $W_i^0 \subseteq W_i^1 \subseteq \dots$ и $W_i = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} W_i^t$ при всех $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $U \subseteq \mathbb{N}$ — произвольное Δ^0_{n+2}-множество, не равное $\varnothing$ и $\mathbb{N}$. Тогда $\mathscr{L}^m_U$ является дистрибутивной верхней полурешеткой с наибольшим и наименьшим элементами, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Доказательство. Наличие наименьшего элемента $\perp_{\mathscr{L}^m_U} = \perp_{\mathscr{L}^m}$ и наибольшего элемента $\top_{\mathscr{L}^m_U} = \deg_m(U)$ в полурешетке $\mathscr{L}^m_U$ очевидно. Дистрибутивность $\mathscr{L}^m_U$ напрямую следует из дистрибутивности $\mathscr{L}^m$, которая, в свою очередь, является хорошо известным в теории вычислимости фактом.

Пусть $\nu x = \Psi(U \mid W_x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Тогда согласно свойству 1 Ψ-оператора ν является нумерацией множества L^m_U. Пусть $m \in U$ и $k \in \mathbb{N} \setminus U$. По свойству 3 $\nu y = \Psi(U \mid W_y \cup \{m, k\})$ для всех $y \in \mathbb{N}$. По свойству 5 имеем

$$\nu x \leq^{\mathscr{L}^m_U} \nu y \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})(W_x \subseteq \delta\theta_i \,\&\, \theta_i(W_x) \subseteq W_y \cup \{m, k\} \,\&(\forall z \in W_x)(x \in U \leftrightarrow \theta_i(x) \in U)).$$

Отсюда по алгоритму Тарского — Куратовского получаем, что отношение «$\nu x \leq^{\mathscr{L}^m_U} \nu y$» принадлежит классу Σ^0_{n+3}. Наконец, существует вычислимая функция u такая, что $W_{u(x,y)} = W_x \cup W_y$ для всех $x, y \in \mathbb{N}$ и для нее в силу свойства 2 при любых $x, y \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\nu u(x, y) = \nu x \vee^{\mathscr{L}^m_U} \nu y$. Значит, ν является Σ^0_{n+3}-представлением полурешетки $\mathscr{L}^m_U$. $\square$

Справедлива также следующая

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{L}$ — дистрибутивная верхняя полурешетка с наименьшим и наибольшим элементами, имеющая Σ^0_{n+3}-представление. Тогда существует коиммунное либо вычислимое Σ^0_{n+1}-множество U такое, что $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}^m_U$.*

Доказательство этой теоремы будет дано в следующем параграфе.

Из теорем 1 и 2 немедленно вытекает характеризация типов изоморфизма главных идеалов полурешетки m-степеней, порожденных арифметическими множествами.

Следствие 1. *Для произвольных $n \in \mathbb{N}$ и верхней полурешетки $\mathscr{L}$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$\mathscr{L}$ является дистрибутивной верхней полурешеткой с наименьшим и наибольшим элементами, имеющей Σ^0_{n+3}-представление;*

2) *$\mathscr{L}$ изоморфна главному идеалу верхней полурешетки m-степеней, порожденному коиммунным либо вычислимым Σ^0_{n+1}-множеством;*

3) *$\mathscr{L}$ изоморфна главному идеалу верхней полурешетки m-степеней, порожденному иммунным либо вычислимым Π^0_{n+1}-множеством;*

4) *$\mathscr{L}$ изоморфна главному идеалу верхней полурешетки m-степеней, порожденному Δ^0_{n+2}-множеством.*

Доказательство. Импликации (4) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) составляют содержание теорем 1 и 2. Импликация (2) $\Rightarrow$ (4) следует из включения $\Sigma^0_{n+1} \subseteq \Delta^0_{n+2}$. Наконец, эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (3) вытекает из того, что соответствие, сопоставляющее каждому подмножеству $\mathbb{N}$ его дополнение, задает автоморфизм полурешетки $\mathscr{L}^m$. $\square$

§ 2. Доказательство теоремы 2

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и ν' — Σ^0_{n+3}-представление дистрибутивной полурешетки $\mathscr{L} = \langle L, \leq^{\mathscr{L}}; \vee^{\mathscr{L}} \rangle$ с наименьшим и наибольшим элементами. По упомянутому в предыдущем параграфе утверждению, доказанному в работе [2], существует нумерация $\nu \geq \nu'$ множества L, являющаяся n-лахлановским представлением полурешетки $\mathscr{L}$.

Теорема 1 из работы [3] эквивалентна следующему утверждению.

Каждая полурешетка, имеющая 0*-лахлановское представление, изоморфна полурешетке* $\mathscr{L}^m_U$ *для некоторого вычислимого или гиперпростого множества* U.

Таким образом, для $n = 0$ теорему 2 можно считать доказанной. В дальнейшем будем предполагать, что $n > 0$.

Зафиксируем последовательность $\{\mathscr{D}_i = \langle D_i, \leq_i \rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ конечных дистрибутивных предрешеток, для которой выполнены шесть свойств из определения n-лахлановского представления.

Мы будем использовать технику работы с башнями, изобретенную Лахланом в [1] и впоследствии усовершенствованную другими авторами в работах [10, 11]. Однако каркасы и башни будут строиться не сразу для последовательности предполурешеток $\{\mathscr{D}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, как это делалось в указанных работах, а для аппроксимирующих эту последовательность спектров, как в работе Ю. Л. Ершова [12]. Другими словами, мы собираемся «смешать» технику Лахлана с техникой Ершова, заимствуя элементы из обеих конструкций (Ершов работал не с башнями, а с эквивалентными им представлениями). Дадим необходимые определения.

Спектром будем называть конечную последовательность бинарных отношений $\mathfrak{S} = \left\langle \leq^{\mathfrak{S}}_0, \dots, \leq^{\mathfrak{S}}_k \right\rangle$ такую, что

1) для любого $i \leq k$ отношение $\leq^{\mathfrak{S}}_i$ — предпорядок на D_i, для которого $\mathscr{D}^{\mathfrak{S}}_i = \left\langle D_i, \leq^{\mathfrak{S}}_i \right\rangle$ — конечная дистрибутивная предрешетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом 1;

2) для произвольных $i < k$ и $x, y \in D_i$ из $x \leq^{\mathfrak{S}}_i y$ следует $x \leq^{\mathfrak{S}}_{i+1} y$, а определенное естественным образом отображение $\widetilde{\mathscr{D}}^{\mathfrak{S}}_i$ в $\widetilde{\mathscr{D}}^{\mathfrak{S}}_{i+1}$ сохраняет точные верхние грани.

Число k в этом определении мы называем *длиной* спектра $\mathfrak{S}$. Длина спектра $\mathfrak{S}$ обозначается через $\mathrm{lh}(\mathfrak{S})$. Будем говорить, что спектр $\mathfrak{S}$ является *началом* спектра $\mathfrak{S}'$, и писать $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$, если $\mathrm{lh}(\mathfrak{S}) \leq \mathrm{lh}(\mathfrak{S}')$ и $\leq^{\mathfrak{S}}_i$ совпадает с $\leq^{\mathfrak{S}'}_i$ для любого $i \leq \mathrm{lh}(\mathfrak{S})$. Если $\mathfrak{S}$ — спектр и $m \leq \mathrm{lh}(\mathfrak{S})$, то единственный спектр $\mathfrak{S}'$ длины m, для которого $\mathfrak{S}' \preccurlyeq \mathfrak{S}$, обозначим через $\mathfrak{S} \restriction m$.

Мы называем спектр $\mathfrak{S}$ *хорошим*, если для каждого $i \leq k$ отношение $\leq^{\mathfrak{S}}_i$ совпадает с отношением $\leq_i$. Для каждого натурального k существует ровно один хороший спектр длины k, который мы обозначаем через $\mathfrak{S}^k$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — произвольный спектр длины k и $A \subseteq D_i$ для $i \leq k$. Скажем, что A является *атомом спектра* $\mathfrak{S}$ *уровня* i, если в решетке $\widetilde{\mathscr{D}}^{\mathfrak{S}}_i$ выполняется следующее соотношение: $\inf\{[x] : x \in A\} \not\leq^{\mathfrak{S}}_i \sup\{[x] : x \notin A\}$. Другими словами, атомы уровня i — это главные верхние порядковые конусы в $\mathscr{D}^{\mathfrak{S}}_i$, порожденные элементами, которые отличны от $[0]$ и не разложимы в объединение двух строго меньших элементов.

Отметим следующие два свойства атомов (здесь, как и ранее, $\mathfrak{S}$ — произвольный спектр длины k, доказательства свойств см. в [1, 10, 11]):

1) при $i \leq k$ решетка $\widetilde{\mathscr{D}}_i^{\mathfrak{S}}$ изоморфна подрешетке в решетке всех подмножеств множества атомов спектра $\mathfrak{S}$ уровня i; изоморфизм задается правилом $[x]_{\mathscr{D}_i^{\mathfrak{S}}} \mapsto \{A$ — атом спектра $\mathfrak{S}$ уровня $i : x \in A\}$;

2) для произвольных $i < k$ и атома A спектра $\mathfrak{S}$ уровня $i+1$ существует единственное множество $\{A_1, \dots, A_m\}$ попарно не сравнимых по включению атомов спектра $\mathfrak{S}$ уровня i такое, что $A \cap D_i = A_1 \cup \dots \cup A_m$.

Для $k \in \mathbb{N}$ под *деревом высоты* k мы понимаем произвольное конечное дерево, в котором каждая максимальная ветвь имеет длину $k+1$ (и которое мы считаем растущим «вниз»). Другими словами, *деревом высоты* k называется конечное частично упорядоченное множество $\mathscr{M} = \langle M, \leq_{\mathscr{M}} \rangle$ с наибольшим элементом, в котором для каждого $a \in M$ множество $\{x \in M : a \leq_{\mathscr{M}} x\}$ линейно упорядочено и каждое максимальное по включению линейно упорядоченное подмножество состоит из $k+1$ элементов. Наибольший элемент дерева $\mathscr{M}$ мы называем *корнем* этого дерева и обозначаем через $r_{\mathscr{M}}$. Для $a \in M$ под *уровнем* элемента a понимается длина максимальной цепи, составленной из элементов, меньших, чем a. Уровень элемента a обозначается через $h_{\mathscr{M}}(a)$. Легко заметить, что высота дерева всегда совпадает с уровнем его корня и, более того, если $\mathscr{M}$ — дерево высоты k, то для произвольного $a \in M$ справедливо равенство $h_{\mathscr{M}}(a) = k + 1 - |\{x \in M : a \leq_{\mathscr{M}} x\}|$.

Каркасом высоты k мы называем произвольную тройку $\mathscr{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c \rangle$ такую, что

1) $\mathfrak{S}$ — спектр длины k;

2) $\mathscr{M} = \langle M, \leq_{\mathscr{M}} \rangle$ — дерево высоты k;

3) c — отображение из M в $\mathscr{P}(D_k)$ такое, что для любого $a \in M$ множество $c(a)$ является атомом спектра $\mathfrak{S}$ уровня $h_{\mathscr{M}}(a)$;

4) если для элемента $a \in M$ ненулевого уровня $\mathrm{Sc}(a)$ обозначает множество последователей элемента a (т. е. множество всех элементов уровня $h_{\mathscr{M}}(a) - 1$, меньших a), то $c(a) \cap D_{h_{\mathscr{M}}(a)-1} = \bigcup \{c(b) : b \in \mathrm{Sc}(a)\}$.

Будем говорить, что каркасы $\langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c \rangle$ и $\langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}', c' \rangle$ *изоморфны*, если $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'$ и существует изоморфизм f дерева $\mathscr{M}$ на дерево $\mathscr{M}'$ такой, что $c = c' \circ f$. Далее мы отождествляем изоморфные каркасы.

Если $\mathscr{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c \rangle$ — каркас, то $\mathfrak{S}$ мы называем *спектром каркаса* $\mathscr{F}$, а множество $c(r_{\mathscr{M}})$ — *атомом каркаса* $\mathscr{F}$. Из второго свойства атомов сразу следует, что если $\mathfrak{S}$ — спектр длины k и A — атом спектра $\mathfrak{S}$ уровня k, то существует единственный (с точностью до изоморфизма, что в дальнейшем не будет оговариваться) каркас высоты k с этими спектром и атомом.

Пусть $\mathscr{F}_1 = \langle \mathfrak{S}_1, \mathscr{M}_1, c_1 \rangle$ и $\mathscr{F}_2 = \langle \mathfrak{S}_2, \mathscr{M}_2, c_2 \rangle$ — каркасы, $a \in M_1$, $b \in M_2$, $k = h_{\mathscr{M}_1}(a) = h_{\mathscr{M}_2}(b)$ и $\mathfrak{S}_1 \upharpoonright k = \mathfrak{S}_2 \upharpoonright k$. Используя второе свойство атомов и индукцию по k, легко показать, что следующие утверждения равносильны:

1) $c_1(a) \subseteq c_2(b)$;

2) существует сохраняющее уровни элементов монотонное отображение f частично упорядоченного множества $\{x \in M_1 : x \leq_{\mathscr{M}_1} a\}$ в частично упорядоченное множество $\{x \in M_2 : x \leq_{\mathscr{M}_2} b\}$ такое, что $c_1(x) \subseteq c_2(f(x))$ для любого $x \leq_{\mathscr{M}_1} a$.

Множество всех отображений f со свойствами из п. 2 обозначим через $\Phi(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, a, b)$.

Под *башней высоты* k будем понимать четверку $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c, \varphi \rangle$, для которой

1) $\langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c\rangle$ — каркас высоты k;

2) φ — отображение, сопоставляющее элементам M непустые конечные подмножества натурального ряда;

3) если a и $\mathrm{Sc}(a)$ обозначают то же самое, что в п. 4 определения каркаса, то $\varphi(a) = \bigcup\{\varphi(b) : b \in \mathrm{Sc}(a)\}$ и $\varphi(b_1) \cap \varphi(b_2) = \varnothing$ для любых различных $b_1, b_2 \in \mathrm{Sc}(a)$.

Для башни $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c, \varphi\rangle$ каркас $\langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c\rangle$ будем называть *каркасом* этой башни, а множество $\varphi(r_{\mathscr{M}})$ — ее *основанием*, которое мы обозначаем через $\mathrm{base}(\mathscr{T})$. Ясно, что, имея произвольный каркас и любое достаточно большое конечное подмножество $\mathbb{N}$, можно построить башню на этом каркасе, взяв исходное множество в качестве основания.

Предположим, что $\mathscr{T}_1 = \langle \mathfrak{S}_1, \mathscr{M}_1, c_1, \varphi_1\rangle$ и $\mathscr{T}_2 = \langle \mathfrak{S}_2, \mathscr{M}_2, c_2, \varphi_2\rangle$ — башни с каркасами $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ соответственно, $a \in M_1$ и $b \in M_2$ — элементы одинакового уровня k, $\mathfrak{S}_1 \restriction k = \mathfrak{S}_2 \restriction k$, $c_1(a) \subseteq c_2(b)$ и $f \in \Phi(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, a, b)$. Определим отображение φ следующим образом: для каждого $y \in M_2$ пусть $\varphi(y) = \varphi_2(y) \cup \bigcup\{\varphi_1(x) : x \leq_{\mathscr{M}_1} a,\ f(x) \leq_{\mathscr{M}_2} y\}$. Легко проверить, что $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}_2, \mathscr{M}_2, c_2, \varphi\rangle$ — башня, каркас которой совпадает с каркасом башни $\mathscr{T}_2$, основание равно основанию башни $\mathscr{T}_2$ в объединении с $\varphi_1(a)$ и

1) для любого $x \in M_1$ уровня $\leq k$ либо $x \not\leq_{\mathscr{M}_1} a$ и $\varphi_1(x) \cap \mathrm{base}(\mathscr{T}) = \varnothing$, либо $x \leq_{\mathscr{M}_1} a$ и $\varphi_1(x) \subseteq \varphi(f(x))$;

2) для любого $y \in M_2$ выполнено $\varphi_2(y) \subseteq \varphi(y)$.

Будем говорить, что башня $\mathscr{T}$ получается *модификацией* башни $\mathscr{T}_2$ при помощи башни $\mathscr{T}_1$ и отображения f. Число k называется *уровнем модификации*. В дальнейшем при пошаговых построениях если башня модифицируется на каком-то шаге, то мы, допуская некоторую некорректность в терминологии, часто будем говорить о том, что было до и после модификации, как об одной и той же башне. Это не приведет к недоразумениям.

Опишем процесс построения башен. Перед каждым шагом конструкции будет построено конечное число башен, основания которых являются подмножествами некоторого начального отрезка натурального ряда. Этот отрезок состоит из чисел, успевших побывать в основаниях башен, построенных перед этим шагом, и чисел $0, 1$. Числа, принадлежащие этому отрезку, мы называем *использованными*, а остальные числа — *неиспользованными*. Каждый раз, когда будет строится новая башня, ее основанием будет служить достаточно большой начальный отрезок неиспользованных натуральных чисел. Числа 0 и 1 считаются использованным до начала конструкции, т. е. перед построением самой первой башни. По ходу конструкции кроме построения новых башен будем также преобразовывать и разрушать уже построенные башни.

Напомним, что мы рассматриваем каркасы с точностью до изоморфизма. В частности, для каждого натурального k существует лишь конечное число различных каркасов высоты k. Для каждого каркаса $\mathscr{F}$ пусть $\mathscr{T}_1^{\mathscr{F},t}, \ldots, \mathscr{T}_{s(\mathscr{F},t)}^{\mathscr{F},t}$ — все башни с каркасом $\mathscr{F}$, существующие перед шагом t и перечисленные в порядке их постройки. Будем считать, что множество всех пар вида $\langle \mathscr{F}, m\rangle$, где $\mathscr{F}$ — каркас, а m — натуральное число, эффективно упорядочено по типу ω (первый бесконечный кардинал). Можно считать, что если $m_1 < m_2$, то $\langle \mathscr{F}, m_1\rangle < \langle \mathscr{F}, m_2\rangle$ для всех каркасов $\mathscr{F}$. Пусть l — вычислимая функция большого размаха, т. е. вычислимая сюръекция $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$, у которой каждое натуральное число имеет бесконечно много прообразов. Дадим описание шага t конструкции.

Шаг t. Этот шаг состоит из двух этапов.

Этап I. Для $i = l(t)$ проверяем, существуют ли башни $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{m_1}^{\mathscr{F},t} = \langle \mathfrak{S}_1, \mathscr{M}_1, c_1, \varphi_1 \rangle$ и $\mathscr{S} = \mathscr{T}_{m_2}^{\mathscr{G},t} = \langle \mathfrak{S}_2, \mathscr{M}_2, c_2, \varphi_2 \rangle$ с каркасами $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ соответственно и элементы $a \in M_1$, $b \in M_2$ такие, что

1) высоты обоих башен не меньше чем i;
2) $\mathfrak{S}_1 \restriction i = \mathfrak{S}_2 \restriction i$;
3) $h_{\mathscr{M}_1}(a) = h_{\mathscr{M}_2}(b) = i$;
4) $c_1(a) \subseteq c_2(b)$;
5) башня $\mathscr{S}$ была построена раньше, чем башня $\mathscr{T}$, и $\langle \mathscr{G}, m_2 \rangle < \langle \mathscr{F}, m_1 \rangle$;
6) $\varphi_2(b) \cap W_i^t = \varnothing$ и $\varphi_1(a) \cap W_i^t \neq \varnothing$.

Если башен и элементов с нужными свойствами не найдется, то сразу переходим к следующему этапу. В противном случае выберем $\mathscr{S}$ наиболее ранней постройки, для этой $\mathscr{S}$ выберем (некоторым эффективным образом) башню $\mathscr{T}$, элементы a, b и функцию $f \in \Phi(\mathscr{F}, \mathscr{G}, a, b)$. Модифицируем башню $\mathscr{S}$ при помощи $\mathscr{T}$ и f, разрушаем башню $\mathscr{T}$ и переходим к следующему этапу.

Этап II. Ищем каркас $\mathscr{F}$ и $m > 0$ с наименьшим возможным значением $\langle \mathscr{F}, m \rangle$ такие, что число существующих к настоящему моменту башен, построенных на каркасе $\mathscr{F}$, меньше чем m и строим новую башню на каркасе $\mathscr{F}$, взяв в качестве основания достаточно большой начальный отрезок неиспользованных натуральных чисел. Переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Ясно, что она эффективна. Исследуем ее свойства.

Каждая построенная башня либо через некоторое время разрушается, либо не разрушается никогда, а может лишь преобразовываться на последующих шагах. В последнем случае мы называем башню *постоянной*. Каждая постоянная башня может быть преобразована лишь конечное число раз. Действительно, для башни $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c, \varphi \rangle$ количество элементов a множества M, для которых $\varphi(a) \cap W_{h_{\mathscr{M}}(a)}^t \neq \varnothing$, не уменьшается с ростом t и возрастает каждый раз, когда башня подвергается преобразованию. Скажем, что постоянная башня является *финальной* на шаге t, если она существует и не подвергается преобразованиям на шагах $\geq t$.

Лемма 1. *Для каждого каркаса $\mathscr{F}$ справедливо следующее утверждение: $\lim\limits_{t\to\infty} s(\mathscr{F}, t) = \infty$ и для любого $m > 0$ $\quad \mathscr{T}_m^{\mathscr{F},t}$ является одной и той же финальной башней почти на всех шагах t.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых каркаса $\mathscr{F}$ и $m > 0$ башни $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F},t}$ существуют и совпадают почти на всех шагах t.

Допустим, что это неверно. Пусть $\langle \mathscr{F}, m \rangle$ — наименьшая пара, для которой это не так. Пусть t_0 — настолько большой шаг, что для всех $\langle \mathscr{F}', m' \rangle < \langle \mathscr{F}, m \rangle$ таких, что $m' > 0$, башни $\mathscr{T}_{m'}^{\mathscr{F}',t}$ существуют, совпадают и являются финальными на всех шагах $t \geq t_0$. Если перед некоторым шагом $t \geq t_0$ башня $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F},t}$ не определена, то $s(\mathscr{F}, t) = m - 1$ и, как следует из описания этапов I и II, ни одна из башен с каркасом $\mathscr{F}$ не будет разрушаться и башня с каркасом $\mathscr{F}$ будет построена на шаге t, так что значение $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F},t}$ определено при всех $t > t_0$. В силу выбора пары $\langle \mathscr{F}, m \rangle$, шага t_0 и описания этапа I башня $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F},t_0+1}$ не разрушается и, значит, после конечного числа преобразований становится финальной. $\square$

Для каждых каркаса $\mathscr{F}$ и $m \in \mathbb{N}$ обозначим башню $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F},t}$, одну и ту же для всех достаточно больших t (в ее финальном варианте), через $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F}}$. Для каждого

$x > 1$ справедливо следующее утверждение: на некотором шаге x попадает в основание некоторой башни и через некоторое число шагов либо перестает лежать в основаниях башен, либо оказывается в основании некоторой финальной башни. Первое очевидно, поскольку на этапе II каждого шага строится некоторая башня. После того, как число попало в основание некоторой башни, оно становится использованным и, если перестает лежать в основаниях башен, уже не попадает туда снова. Наконец, если перед некоторым шагом t число x лежит в основании одной башни, а после шага t — в основании другой башни, то вторая башня была построена раньше первой, из чего следует, что количество подобных «переходов» для каждого x ограничено.

Любая финальная башня равна $\mathscr{T}_m^{\mathscr{F}}$ для некоторых каркаса $\mathscr{F}$ и натурального числа $m > 0$. Множество всех чисел, не лежащих в основаниях финальных башен, обозначим через D. Ясно, что D вычислимо перечислимо и $0, 1 \in D$. Так как $n > 0$, для каждого $x \notin D$ можно эффективно с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ вычислить каркас $\mathscr{F}$ и число m, такие что $x \in \mathrm{base}\big(\mathscr{T}_m^{\mathscr{F}}\big)$.

Пусть $\mathscr{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c\rangle$ — каркас высоты k и $A = c(r_{\mathscr{M}})$ — его атом. Скажем, что $\mathscr{F}$ является *плотным* каркасом, если существует бесконечно много финальных башен $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}', c', \varphi'\rangle$ высоты $\geq k$ таких, что $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ и для некоторого элемента $a \in M'$ уровня k справедливы равенство $A = c'(a)$ и неравенство $\varphi'(a) \cap W_k \neq \varnothing$. Скажем, что этот каркас является *насыщенным*, если для всех финальных башен $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}', c', \varphi'\rangle$ с $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ и всех $a \in M'$ уровня k, для которых $A \subseteq c'(a)$, справедливо $\varphi'(a) \cap W_k \neq \varnothing$.

Лемма 2. *Каркас является плотным тогда и только тогда, когда он является насыщенным.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Действительно, на каждом каркасе строится бесконечно много финальных башен, так что из насыщенности сразу следует плотность.

Покажем необходимость. Предположим, что $\mathscr{F} = \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c\rangle$ — плотный каркас высоты k. Пусть $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}', c', \varphi'\rangle$ — финальная башня такая, что $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ и $a \in M'$ — элемент уровня k, для которого $c(r_{\mathscr{M}}) = A \subseteq c'(a)$. Имеем $\mathscr{T} = \mathscr{T}_m^{\mathscr{G}}$ для некоторых каркаса $\mathscr{G}$ и числа $m > 0$. Пусть t_0 настолько велико, что для всех $\langle \mathscr{G}', m'\rangle \leq \langle \mathscr{G}, m\rangle$ справедливо $\mathscr{T}_{m'}^{\mathscr{G}', t_0} = \mathscr{T}_{m'}^{\mathscr{G}'}$, причем все эти башни к шагу t_0 уже стали финальными. В силу плотности существуют каркас $\mathscr{G}''$ и число $m'' > 0$ такие, что $\langle \mathscr{G}'', m''\rangle > \langle \mathscr{G}, m\rangle$ и для финальной башни $\mathscr{T}_{m''}^{\mathscr{G}''} = \langle \mathfrak{S}'', \mathscr{M}'', c'', \varphi''\rangle$, построенной после башни $\mathscr{T}_m^{\mathscr{G}}$, найдется элемент $b \in M''$ уровня k, для которого $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}''$, $c''(b) = A$ и $\varphi''(b) \cap W_k \neq \varnothing$. Пусть $t_1 \geq t_0$ настолько велико, что башня $\mathscr{T}_{m''}^{\mathscr{G}'', t_1} = \mathscr{T}_{m''}^{\mathscr{G}''}$ уже стала финальной к шагу t_1 и $\varphi''(b) \cap W_k^{t_1} \neq \varnothing$. Пусть, наконец, $t \geq t_1$ таково, что $k = l(t)$. По выбору t ни одна из башен $\mathscr{T}_{m'}^{\mathscr{G}', t}$ для $\langle \mathscr{G}', m'\rangle \leq \langle \mathscr{G}, m\rangle$ не будет модифицироваться на этапе I этого шага, а значит, $\varphi'(a) \cap W_k^t \neq \varnothing$. $\square$

Введем в рассмотрение ряд отношений эквивалентности и множеств. Пусть i — произвольное натуральное число, $\mathfrak{S}$ — спектр длины i и $d \in D_i$. Полагаем

$$\begin{aligned}\varepsilon = &\{\langle x, y\rangle : x, y \in D\} \cup \{\langle x, y\rangle : x, y \in \mathrm{base}(\mathscr{T}) \text{ для некоторой}\\ &\text{финальной башни } \mathscr{T}\},\\ \varepsilon_i = &\{\langle x, y\rangle : x, y \in D \vee x = y\} \cup \{\langle x, y\rangle : \text{существуют финальная}\\ &\text{башня } \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}, c, \varphi\rangle \text{ высоты } \geq i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{такие, что } x, y \in \varphi(a)\},\\
R^{\mathfrak{S},0}_{d,i} = &\bigcup\{x : \text{существует финальная башня } \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c, \varphi\rangle \text{ такая, что}\\
&d \in c(r_{\mathscr{M}}) \text{ и } x \in \varphi(r_{\mathscr{M}})\},\\
R^{\mathfrak{S},1}_{d,i} = &D \cup \bigcup\{x : \text{существуют финальная башня } \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}, c, \varphi\rangle \text{ высоты}\\
&> i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i \text{ такие, что } \mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}',\ d \in c(a) \text{ и}\\
&x \in \varphi(a)\}.
\end{aligned}
$$

Ясно, что $\varepsilon_i \subseteq \varepsilon$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Отметим также, что указанные множества и эквивалентности вычислимы с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ равномерно по всем параметрам.

Лемма 3. *Для любых $i \in \mathbb{N}$, спектра $\mathfrak{S}$ длины i и $d \in D_i$ отношение ε_i и множества $R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}$, $R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}$ вычислимо перечислимы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}^1_i$ — множество всех насыщенных каркасов высоты $\le i$, а $\mathfrak{F}^2_i$ — множество всех каркасов высоты $\le i$, не являющихся плотными. По лемме 2 каждый каркас высоты $\le i$ попадает ровно в одно из этих множеств.

Для каждого каркаса $\mathscr{F} = \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}', c'\rangle \in \mathfrak{F}^2_i$ высоты $k \le i$ найдется финальная башня $\mathscr{T}_{\mathscr{F}} = \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}', c', \varphi'\rangle$, построенная на этом каркасе, для которой $\varphi'(r_{\mathscr{M}'}) \cap W_k = \varnothing$. Пусть t_0 настолько велико, что к шагу t_0 башни $\mathscr{T}_{\mathscr{F}}$ для всех $\mathscr{F} \in \mathfrak{F}^2_i$ уже построены. Пусть $t_1 \ge t_0$ таково, что к шагу t_1 все башни, которые строились перед шагом t_0, либо разрушились, либо стали финальными.

Скажем, что для некоторой башни $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}'', \mathscr{M}'', c'', \varphi''\rangle$ и $t \in \mathbb{N}$ выполнено условие $C(\mathscr{T}, t)$, если для произвольных $k \le i$, $a \in M''$ уровня k и каркаса $\mathscr{F}$, имеющего спектр $\mathfrak{S}'' \restriction k$ и атом $c''(a)$, справедливо $\mathscr{F} \in \mathfrak{F}^1_i \Rightarrow \varphi''(a) \cap W^t_k \ne \varnothing$. Из определения насыщенности следует, что это условие выполняется для всех финальных башен при всех достаточно больших t.

Пусть D^t обозначает множество чисел, оказавшихся в D к шагу t. Введем в рассмотрение следующие множества:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^t_i = &\{\langle x, y\rangle : x, y \in D^t \vee x = y\} \cup \{\langle x, y\rangle : \text{к шагу } t \text{ существуют}\\
&\text{башня } \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}, c, \varphi\rangle \text{ высоты } \ge i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i\\
&\text{такие, что } x, y \in \varphi(a) \text{ и для всех башен } \mathscr{T}, \text{ построенных}\\
&\text{ранее, выполнено } C(\mathscr{T}, t)\},\\
R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} = &\bigcup\{x : \text{к шагу } t \text{ существует башня } \langle \mathfrak{S}, \mathscr{M}, c, \varphi\rangle \text{ такая, что}\\
&d \in c(r_{\mathscr{M}}),\ x \in \varphi(r_{\mathscr{M}}) \text{ и для всех башен } \mathscr{T}, \text{ построенных}\\
&\text{ранее, выполнено } C(\mathscr{T}, t)\},\\
R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} = &D^t \cup \bigcup\{x : \text{к шагу } t \text{ существуют башня } \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}, c, \varphi\rangle \text{ высоты}\\
&> i \text{ и элемент } a \in M \text{ уровня } i \text{ такие, что } \mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}',\ d \in c(a),\\
&x \in \varphi(a) \text{ и для всех башен } \mathscr{T}, \text{ построенных ранее, выполнено}\\
&C(\mathscr{T}, t)\}.
\end{aligned}
$$

Ясно, что введенные множества вычислимы равномерно по t. Так как условие C выполняется для всех финальных башен при всех достаточно больших t, то для любых $x, y \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \varepsilon^t_i \text{ почти для всех } t,$$

$$x \in R^{\mathfrak{S},0}_{d,i} \Leftrightarrow x \in R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} \text{ почти для всех } t,$$

$$x \in R^{\mathfrak{S},1}_{d,i} \Leftrightarrow x \in R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} \text{ почти для всех } t.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $\varepsilon^t_i \subseteq \varepsilon^{t+1}_i$, $R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} \subseteq R^{\mathfrak{S},0,t+1}_{d,i}$ и $R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} \subseteq R^{\mathfrak{S},1,t+1}_{d,i}$ при всех $t \geq t_1$.

Пусть $t \geq t_1$ и $\langle x, y\rangle \in \varepsilon^t_i$. Если $x, y \in D^t$ или $x = y$, то $\langle x, y\rangle \in \varepsilon^{t+1}_i$. В противном случае перед шагом t существует башня $\mathscr{T} = \langle \mathfrak{S}', \mathscr{M}, c, \varphi\rangle$ высоты $\geq i$ и элемент $a \in M$ уровня i такие, что $x, y \in \varphi(a)$ и для всех башен $\mathscr{T}'$, построенных раньше, чем $\mathscr{T}$, выполнено $C(\mathscr{T}', t)$. Если на шаге t башня $\mathscr{T}$ не разрушается, то $\langle x, y\rangle \in \varepsilon^{t+1}_i$. Предположим, что $\mathscr{T}$ разрушается на этом шаге. Тогда происходит модификация некоторой башни $\mathscr{S} = \langle \mathfrak{S}'', \mathscr{M}', c', \varphi'\rangle$, построенной раньше, чем $\mathscr{T}$. Пусть k — уровень этой модификации и $b' \in M'$, $a' \in M$ таковы, что $\mathscr{S}$ модифицируется при помощи $f \in \Phi(\mathscr{F}, \mathscr{G}, a', b')$, где $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — каркасы башен $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$ соответственно. Пусть $\mathscr{H}$ — каркас высоты k, построенный на спектре $\mathscr{S}'' \restriction k$ и атоме $\varphi'(b')$. Каркас $\mathscr{H}$ не может лежать в $\mathfrak{F}^1_i$, поскольку для башни $\mathscr{S}$ выполнено условие C. Каркас $\mathscr{H}$ также не может лежать в $\mathfrak{F}^2_i$ из-за выбора t_1, поскольку в противном случае вместо башни $\mathscr{S}$ модификации должна подвергаться башня $\mathscr{T}_{\mathscr{H}}$, построенная раньше, чем $\mathscr{S}$. Остается единственная возможность: $k > i$, т. е. модификация имеет уровень, больший, чем i. Но тогда либо $a \leq_{\mathscr{M}} a'$ и $x, y \in \varphi'(f(a))$, либо $a \not\leq_{\mathscr{M}} a'$ и $x, y \in D^{t+1}$. В обоих случаях $\langle x, y\rangle \in \varepsilon^{t+1}_i$.

Импликации $x \in R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i} \Rightarrow x \in R^{\mathfrak{S},0,t+1}_{d,i}$ и $x \in R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i} \Rightarrow x \in R^{\mathfrak{S},1,t+1}_{d,i}$ для произвольных $x \in \mathbb{N}$ и $t \geq t_1$ доказываются аналогично. Идея доказательства, как и в предыдущем случае, заключается в следующем: если x оказался в $R^{\mathfrak{S},0,t}_{d,i}$ или в $R^{\mathfrak{S},1,t}_{d,i}$ за счет того, что он попал в основание некоторой башни, то на шаге t эта башня может разрушиться лишь в результате модификации уровня, большего, чем i. $\square$

Переходим к определению коиммунного множества U, принадлежащего классу Σ^0_{n+1}. Нам понадобится следующая

Лемма 4. *Существует последовательность $\{V_{\mathfrak{S}} : \mathfrak{S}$ — спектр$\}$ подмножеств $\mathbb{N}$, перечислимых с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ равномерно по $\mathfrak{S}$ такая, что*

1) *для любого $\mathfrak{S}$ множество $V_{\mathfrak{S}}$ является начальным сегментом $\mathbb{N}$;*
2) *из $\mathfrak{S} \preccurlyeq \mathfrak{S}'$ следует $V_{\mathfrak{S}} \subseteq V_{\mathfrak{S}'}$;*
3) *спектр $\mathfrak{S}$ хороший $\Rightarrow$ множество $V_{\mathfrak{S}}$ конечно;*
4) *$\mathfrak{S}$ — плохой спектр $\Rightarrow V_{\mathfrak{S}'} = \mathbb{N}$ почти для всех $\mathfrak{S}' \succcurlyeq \mathfrak{S}$.*

Доказательство. Для произвольного $i \in \mathbb{N}$ и $P \subseteq D^2_i$ пусть $R(P, i)$ обозначает условие $(\forall \langle x, y\rangle \in P)(x \leq_i y)$, а $Q(P, i)$ — условие $(\forall \langle x, y\rangle \notin P)(x \not\leq_i y)$. Тогда R является Π^0_{n+2}-условием, а Q — Σ^0_{n+2}-условием на P и i.

Так как $R \in \Pi^0_{n+2}$, существует $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимая функция $h(P, i, t)$ такая, что $h(P, i, 0) \leq h(P, i, 1) \leq \ldots$ и $\lim\limits_{t\to\infty} h(P, i, t) = \infty \Leftrightarrow R(P, i)$. Поскольку $Q \in \Sigma^0_{n+2}$, существует Σ^0_{n+1}-предикат T такой, что для любых $i \in \mathbb{N}$ и $P \subseteq D^2_i$ множество $\{t : T(P, i, t)\}$ является начальным сегментом натурального ряда, равным $\mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда не выполнено $Q(P, i)$.

Пусть теперь $\mathfrak{S} = \left\langle \leq^{\mathfrak{S}}_0, \ldots, \leq^{\mathfrak{S}}_k \right\rangle$ — спектр длины k. Положим

$$V_{\mathfrak{S}} = \left\{t : (\exists i \leq k) T\left(\leq^{\mathfrak{S}}_i, i, t\right)\right\} \cup \left\{t : (\exists i \leq k)\left(h\left(\leq^{\mathfrak{S}}_i, i, t\right) \leq k\right)\right\}.$$

Легко проверить, что все требуемые свойства выполняются. $\square$

Зафиксируем $\mathbf{0}^{(n)}$-вычислимую функцию $p(\mathfrak{S},t)$ такую, что $p(\mathfrak{S},0)\le p(\mathfrak{S},1)\le\dots$ и $V_{\mathfrak{S}}=\{x:\exists t(x<p(\mathfrak{S},t))\}$. Для каждого каркаса $\mathscr{F}=\langle\mathfrak{S},\mathscr{M},c\rangle$ положим $p(\mathscr{F},t)$ равным $p(\mathfrak{S},t)$. Пусть, как и в § 1, $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — универсальная вычислимая последовательность всех частичных вычислимых функций. Дадим описание процесса, перечисляющего по шагам множество U. Его отличительной особенностью является то, что основание любой финальной башни либо вообще не содержит чисел из U, либо на некотором шаге перечисляется в U «целиком». По ходу конструкции на некоторые башни будут ставиться метки $[\mathscr{F}]$, где $\mathscr{F}$ — каркас. Некоторые метки мы в процессе построения будем исключать из рассмотрения, после чего они уже никуда не будут ставиться.

Шаг 0. Перечисляем в U все числа из D, кроме нуля. Переходим к следующему шагу.

Шаг $t+1$. Этот шаг состоит из двух этапов.

Этап I. Перечисляем в U все числа из $\operatorname{base}(\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m)$ для всех пар $\langle\mathscr{F},m\rangle$ таких, что $\mathscr{F}$ — каркас высоты $\le t$ и $m<p(\mathscr{F},t)$. Затем для каждого $i\le t$ если W^t_i не содержит чисел, уже перечисленных в U, и содержит число из основания некоторой финальной башни высоты $>i$, то перечисляем в U все числа из основания этой башни. Затем снимаем с башен, основания которых были перечислены в U, все метки. Наконец, выбираем наименьшую пару $\langle\mathscr{F},m\rangle$ такую, что на башне $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ не стоит никаких меток и ее основание еще не перечислено в U. Перечисляем $\operatorname{base}(\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m)$ в U и переходим к следующему этапу.

Этап II. Ищем каркас $\mathscr{F}$ с наименьшим возможным значением пары $\langle\mathscr{F},p(\mathscr{F},t)\rangle$, для которого метка $[\mathscr{F}]$ нигде не стоит и еще не исключена из рассмотрения. Пусть m — наименьшее число, для которого основание башни $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ еще не перечислено в U и i равно высоте $\mathscr{F}$. Проверяем, существуют ли числа $x\in\operatorname{base}(\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m)\cap\delta\theta_i$ такие, что $\theta_i(x)$ не лежит в основании башни с каркасом $\mathscr{F}$. Если таких чисел нет, то исключаем метку $[\mathscr{F}]$ из рассмотрения и переходим к следующему шагу. В противном случае выберем такой x. Если $\theta_i(x)=0$, то перечисляем основание башни $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ в U, исключаем метку $[\mathscr{F}]$ из рассмотрения и переходим к следующему шагу. Если $\theta_i(x)$ уже перечислено в U, то ставим на башню $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ метку $[\mathscr{F}]$ и переходим к следующему шагу. Если $\theta_i(x)\ne 0$ еще не перечислено в U, то, значит, $\theta_i(x)$ лежит в основании некоторой финальной башни $\mathscr{T}^{\mathscr{G}}_k$. Если на башне $\mathscr{T}^{\mathscr{G}}_k$ не стоит никаких меток, то перечисляем $\operatorname{base}(\mathscr{T}^{\mathscr{G}}_k)$ в U, ставим на башню $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ метку $[\mathscr{F}]$ и переходим к следующему шагу. Наконец, если на башне $\mathscr{T}^{\mathscr{G}}_k$ уже стоят другие метки, то действуем в зависимости от случая:

1) если $\langle\mathscr{F},p(\mathscr{F},t)\rangle<\langle\mathscr{G},p(\mathscr{G},t)\rangle$, то ставим на башню $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ метку $[\mathscr{F}]$, снимаем с башни $\mathscr{T}^{\mathscr{G}}_k$ все метки, перечисляем ее основание в U и переходим к следующему шагу;

2) если $\langle\mathscr{F},p(\mathscr{F},t)\rangle>\langle\mathscr{G},p(\mathscr{G},t)\rangle$, то ставим метку $[\mathscr{F}]$ на башню $\mathscr{T}^{\mathscr{G}}_k$, перечисляем основание башни $\mathscr{T}^{\mathscr{F}}_m$ в U и переходим к следующему шагу.

Описание конструкции закончено. Ясно, что она эффективна с оракулом $\mathbf{0}^{(n)}$ и, значит, $U\subseteq\Sigma^0_{n+1}$.

Перед каждым шагом каждая метка стоит не более чем на одной башне. Для каждого каркаса $\mathscr{F}$ перед каждым шагом метки стоят не более чем на одной башне с этим каркасом, причем одна из этих меток обязательно равна $[\mathscr{F}]$. Ставиться метка может только на башню, основание которой еще не перечислено в U к моменту ее выставления. До тех пор, пока метка стоит на башне, ее основание не может быть перечислено в U, а если оно перечисляется, то все метки с этой башни сразу снимаются. Кроме того, за счет последних действий первого этапа каждая башня рано или поздно либо окажется снабженной меткой, либо ее основание попадет в U. Значит, для каждого каркаса либо основания всех башен с этим каркасом перечисляются в U, либо существует единственная башня, для которой это не так.

По построению имеем $D \setminus \{0\} \subseteq U$ и основание любой финальной башни либо целиком лежит в U, либо не содержит чисел из U. Значит, эквивалентность ε и все эквивалентности ε_i для $i \in \mathbb{N}$ согласованы с $U \cup \{0\}$.

Будем говорить, что спектр $\mathfrak{S}$ является *квазихорошим*, если множество $V_{\mathfrak{S}}$ конечно. Легко видеть, что квазихорошие спектры образуют начальный сегмент в дереве всех спектров и единственная бесконечная ветвь в этом сегменте состоит из хороших спектров. Легко заметить, что за счет этапа I основания всех башен, спектр которых не является квазихорошим, попадают в U.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$, спектра $\mathfrak{S}$ длины i и $d \in D_i$ положим $R^{\mathfrak{S}}_{d,i} = R^{\mathfrak{S},0}_{d,i} \cup R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}$. Множество $R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}$ может содержать лишь конечное число элементов, не принадлежащих U, так что $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}\big) = \bot_{\mathscr{L}^m}$. Несложно также заметить, что $\big[R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}\big]_{\varepsilon_{i+1}} = R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+1} \cup \dots \cup R^{\mathfrak{S}_k}_{d,i+1}$, где $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_k$ — все спектры длины $i+1$, расширяющие $\mathfrak{S}$. Так как ε_{i+1} — согласованная с $U \cup \{0\}$ перечислимая эквивалентность, то $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}\big) = \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}\big) \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S},1}_{d,i}\big) = \bot_{\mathscr{L}^m} \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi\big(U \cup \{0\} \mid \big[R^{\mathfrak{S},0}_{d,i}\big]_{\varepsilon_{i+1}}\big) = \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+1} \cup \dots \cup R^{\mathfrak{S}_k}_{d,i+1}\big) = \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+1}\big) \vee^{\mathscr{L}^m} \dots \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}_k}_{d,i+1}\big)$. Итерируя это преобразование произвольное конечное число раз, убеждаемся, что $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}\big) = \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}_1}_{d,i+m}\big) \vee^{\mathscr{L}^m} \dots \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}_l}_{d,i+m}\big)$, где m — произвольное натуральное число, а $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_l$ — все спектры длины $i+m$, расширяющие $\mathfrak{S}$.

Если спектр $\mathfrak{S}$ не является квазихорошим, то $R^{\mathfrak{S}}_{d,i} \subseteq U \cup \{0\}$ и $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}\big) = \bot_{\mathscr{L}^m}$. А так как почти все спектры, расширяющие плохой спектр, не являются квазихорошими, из двух предыдущих равенств получаем, что $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}}_{d,i}\big) = \bot_{\mathscr{L}^m}$ для любого плохого спектра $\mathfrak{S}$.

Наконец, если $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^i$ — хороший спектр, то среди спектров длины $i+1$, расширяющих $\mathfrak{S}$, один равен $\mathfrak{S}^{i+1}$, а остальные плохие, так что $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}\big) = \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}^{i+1}}_{d,i+1}\big)$.

Определим отображение λ из $\mathscr{L}$ в $\mathscr{L}^m_U$, полагая $\lambda(x) = \Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}\big)$, где $x \in L$, $d \in \mathbb{N}$ таковы, что $x = \nu(d)$, и i выбрано так, что $d \in D_i$. Это отображение определено корректно и является гомоморфизмом полурешеток. Действительно, выше было показано, что $\Psi\big(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}\big)$ не зависит от выбора i. Если $\nu(d_1) = \nu(d_2)$, то можно выбрать i так, чтобы $d_1 \equiv_i d_2$; тогда каждый атом уровня i в любом хорошем спектре содержит d_1 тогда и только тогда, когда он содержит d_2 и $R^{\mathfrak{S}^i}_{d_1,i} = R^{\mathfrak{S}^i}_{d_2,i}$. Получаем, что значение $\lambda(x)$ не зависит от выбора d такого, что $x = \nu(d)$. Наконец, если $x_1 \vee^{\mathscr{L}} x_2 = x_3$, $x_1 = \nu(d_1)$, $x_2 = \nu(d_2)$, $x_3 = \nu(d_3)$ и $d_1, d_2, d_3 \in D_i$, то в решетке $\widetilde{\mathscr{D}}_i$ элемент $[d_3]$ равен объединению $[d_1]$ и $[d_2]$, каждый атом уровня i в любом хорошем спектре содержит d_3 тогда и только тогда, когда он содержит d_1 или d_2, $R^{\mathfrak{S}^i}_{d_3,i} = R^{\mathfrak{S}^i}_{d_1,i} \cup R^{\mathfrak{S}^i}_{d_2,i}$ и $\lambda(x_3) = \lambda(x_1) \vee^{\mathscr{L}^m} \lambda(x_2)$.

Лемма 5. *Отображение λ является изоморфным вложением.*

Доказательство. Сначала покажем, что для каждого каркаса $\mathscr{F}$ с квазихорошим спектром метка $[\mathscr{F}]$ на некотором шаге либо исключается из рассмотрения, либо становится постоянной, т. е. встает на некоторую башню и больше с нее не снимается.

Ясно, что спектр каркаса $\mathscr{F}$ квазихороший тогда и только тогда, когда $p(\mathscr{F}) = \lim_{t\to\infty} p(\mathscr{F}, t) < \infty$. Докажем наше утверждение индукцией по $\langle \mathscr{F}, p(\mathscr{F})\rangle$.

Пусть $\mathscr{F}$ — каркас с квазихорошим спектром высоты i и $\mathfrak{F} = \{\mathscr{F}' : p(\mathscr{F}) < \infty$ и $\langle \mathscr{F}', p(\mathscr{F}')\rangle < \langle \mathscr{F}, p(\mathscr{F})\rangle\}$. Предположим, что для любого $\mathscr{F}' \in \mathfrak{F}$ утверждение про метки справедливо. Пусть t_0 настолько велико, что к шагу $t_0 + 1$ все метки $[\mathscr{F}']$ для $\mathscr{F}' \in \mathfrak{F}$ либо были исключены из рассмотрения, либо стали постоянными. Пусть $t_1 \geq t_0$ настолько велико, что $p(\mathscr{F}') = p(\mathscr{F}', t_1)$ для всех $\mathscr{F}' \in \mathfrak{F} \cup \{\mathscr{F}\}$ и $\langle \mathscr{F}', p(\mathscr{F}', t_1)\rangle > \langle \mathscr{F}, p(\mathscr{F})\rangle$ для любого $\mathscr{F}' \notin \mathfrak{F} \cup \{\mathscr{F}\}$. Пусть i' равно максимальной высоте каркаса из $\mathfrak{F} \cup \{\mathscr{F}\}$. Пусть $t_2 \geq t_1$ таково, что для всех $j < i'$ либо $W_j \cap U = \varnothing$, либо $W_j^{t_2}$ содержит элементы, перечисленные в U к шагу $t_2 + 1$.

Предположим, что наше утверждение относительно метки $[\mathscr{F}]$ неверно. Тогда эта метка никогда не исключается из рассмотрения и существует бесконечно много таких $t \geq t_2$, что после этапа I шага $t + 1$ она нигде не стоит. Пусть t_3 — одно из таких t. Из описания этапа II и выбора t_1 видно, что на шаге $t_3 + 1$ эта метка либо исключится из рассмотрения, что невозможно, либо поставится на одну из башен $\mathscr{T}_m^{\mathscr{G}}$ для некоторого $\mathscr{G} \in \mathfrak{F} \cup \{\mathscr{F}\}$. Пусть $t > t_3$ таково, что на шаге $t + 1$ эта метка снова снимается. По выбору t_2 это не может произойти на первом этапе шага $t + 1$. Однако этого не может произойти и на этапе II этого шага, так как в противном случае должна ставиться метка $[\mathscr{G}]$ для $\mathscr{G} \in \mathfrak{F}$, что невозможно в силу выбора t_0.

Переходим к доказательству основного утверждения леммы. Необходимо показать, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ если $\nu(a) \not\leq^{\mathscr{L}} \nu(b)$, то $\lambda(\nu(a)) \not\leq^{\mathscr{L}_m} \lambda(\nu(b))$. Предположим, что первое верно, а второе нет. Пусть i таково, что $a, b \in D_i$. Так как $\lambda(\nu(a)) = \Psi\big(U \mid R_{a,i}^{\mathfrak{S}^i}\big)$ и $\lambda(\nu(b)) = \Psi\big(U \mid R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i}\big)$, то либо найдется j такое, что $\delta\theta_j = R_{a,i}^{\mathfrak{S}^i}$, $\rho\theta_j = R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i}$ и $x \in U \Leftrightarrow \theta_j(x) \in U$ для любого $x \in \delta\theta_j$, либо $R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i} \subseteq U$, либо $R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i} \cap U = \varnothing$.

Включение $R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i} \subseteq U$ невозможно, ибо $0 \in D \subseteq R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i}$ и $0 \notin U$. Равенство $R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i} \cap U = \varnothing$ также невозможно, поскольку $1 \in D \setminus \{0\} \subseteq R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i} \cap U$. Рассмотрим оставшийся случай. Так как каждая частичная вычислимая функция имеет бесконечно много номеров, можно считать, что $j \geq i$. Поскольку $\lambda(\nu(a)) \not\leq^{\mathscr{L}_m} \lambda(\nu(b))$, найдется каркас $\mathscr{F}$ высоты j со спектром $\mathfrak{S}^j$ такой, что a принадлежит, а b не принадлежит атому этого каркаса. Основание любой башни с каркасом $\mathscr{F}$ содержит числа из $R_{a,i}^{\mathfrak{S}^i}$ и не содержит чисел из $R_{b,i}^{\mathfrak{S}^i}$, так что метка $[\mathscr{F}]$ может быть исключена из рассмотрения, только если в основании некоторой финальной башни с каркасом $\mathscr{F}$ содержится $x \in U$ такой, что $\theta_i(x) = 0$. Однако это невозможно и, значит, эта метка на некотором шаге ставится и больше не снимается. Но тогда для некоторого x один из элементов множества $\{x, \theta_i(x)\}$ будет перечислен в U на этом шаге, а другой попадет в основание башни, на которую поставится постоянная метка, и никогда не перечислится в U; противоречие. $\square$

Лемма 6. *Отображение λ является изоморфизмом $\mathscr{L}$ на $\mathscr{L}_U^m$.*

Доказательство. Так как λ является изоморфным вложением, достаточно показать, что любой элемент $\mathscr{L}_U^m$ попадает в образ λ.

Пусть $u \in L^m_U$. Тогда $u = \Psi(U \mid W_i)$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_k$ — все плотные каркасы со спектром $\mathfrak{S}^i$ и $A_1, \dots, A_k$ — их атомы. Пусть d — элемент D_i, лежащий во всех атомах $A_1, \dots, A_k$ и не лежащий ни в одном другом атоме спектра $\mathfrak{S}^i$ уровня i. Такой элемент найдется по лемме 2, так как для любого атома A уровня i спектра $\mathfrak{S}^i$ такого, что $A \supseteq A_m$ для некоторого $m \in [1, k]$, каркас, построенный на этом атоме со спектром $\mathfrak{S}^i$, будет насыщенным и, значит, $A \in \{A_1, \dots, A_k\}$.

Покажем, что $\left[R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\right]_{\varepsilon_i} \cup D =^* R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Пусть $x \in R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Тогда либо $x \in D$, либо $x \in \varphi(a)$ для некоторой финальной башни $\mathscr{T} = \langle \mathscr{S}, \mathscr{M}, c, \varphi\rangle$ и некоторого $a \in M$ уровня i таких, что $\mathfrak{S}^i \preccurlyeq \mathfrak{S}$ и $d \in \varphi(a)$. Последнее означает, что атом $\varphi(a)$ принадлежит $\{A_1, \dots, A_k\}$. Значит, каркас со спектром $\mathfrak{S}^i$, построенный на атоме $\varphi(a)$, является насыщенным и $\varphi(a)$ содержит элемент y, принадлежащий W_i. Атом $\varphi(a)$ содержит также число 1, и, значит, $y \in R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i$. То, что $x, y \in \varphi(a)$, означает, что $\langle x, y\rangle \in \varepsilon_i$, так что имеем $x \in \left[R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\right]_{\varepsilon_i}$.

Пусть, наоборот, $x \in \left[R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\right]_{\varepsilon_i} \cup D$. Если $x \in D$, то $x \in R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Если же $x \notin D$, то найдутся финальная башня $\mathscr{T} = \langle \mathscr{S}, \mathscr{M}, c, \varphi\rangle$, для которой $\mathfrak{S}^i \preccurlyeq \mathfrak{S}$, и элемент $a \in M$ уровня i такие, что $x \in \varphi(a)$ и $\varphi(a) \cap W_i \neq \varnothing$. Если $\varphi(a) \in \{A_1, \dots, A_k\}$, то $d \in \varphi(a)$ и $x \in R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}$. Если же $d \notin \varphi(a)$, то каркас со спектром $\mathfrak{S}^i$, построенный на атоме $\varphi(a)$, не является плотным и существует лишь конечное число возможностей для x.

Имеем $\Psi\bigl(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}\bigr) = \Psi\bigl(U \mid \left[R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\right]_{\varepsilon_i} \cup D\bigr) = \Psi\bigl(U \cup \{0\} \mid \left[R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\right]_{\varepsilon_i}\bigr) \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi(U \mid D) = \Psi\bigl(U \cup \{0\} \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\bigr) \vee^{\mathscr{L}^m} \bot_{\mathscr{L}^m} = \Psi\bigl(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\bigr)$. Пусть X является объединением всех таких Y, что Y равно либо $R^{\mathfrak{S},0}_{1,m}$ для спектра $\mathfrak{S}$ длины $m < i$, либо $R^{\mathfrak{S}}_{1,i}$ для плохого спектра длины i. Для всех Y, из которых составлен X, справедливо $\Psi(U \mid Y) = \bot_{\mathscr{L}^m}$ и, значит, $\Psi(U \mid X) = \bot_{\mathscr{L}^m}$. Из равенства $\mathbb{N} = X \cup R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i}$ окончательно получаем $u = \Psi(U \mid W_i) = \Psi\bigl(U \mid (X \cap W_i) \cup \bigl(R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\bigr)\bigr) = \bot_{\mathscr{L}^m} \vee^{\mathscr{L}^m} \Psi\bigl(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{1,i} \cap W_i\bigr) = \Psi\bigl(U \mid R^{\mathfrak{S}^i}_{d,i}\bigr) = \lambda(\nu(d))$. □

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться, что U вычислимо или коиммунно. Это действительно так, поскольку любое бесконечное вычислимо перечислимое множество содержит элементы из U. Действительно, если W_i бесконечно, то оно содержит либо ненулевые элементы из D, либо числа из оснований финальных башен высоты $> i$, либо бесконечно много чисел, принадлежащих основаниям финальных башен высоты $\leq i$. В первом случае $W_i \cap U \neq \varnothing$, так как $D \subseteq U \cup \{0\}$, во втором случае $W_i \cap U \neq \varnothing$ из-за этапа I в конструкции, перечисляющей U, а в третьем случае $W_i \cap U \neq \varnothing$ из-за того, что лишь конечное число финальных башен высоты $\leq i$ содержат в своих основаниях числа не из U.

Теорема 2 доказана.

§ 3. Приложения к теории нумераций

Результаты, полученные в предыдущих параграфах, позволяют решить ряд открытых вопросов и усилить некоторые ранее полученные результаты, относящиеся к теории нумераций.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{F}$ — непустое семейство множеств, принадлежащих классу Σ^0_{n+1} арифметической иерархии, и ν — нумерация $\mathscr{F}$. Тогда ν называется Σ^0_{n+1}-*вычислимой*, если множество пар $\{\langle x, y\rangle : x \in \nu y\}$ принадлежит классу

Σ^0_{n+1}. Σ^0_{n+1}-вычислимые нумерации задают идеал в полурешетке всех нумераций семейства $\mathscr{F}$, который называется *полурешеткой Роджерса* этого семейства и обозначается через $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$.

При $n = 0$ понятие Σ^0_{n+1}-вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации. Исследование таких нумераций ведется с конца 60-х гг. прошлого века; им посвящено огромное множество работ, среди которых в первую очередь следует отметить монографию [9]. Для $n > 0$ исследование Σ^0_{n+1}-вычислимых нумераций началось во второй половине последнего десятилетия прошлого века. Среди работ, посвященных этим нумерациям, можно указать [3–6, 13, 14], а также множество других, не вошедших в библиографию данной статьи.

Одной из центральных задач теории нумераций, возникающих при исследовании *арифметических* (т. е. Σ^0_{n+1}-вычислимых для некоторого n) нумераций, является исследование алгебраических свойств полурешеток Роджерса, а именно: описание их типов изоморфизма в целом, типов изоморфизма главных идеалов и сегментов в этих полурешетках (так называемое *локальное описание*), различных элементов с особыми свойствами (минимальных, неразложимых, предельных и др.). Отдельные результаты в этом направлении уже были получены в указанных и других работах.

Чтобы усилить некоторые из этих результатов и получить новые, распространим оператор Ψ на нумерации (так же, как это делается в работах [3, 4, 11, 12, 14], в некоторых — с другими обозначениями). Пусть ν — произвольная нумерация произвольного множества S и X — произвольное непустое вычислимо перечислимое множество. Полагаем $\Psi(\nu \mid X)$ равным классу эквивалентности нумераций множества $\nu(X)$, содержащим нумерацию $\nu \circ f$, где f — всюду определенная вычислимая функция, область значений которой равна X. Несложно проверить, что это определение не зависит от выбора f и что для этого обозначения выполняются свойства, аналогичные свойствам Ψ-оператора для множеств, а именно:

1) для произвольной нумерации μ справедливо $\mu \le \nu \Leftrightarrow$ существует вычислимо перечислимое множество X такое, что $[\mu] = \Psi(\nu \mid X)$;

2) $\Psi(\nu \mid X_1 \cup X_2) = \Psi(\nu \mid X_1) \vee \Psi(\nu \mid X_2)$;

3) $\Psi(\nu \mid X_1) \le \Psi(\nu \mid X_2)$ тогда и только тогда, когда $\nu(X_1) \subseteq \nu(X_2)$ и существует частичная вычислимая функция θ такая, что $X_1 \subseteq \delta\theta$, $\theta(X_1) \subseteq X_2$ и $(\forall x \in X_1)(\nu x = \nu\theta(x))$.

Лемма 7. *Пусть $a, b \in \mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ для некоторых $n, \mathscr{F}$ и $a \le b$. Тогда сегмент $[a, b]$ в $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ является ограниченной дистрибутивной полурешеткой, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Доказательство. Ограниченность (т. е. существование наименьшего и наибольшего элементов) очевидна. Дистрибутивность следует из дистрибутивности полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$.

Пусть ν — нумерация такая, что $b = [\nu]$. Имеем $a = \Psi(\nu \mid X)$ для некоторого вычислимо перечислимого множества X. Пусть δ — нумерация такая, что $\delta e = \Psi(\nu \mid X \cup W_e)$. Из свойств Ψ-оператора очевидно, что δ — нумерация сегмента $[a, b]$ и что для вычислимой функции u такой, что $W_{u(d,e)} = W_d \cup W_e$, выполняется равенство $\delta u(d, e) = \delta d \vee \delta e$. Для доказательства того, что δ является Σ^0_{n+3}-представлением, осталось показать, что отношение «$\delta d \le \delta e$» принадлежит классу Σ^0_{n+3} арифметической иерархии. Имеем

$$\delta d \leq \delta e \Leftrightarrow (\exists i \in \mathbb{N})(X \cup W_d \subseteq \delta\theta_i \,\&\, \theta_i(X \cup W_d) \subseteq W_e \,\&(\forall z \in W_d)(\nu z = \nu\theta_i(z)).$$

Так как нумерация ν является Σ^0_{n+1}-вычислимой, отношение «$\nu z_1 = \nu z_2$» принадлежит классу Π^0_{n+2} и алгоритм Тарского — Куратовского немедленно дает нужный результат. $\square$

Следствие 2. *Если в полурешетке $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ существует наименьший элемент, то любой ее главный идеал является ограниченной дистрибутивной полурешеткой, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Следствие 3. *Если $\mathscr{F}$ — непустое конечное семейство Σ^0_{n+1}-множеств, то любой главный идеал полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ является ограниченной дистрибутивной полурешеткой, имеющей Σ^0_{n+3}-представление.*

Скажем, что полурешетка *тривиальна*, если она одноэлементна. Ясно, что если семейство $\mathscr{F}$ Σ^0_{n+1}-множеств одноэлементно, то полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ тривиальна. Для $n > 0$ это достаточное условие одновременно является и необходимым: известно, что если $n > 0$ и состоящее более чем из одного элемента семейство $\mathscr{F}$ имеет Σ^0_{n+1}-вычислимую нумерацию, то полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ бесконечна [4, 14]. Для $n = 0$ ситуация выглядит сложнее. Для конечного $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$ полурешетка $\mathscr{R}^0_1(\mathscr{F})$ тривиальна тогда и только тогда, когда все элементы $\mathscr{F}$ попарно не сравнимы по включению. Кроме того, известны примеры бесконечных $\mathscr{F}$, содержащих пару вложенных друг в друга множеств, с тривиальной полурешеткой $\mathscr{R}^0_1(\mathscr{F})$.

Под *типом локального изоморфизма* полурешетки будем понимать совокупность типов изоморфизма главных идеалов этой полурешетки. Скажем, что полурешетки *локально изоморфны*, если их типы локального изоморфизма совпадают. Если полурешетки изоморфны, то они локально изоморфны; обратное, очевидно, неверно.

Описание типов локального изоморфизма полурешеток $\mathscr{R}^0_1(\mathscr{F})$ для конечных $\mathscr{F}$ является известным в теории нумераций фактом. Этих типов всего два. Один состоит из единственной тривиальной полурешетки и имеет место в случае тривиальной $\mathscr{R}^0_1(\mathscr{F})$, т. е. когда $\mathscr{F}$ не содержит пары различных вложенных друг в друга множеств. Если же $\mathscr{F}$ содержит такую пару, то главные идеалы полурешетки $\mathscr{R}^0_1(\mathscr{F})$ — это в точности лахлановские полурешетки, т. е. полурешетки, имеющие 0-лахлановское представление; другими словами, все ограниченные дистрибутивные полурешетки, имеющие Σ^0_3-представление.

Ниже мы собираемся обобщить этот результат на случай произвольного n.

Лемма 8. *Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует ограниченная дистрибутивная полурешетка, имеющая Σ^0_{n+1}-представление, но не имеющая Σ^0_n-представления.*

Доказательство. В книге [15] утверждается (со ссылкой на работу Фейнера), что существует булева алгебра, имеющая Σ^0_1-представление, но не имеющая вычислимого представления. Эта алгебра не может иметь вычислимого представления и как верхняя полурешетка, поскольку в той же книге доказывается, что булева алгебра вычислима как алгебра тогда и только тогда, когда она вычислима как частичный порядок. Таким образом, при $n = 0$ справедливость утверждения леммы установлена. Релятивизация этого утверждения относительно $\mathbf{0}^{(n)}$ дает его справедливость при произвольном n. $\square$

Лемма 9. *Пусть полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ нетривиальна и $\mathscr{L}$ — произвольная ограниченная дистрибутивная полурешетка, имеющая Σ^0_{n+3}-преставление. Тогда в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ существует идеал, изоморфный:*

1) *$\mathscr{L}$, если $\mathscr{F}$ конечно;*

2) *$\mathscr{L}$ без наименьшего элемента, если $\mathscr{F}$ бесконечно.*

Доказательство. В работе [4] доказан следующий результат.

Если полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ нетривиальна, а множество U $\mathbf{0}^{(n+1)}$-вычислимо и иммунно, то в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ существует идеал, изоморфный $\mathscr{L}^m_U$ в случае конечного $\mathscr{F}$ и $\mathscr{L}^m_U$ без наименьшего элемента в случае бесконечного $\mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{L}$ — ограниченная дистрибутивная полурешетка с Σ^0_{n+3}-представлением. По следствию 1 существует иммунное или вычислимое Π^0_{n+1}-множество U такое, что $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}^m_U$. Если U вычислимо, то полурешетка $\mathscr{L}$ тривиальна, и утверждение леммы очевидно. Если же U иммунно, то достаточно заметить, что все множества из Π^0_{n+1} являются $\mathbf{0}^{(n+1)}$-вычислимыми, и сослаться на процитированный выше результат. □

Следствие 4. *Если полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ нетривиальна и $\mathscr{L}$ — произвольная ограниченная дистрибутивная полурешетка, имеющая Σ^0_{n+3}-преставление, то в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ существует идеал, изоморфный $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Если $\mathscr{F}$ конечно, то это утверждение леммы 9. Если же $\mathscr{F}$ бесконечно, то вместо $\mathscr{L}$ можно рассмотреть полурешетку, равную $\mathscr{L}$, с присоединенным к ней «внешним образом» наименьшим элементом и опять сослаться на лемму 9. □

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{F}$ — конечное семейство Σ^0_{n+2}-множеств. Тогда имеет место один из следующих трех случаев:*

1) *семейство $\mathscr{F}$ одноэлементно и полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ тривиальна;*

2) *$\mathscr{F}$ не одноэлементно, состоит из попарно не сравнимых по включению множеств и главные идеалы в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ — это в точности ограниченные дистрибутивные полурешетки, имеющие Σ^0_{n+3}-представление;*

3) *$\mathscr{F}$ содержит пару различных вложенных друг в друга множеств и главные идеалы в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ — это в точности ограниченные дистрибутивные полурешетки, имеющие Σ^0_{n+4}-представление.*

Доказательство. Если $\mathscr{F}$ одноэлементно, то, очевидно, выполнен первый случай.

Пусть $\mathscr{F}$ не одноэлементно и не содержит двух различных сравнимых по включению множеств. По лемме 9 каждая ограниченная дистрибутивная полурешетка, имеющая Σ^0_{n+3}-представление, изоморфна некоторому главному идеалу в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$. Покажем, что других идеалов нет. Пусть b — произвольный элемент $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ и a — наименьший элемент этой полурешетки. Идеал, порожденный b, совпадает с сегментом $[a, b]$. Далее действуем так же, как в лемме 7: вводим ν, X, δ и т. п. Единственное, в чем нужно дополнительно убедиться, — это то, что отношение «$\nu z_1 = \nu z_2$» принадлежит классу Π^0_{n+2} арифметической иерархии.

Так как элементы $\mathscr{F}$ попарно не сравнимы по включению, существует конечное семейство $\mathscr{S}$ конечных множеств такое, что для любого $F \in \mathscr{F}$ существует $S \in \mathscr{S}$ со свойством $S \subseteq F$ и, наоборот, для любого $S \in \mathscr{S}$ существует единственное $F \in \mathscr{F}$, для которого $S \subseteq F$. Значит,

$$\nu z_1 = \nu z_2 \Leftrightarrow (\forall S_1, S_2 \in \mathscr{S})(S_1 \subseteq \nu z_1 \,\&\, S_2 \subseteq \nu z_2 \rightarrow S_1 = S_2).$$

Применив к правой части алгоритм Тарского — Куратовского, немедленно получаем требуемое.

Рассмотрим последний случай. Пусть $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$ и $F_1 \subset F_2$. По следствию 3 каждый главный идеал в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$ является ограниченной дистрибутивной решеткой, имеющей Σ^0_{n+4}-представление. Необходимо доказать, что выполнено обратное, т. е. что каждая ограниченная дистрибутивная полурешетка с Σ^0_{n+4} -представлением изоморфна главному идеалу в U. Пусть $\mathscr{L}$ — такая полурешетка. По следствию 1 существует $U \in \Sigma^0_{n+2}$ такое, что $\mathscr{L} \cong \mathscr{L}^m_U$. Пусть ν — разрешимая нумерация $\mathscr{F}$, а μ — нумерация множества $\{F_1, F_2\}$ такая, что $\mu x = F_2 \Leftrightarrow x \in U$. Легко проверить, что $\nu \oplus \mu$ — Σ^0_{n+2}-вычислимая нумерация $\mathscr{F}$ и что главный идеал в $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{F})$, порожденный элементом $[\nu \oplus \mu]$, изоморфен $\mathscr{L}^m_U$. $\square$

Таким образом, описаны все типы локального изоморфизма полурешеток $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ для конечных $\mathscr{F}$. Как показывают лемма 8 и теорема 3, при $n > 0$ этих типов ровно три.

Кроме того, из теоремы 3 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдутся конечные семейства $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$, для которых полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{G})$ нетривиальны и локально изоморфны. Если же «разрыв между уровнями» больше 1, то, как показывает следующая теорема, ситуация совершенно иная не только для конечных, но и вообще для всех семейств.

Теорема 4. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$ таковы, что $n + 2 \leq m$. Если для некоторых семейств $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ локально изоморфны, то они тривиальны.*

Доказательство. По лемме 8 существует ограниченная дистрибутивная полурешетка, имеющая Σ^0_{n+4}-представление, но не имеющая Σ^0_{n+3}-преставления. Пусть полурешетка $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ нетривиальна. По следствию 4 в $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ существует главный идеал, изоморфный $\mathscr{L}$. Однако по лемме 7 полурешетка $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ не может содержать идеалов, изоморфных $\mathscr{L}$, так как каждый идеал с наименьшим элементом является также сегментом. Значит, если полурешетки локально изоморфны, то $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ тривиальна и, следовательно, $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ тоже тривиальна. $\square$

Следствие 5. *Если $n + 2 \leq m$ и полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$, $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ нетривиальны, то они не изоморфны.*

В [5] доказано, что для любых $\mathscr{F}$ и $m \geq n + 4$ существует $\mathscr{G}$ такое, что полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ не изоморфны. Затем в [6] было установлено, что если $m \geq n + 3$, то полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{R}^0_{m+1}(\mathscr{G})$ либо не изоморфны, либо тривиальны. Следствие 5 дает еще более сильный результат: по сравнению с [6] «разрыв между уровнями» сокращен с 3 до 2.

Вопрос о том, можно ли сократить этот «разрыв» с 2 до 1, т. е. обязаны ли быть неизоморфными нетривиальные полурешетки $\mathscr{R}^0_{n+1}(\mathscr{F})$ и $\mathscr{R}^0_{n+2}(\mathscr{G})$, остается открытым. Пока известно лишь то, что для конечных семейств и $n = 0$ ответ на него положителен. Как замечено после теоремы 3, даже если все такие полурешетки не изоморфны, установить это, исследуя только типы локального изоморфизма, не удастся.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lachlan A. H.* Recursively enumerable many-one degrees // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 3. С. 326–358.

2. *Подзоров С. Ю.* Нумерованные дистрибутивные полурешетки // Мат. труды. 2006. Т. 9, № 2. С. 109–132.

3. *Подзоров С. Ю.* О локальном строении полурешеток Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 2. С. 148–172.

4. *Подзоров С. Ю.* Начальные сегменты в полурешетках Роджерса Σ^0_n-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 2. С. 211–226.

5. *Badaev S. A., Goncharov S. S., Sorbi A.* Isomorphism types and theories of Rogers semilattices of arithmetical numberings // Computability and models. New York: Kluwer Plenum Publ., 2003. P. 79–91.

6. *Бадаев С. А., Гончаров С. С., Сорби А.* Типы изоморфизма полурешеток Роджерса семейств из различных уровней арифметической иерархии // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 6. С. 637–654.

7. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

8. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

9. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

10. *Денисов С. Д.* Строение верхней полурешетки рекурсивно перечислимых m-степеней и смежные вопросы. 1 // Алгебра и логика. 1978. Т. 17, № 6. С. 643–683.

11. *Подзоров С. Ю.* Универсальная лахлановская полурешетка без наибольшего элемента // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 3. С. 299–345.

12. *Ершов Ю. Л.* Полурешетки Роджерса конечных частично упорядоченных множеств // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 1. С. 44–84.

13. *Badaev S., Goncharov S., Sorbi A.* Completeness and universality of arithmetical numberings // Computability and Models. New York: Kluwer Plenum Publ., 2003. P. 11–44.

14. *Badaev S. A., Goncharov S. S., Podzorov S. Yu., Sorbi A.* Algebraic properties of Rogers semilattices of arithmetical numberings // Computability and Models. New York: Kluwer Plenum Publ., 2003. P. 45–78.

15. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

Статья поступила 3 октября 2007 г.

Подзоров Сергей Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
podz@math.nsc.ru