*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6*

*УДК 517.956.3*

# ПОВЫШЕНИЕ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

**Н. А. Люлько**

**Аннотация.** В полуполосе $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}$ рассматривается смешанная задача для линейной однородной гиперболической системы первого порядка с запаздыванием по $t$ в граничных условиях. Исследовано поведение преобразования Лапласа от решения данной задачи при больших значениях комплексного параметра. Найдены краевые условия, при которых имеет место повышение гладкости решений смешанной задачи с увеличением $t$.

**Ключевые слова:** гиперболическая система, смешанная задача, запаздывание.

## Введение

При математическом моделировании физических и химических процессов, связанных с явлениями массо- и теплопереноса, возникают смешанные задачи для гиперболических систем на плоскости. Корректность постановки краевых задач в различных пространствах для почти линейных гиперболических систем с распадающимися краевыми условиями подробно исследована в [1, 2]. Изучению качественных свойств решений таких задач (существование решений в целом по $t$, существование периодических решений, бифуркация решений, исследование распространения разрывов решений, устойчивость решений и др.) посвящена обширная литература, обзор которой можно найти в [3–5]. Исследуя свойство повышения гладкости решений, мы будем ограничиваться ссылками на наиболее близкие к изучаемой проблеме работы.

В [6] исследовано свойство повышения гладкости решений у смешанной задачи в полуполосе $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}$ для линейной однородной гиперболической системы первого порядка с распадающимися граничными условиями. В [7] показано, что это свойство присуще и неоднородным линейным задачам, а также некоторым нелинейным гиперболическим системам. Эти результаты позволили, в частности, выделить для волнового уравнения класс граничных условий, задаваемых на боковых сторонах $\Pi$, которые являются необходимыми и достаточными для того, чтобы любое решение однородного волнового уравнения с течением времени $t$ попало в класс $C^k[0,1]$, где $k$ — любое натуральное число [8].

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–08–00386), Президиума РАН (программа № 14, проект № 115), Сибирского отделения РАН (проекты 1.6, 42).

В [9] рассматривалась корректность постановки смешанной задачи для линейной гиперболической системы на плоскости с запаздыванием (сосредоточенным и распределенным) в граничных условиях. Такие задачи возникают при математическом моделировании противоточных химических реакторов с рециклом, когда некоторые вещества возвращаются частично после выхода из реактора опять на вход с запаздыванием по времени, необходимым для транспортировки. Коэффициенты пропорциональности обычно показывают, какая часть вещества возвращается. В случае отрицательности вещественных частей собственных чисел соответствующей спектральной задачи в [9] доказана равномерная по времени оценка, позволяющая обосновать принцип линеаризации для анализа устойчивости стационарных решений нелинейной задачи.

В настоящей работе для линейной однородной смешанной задачи с запаздыванием в граничных условиях выделен класс краевых условий, при которых имеет место повышение гладкости решений соответствующей задачи по любым гладким начальным данным.

Рассмотрим в полуполосе $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < 1,\ t > 0\}$ краевую задачу для гиперболической системы первого порядка:

$$U_t - L_{\mathscr{A}} U = 0, \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{\mathfrak{m}} (A_k U(0, t-\tau_k) + B_k U(1, t-\tau_k)) + \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}} \left( \int_0^{\tau_k} \sum_{r=0,1} \Phi_k^r(\xi) U(r, t-\xi)\, d\xi \right) = 0, \tag{2}$$

$$U(x,t)|_{\Gamma} = \overline{U}(x,t). \tag{3}$$

Здесь $U(x,t) = [u_1(x,t), \dots, u_{\mathfrak{n}}(x,t)]^T$ — $\mathfrak{n}$-мерный вектор неизвестных функций, $L_{\mathscr{A}} U = -\mathscr{K}(x) U_x + \mathscr{A}(x) U$, $\mathscr{A}(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,\mathfrak{n}}$, где $\mathscr{K}(x)$ — диагональная матрица с элементами $k_i(x) = \frac{1}{\Upsilon_i(x)}$ $(1 \le i \le \mathfrak{p})$, $k_i(x) = \frac{-1}{\Upsilon_i(x)}$ $(\mathfrak{p}+1 \le i \le \mathfrak{n})$. В дальнейшем положим

$$0 < \Upsilon_1(x) < \dots < \Upsilon_{\mathfrak{p}}(x), \quad 0 < \Upsilon_{\mathfrak{p}+1}(x) < \dots < \Upsilon_{\mathfrak{n}}(x), \tag{4}$$

где $\Upsilon_i(x)$ — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции, причем $1 \le \mathfrak{p} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \ge 2$.

В краевых условиях (2) моменты запаздывания $\tau_k$ — фиксированные вещественные числа: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{m} \ge 0$; $A_k$, $B_k$ — матрицы размера $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$, состоящие из вещественных чисел $(k = 0, 1, \dots, \mathfrak{m})$. Всюду далее предполагается, что матрицы $A_0$, $B_0$ имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} E^{\mathfrak{p},\mathfrak{p}} & A^{\mathfrak{p},\mathfrak{n}-\mathfrak{p}} \\ O^{\mathfrak{n}-\mathfrak{p},\mathfrak{p}} & A^{\mathfrak{n}-\mathfrak{p},\mathfrak{n}-\mathfrak{p}} \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} B^{\mathfrak{p},\mathfrak{p}} & O^{\mathfrak{p},\mathfrak{n}-\mathfrak{p}} \\ B^{\mathfrak{n}-\mathfrak{p},\mathfrak{p}} & E^{\mathfrak{n}-\mathfrak{p},\mathfrak{n}-\mathfrak{p}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $E^{k,k}$ — единичная матрица размера $k \times k$, $O^{l,k}$ — нулевая матрица размера $l \times k$; $A^{l,k}$, $B^{l,k}$ — матрицы размера $l \times k$; $l, k$ — натуральные числа. Элементами матриц $\Phi_k^r(\xi)$ являются гладкие на соответствующих отрезках $[0, \tau_k]$ функции $f_{kij}^r(\xi)$ $(i,j = 1, \dots, \mathfrak{n};\ r = 0,1,\ k = 1, \dots, \mathfrak{m})$.

Обратимся к начальным данным (3). Обозначим через $\tau^r$ максимальное из запаздываний $\tau_k$ $(0 \le k \le \mathfrak{m})$, встречающихся у функции $U(r,t)$ в краевых условиях (2). Определим множества $\Gamma^r = \{(x,t) : x = r, -\tau^r \le t \le 0\}$, $r = 0, 1$, и положим, что начальные данные $\overline{U}(x,t)$ заданы на множестве $\Gamma = \{(x,t) : 0 \le x \le 1,\ t = 0\} \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^1$.

Здесь и далее принадлежность функции $\overline{U}(x,t)$ пространству $C^1(\Gamma)$ будем понимать в следующем смысле: $\overline{U}(x,0)\in C^1[0,1]$, $\overline{U}(r,t)\in C^1(\Gamma^r)$, $r=0,1$. Под нормой $\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)}$ понимаем $\max\limits_{r=0,1}(\|\overline{U}(x,0)\|_{C^1[0,1]},\|\overline{U}(r,t)\|_{C^1(\Gamma^r)})$, где норма вектор-функции равна наибольшей из норм ее компонент. Пространство $L_2(\Gamma)$ и норма в нем вводятся аналогично, т. е. $\overline{U}(x,t)\in L_2(\Gamma)\Leftrightarrow \overline{U}(x,0)\in L_2[0,1]$, $\overline{U}(r,t)\in L_2(\Gamma^r)$, $r=0,1$, и

$$\|\overline{U}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}=\max_{r=0,1}(\|\overline{U}(x,0)\|_{L_2[0,1]},\|\overline{U}(r,t)\|_{L_2(\Gamma^r)}).$$

Модулем матрицы будем считать максимум модулей ее элементов. Буквами $A$, $K$ будем обозначать константы, не зависящие от $t,\overline{U}(x,t)$, а зависящие только от коэффициентов системы (1), (2).

Для формулировки теоремы существования классического решения рассматриваемой задачи определим понятие условий согласования начальных данных [9]. Будем говорить, что *начальные данные* $\overline{U}(x,t)$ *удовлетворяют условиям согласования нулевого порядка*, если выполнены соотношения

$$(S_0)=\begin{cases}\text{(i) } \overline{U}(x,t) \text{ — непрерывная на множестве } \Gamma \text{ функция;}\\ \text{(ii) } A_0\overline{U}(0,0)+B_0\overline{U}(1,0)+\sum\limits_{k=1}^{m}\Bigg(A_k\overline{U}(0,-\tau_k)+B_k\overline{U}(1,-\tau_k)\\ \qquad\qquad +\sum\limits_{r=0,1}\int\limits_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)\overline{U}(r,-\xi)\,d\xi\Bigg)=0,\end{cases}$$

и будем говорить, что они *удовлетворяют условиям согласования первого порядка*, если выполнены следующие соотношения:

$$(S_1)=\begin{cases}\text{(i) } A_0U_1(0)+B_0U_1(1)+\sum\limits_{k=1}^{m}\Bigg(A_k\overline{U}_t(0,-\tau_k)+B_k\overline{U}_t(1,-\tau_k)\\ \qquad\qquad +\sum\limits_{r=0,1}\int\limits_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)\overline{U}_t(r,-\xi)\,d\xi\Bigg)=0,\\ \qquad\qquad \text{где } U_1(x)=-\mathscr{K}(x)\frac{d\overline{U}}{dx}(x,0)+\mathscr{A}(x)\overline{U}(x,0);\\ \text{(ii) } \lim\limits_{t\to 0-}\frac{d\overline{U}}{dt}(r,t)=U_1(r)\quad (r=0,1).\end{cases}$$

В [9] показано, что имеет место

**Теорема 1.** *Пусть* $K(x),A(x)\in C^1[0,1]$, $\Phi_k^r(\xi)\in C[0,\tau_k]$ $(k=1,\dots,\mathfrak{m}$; $r=0,1)$, *а функция* $\overline{U}(x,t)$ *принадлежит пространству* $C^1(\Gamma)$ *и удовлетворяет условиям согласования нулевого и первого порядков. Тогда в полуполосе* $\Pi$ *существует единственное непрерывно дифференцируемое решение* $U(x,t)$ *задачи* (1)–(3)*; при* $t>0$ *оно удовлетворяет оценке*

$$\|U(x,t)\|_{C^1[0,1]}\le Ke^{At}\|\overline{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)}. \tag{6}$$

Заметим, что выполнение условий согласования является и необходимым условием существования в $\Pi$ гладкого решения исходной задачи.

Определение 1. Будем говорить, что задача (1)–(3) обладает свойством *повышения гладкости решений до порядка* $k$, если существует число $T(k)>0$ такое, что каждое решение рассматриваемой задачи при $t>T(k)$ будет $k$ раз непрерывно дифференцируемым и будет удовлетворять оценке

$$\left\|D_{x,t}^{\alpha,\beta}U(x,t)\right\|_{C[0,1]}\le K(t)\|\overline{U}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)},$$

где $\alpha+\beta \le k$, константа $K(t)$ не зависит от начальных данных, а зависит лишь от $t$ и коэффициентов системы.

Рассмотрим диагональную матрицу

$$\mathcal{T}(x,\lambda) = (e^{\lambda \mathcal{T}_j(x)+\mathscr{B}_j(x)}\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,\mathfrak{n}}, \tag{7}$$

где $\mathcal{T}_j(x) = \int\limits_0^x \frac{-1}{k_j(\xi)}\,d\xi$, $\mathscr{B}_j(x) = \int\limits_0^x \frac{a_{jj}(\xi)}{k_j(\xi)}\,d\xi$, $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $\lambda$ — комплексный параметр, и обозначим

$$X_0(\lambda) = A_0 + \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}} e^{-\lambda\tau_k}A_k + \left(B_0 + \sum_{k=1}^{\mathfrak{m}} e^{-\lambda\tau_k}B_k\right)\mathcal{T}(1,\lambda).$$

Имеем

$$\det X_0(\lambda) = e^{\lambda \sum\limits_{i=\mathfrak{p}+1}^{\mathfrak{n}} \mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=\mathfrak{p}+1}^{\mathfrak{n}} \mathscr{B}_i}\Delta(\lambda),$$

где

$$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}_i(1),\ \mathscr{B}_i = \mathscr{B}_i(1),\ i=1,\dots,\mathfrak{n}, \quad \Delta(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{M} E_k e^{-\lambda\beta_k}. \tag{8}$$

Здесь $E_k$ — вещественные числа, определяемые через элементы матриц $A_l$, $B_l$ и числа $\mathscr{B}_i$, числа $0<\beta_1<\dots<\beta_M$ определяются через моменты сосредоточенного запаздывания $\tau_l$ и числа $\mathcal{T}_i$ ($i=1,\dots,\mathfrak{n}$; $l=0,\dots,\mathfrak{m}$).

Определение 2. Краевые условия (2) для задачи (1)–(3) называются $P$-*регулярными*, если в (8) $E_k = 0$ ($k=1,\dots,M$), т. е. $\Delta(\lambda)\equiv 1$.

В настоящей работе будет доказана

**Теорема 2.** *Пусть* $0=\tau_0<\tau_1<\dots<\tau_{\mathfrak{m}}$ *— произвольный фиксированный набор вещественных чисел и краевые условия* (2) *для задачи* (1)–(3) $P$*-регулярны. Если* $A(x), K(x) \in C^{\mathbf{k}+2}[0,1]$, *то рассматриваемая задача обладает свойством повышения гладкости классических решений до порядка* $\mathbf{k}$ *для любых начальных данных* $\overline{U}(x,t) \in C^1(\Gamma)$ *и любых функций* $\Phi_k^r(\xi) \in C^1[0,\tau_k]$ ($r=0,1,\ k=1,\dots,\mathfrak{m}$), *задающих распределенное запаздывание;* $\mathbf{k}\ge 0$.

Доказательство теоремы основано на исследовании при $|\lambda|\to\infty$ асимптотических свойств функции $\widetilde{U}(x,\lambda)$, являющейся преобразованием Лапласа решения исходной задачи. Такой подход к исследованию свойств решений краевых задач с распадающимися граничными условиями использовался ранее в [2, 6, 10]. При выполнении условий теоремы 2 получено следующее представление:

$$\widetilde{U}(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\mathbf{k}+1} \frac{\widetilde{U}_n(x,\lambda)}{\lambda^n} + \frac{\widetilde{U}_{\mathbf{k}+2}(x,\lambda)}{\lambda^{\mathbf{k}+2}}. \tag{9}$$

Обратное преобразование Лапласа от последнего слагаемого является $\mathbf{k}$ раз непрерывно дифференцируемой по $t$ функцией при $t\ge 0$. В случае $P$-регулярных условий доказывается существование числа $T(\mathbf{k})\ge 0$ такого, что обратное преобразование Лапласа от первого слагаемого (от всей суммы) при $t \ge T(\mathbf{k})$ есть бесконечно дифференцируемая функция по $t$. Так как обратное преобразование Лапласа от функции $\widetilde{U}(x,\lambda)$ есть решение $U(x,t)$ исходной задачи, которое в полуполосе $\Pi$ удовлетворяет дифференциальной системе (1), мы и получаем, что $U(x,t)$ при $t\ge T(\mathbf{k})$ является $\mathbf{k}$ раз непрерывно дифференцируемой функцией.

Замечание 1. Теорема 2 сформулирована для классических решений, для существования которых необходимо, чтобы $\overline{U}(x,t)$ удовлетворяла условиям $(S_0)$, $(S_1)$. Но теорема остается верной и для кусочно гладких решений рассматриваемой задачи, возникающих в случае отсутствия условий согласования у начальных данных. При доказательстве теоремы исследовалось обратное преобразование Лапласа от функции $\widetilde{U}(x,\lambda)$, которое при выполнении условий согласования представляет собой классическое решение, а в случае их отсутствия — кусочно гладкое решение рассматриваемой задачи. При этом разложение (9) построено только в предположении, что $\overline{U}(x,t) \in C^1(\Gamma)$, $\Phi_k^r(\xi) \in C^1[0,\tau_k]$, и эти функции не обязаны удовлетворять условиям $(S_0)$, $(S_1)$. Четкое математическое обоснование такого подхода к кусочно гладкому решению изложено в [6] для системы (1) с распадающимися краевыми условиями.

## Исследование краевой задачи с параметром

Рассмотрим в полуполосе $\Pi$ смешанную задачу (1)–(3). Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения $U(x,t)$ этой задачи справедлива оценка (6), позволяющая применить к системе (1), (2) преобразование Лапласа по $t$. Получаем в результате следующую краевую задачу:

$$\lambda\widetilde{U} = L_{\mathscr{A}}\widetilde{U} + U_0(x), \quad I_0\widetilde{U}(0,\lambda) + I_1\widetilde{U}(1,\lambda) + R(\lambda) = 0, \tag{10}$$

где $\widetilde{U}(x,\lambda) = \int\limits_0^\infty U(x,t)e^{-\lambda t}\,dt$, $\operatorname{Re}\lambda > A$ (константа $A$ определена в (6)); $U_0(x) = \overline{U}(x,0)$. Здесь

$$I_0 = A_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{m}}\bigl(e^{-\lambda\tau_k}A_k + \widetilde{F}_k^0(\lambda)\bigr), \quad I_1 = B_0 + \sum_{k=1}^{\mathbf{m}}\bigl(e^{-\lambda\tau_k}B_k + \widetilde{F}_k^1(\lambda)\bigr),$$

$$R(\lambda) = \sum_{k=1}^{\mathbf{m}}\bigl(\widetilde{\Phi}_k^0(\lambda) + \widetilde{\Phi}_k^1(\lambda) + e^{-\lambda\tau_k}\bigl(A_k\widetilde{U}_k^0(\lambda) + B_k\widetilde{U}_k^1(\lambda)\bigr)\bigr), \tag{11}$$

где $\widetilde{U}_k^r(\lambda)$, $\widetilde{F}_k^r(\lambda)$, $\widetilde{\Phi}_k^r(\lambda)$ — целые по $\lambda$ функции:

$$\begin{gathered}\widetilde{F}_k^r(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi, \quad \widetilde{U}_k^r(\lambda) = \int\limits_{-\tau_k}^0 \overline{U}(r,\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi, \\ \widetilde{\Phi}_k^r(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)e^{-\lambda\xi}\int\limits_{-\xi}^0 \overline{U}(r,t)e^{-\lambda t}\,dtd\xi.\end{gathered} \tag{12}$$

Назовем $\lambda$ *собственным числом задачи* (10), если однородное уравнение $\lambda Y = L_{\mathscr{A}}Y$, $I_0Y(0,\lambda) + I_1Y(1,\lambda) = 0$, имеет нетривиальное решение на отрезке $[0,1]$. Обозначим через $\Lambda(L_{\mathscr{A}})$ множество собственных чисел задачи (10) и введем в рассмотрение $V(x,\lambda)$ — фундаментальную матрицу решений уравнения $L_{\mathscr{A}}Y = \lambda Y$. Очевидно, $\lambda \in \Lambda(L_{\mathscr{A}}) \Leftrightarrow \det X(\lambda) = 0$, где

$$X(\lambda) = I_0V(0,\lambda) + I_1V(1,\lambda). \tag{13}$$

В [9] показано, что множество $\Lambda(L_{\mathscr{A}})$ находится левее некоторой прямой, параллельной мнимой оси, поэтому введем число $\kappa_{\mathscr{A}} = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda(L_{\mathscr{A}})}\operatorname{Re}\lambda$. Там же доказано, что если $U_0(x) \in C[0,1]$ и $\lambda \notin \Lambda(L_{\mathscr{A}})$, то существует единственное решение $\widetilde{U}(x,\lambda) \in C^1[0,1]$ задачи (10), причем $\widetilde{U} = \widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2$, где

$$\widetilde{U}_1(x,\lambda) = -V(x,\lambda)X^{-1}(\lambda)R(\lambda), \quad \widetilde{U}_2(x,\lambda) = -\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)U_0(\xi)\,d\xi. \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{U}_1$ — решение задачи $\lambda Y = L_{\mathscr{A}}Y$, $I_0Y(0,\lambda) + I_1Y(1,\lambda) + R(\lambda) = 0$, а $\widetilde{U}_2$ — решение задачи

$$\lambda Y = L_{\mathscr{A}}Y + U_0(x), \quad I_0Y(0,\lambda) + I_1Y(1,\lambda) = 0 \tag{15}$$

и $G(x,\xi,\lambda)$ — функция Грина последней задачи.

Для доказательства теоремы о повышении гладкости необходимо исследовать асимптотические при $|\lambda| \to \infty$ свойства функций $\widetilde{U}_i(x,\lambda)$, $i = 1,2$. В дальнейшем при $\operatorname{Re}\lambda > \kappa_{\mathscr{A}}$ представим их в виде сумм

$$\widetilde{U}_i(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\widetilde{U}_{in}(x,\lambda)}{\lambda^n} + \frac{\widetilde{U}_{i,k+1}(x,\lambda)}{\lambda^{k+1}},$$

где $k$ — произвольное натуральное число. В [9] такое представление при $k = 1$ построено, но для наших целей этого недостаточно, тем не менее мы будем пользоваться результатами и обозначениями из этой работы. Для получения таких разложений проведем некоторые вспомогательные построения, касающиеся исследования $G(x,\xi,\lambda)$ и поведения $\det X(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$.

Пусть $\mathscr{A}(x), \mathscr{K}(x) \in C^{k+1}[0,1]$, $k \ge 0$, тогда [11] матрицу $V(x,\lambda)$ можно выбрать так, что в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ при $|\lambda| > N$ (здесь и далее $N$ будет обозначать достаточно большое положительное число) справедливо представление

$$V(x,\lambda) = P(x,\lambda)\mathcal{T}(x,\lambda), \quad P(x,\lambda) = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{\lambda} + \dots + \frac{P_k(x)}{\lambda^k} + \frac{P_{k+1}(x,\lambda)}{\lambda^{k+1}}, \tag{16}$$

где матрица $\mathcal{T}(x,\lambda)$ определена в (7). Здесь $P_0(x)$ — единичная матрица $I$, матрицы $P_m(x)$ $(m = 1,2,\dots,k)$ принадлежат $C^{k+2-m}[0,1]$, матрица $P_{k+1}(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируема по $x \in [0,1]$, аналитична по $\lambda$ в областях $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ при $|\lambda| > N$ и для рассматриваемых значений $x$, $\lambda$ справедливо неравенство $|P_{k+1}(x,\lambda)| \le K$, где константа $K$ зависит от $\max\limits_{i,j}\big(\|a_{ij}(x)\|_{C^{k+1}[0,1]}$, $\|k_i(x)\|_{C^{k+1}[0,1]}, \big\|\frac{1}{k_i(x)}\big\|_{C^{k+1}[0,1]}\big)$. Для матрицы $V^{-1}(\xi,\lambda)$ в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ при $|\lambda| > N$ имеет место представление

$$V^{-1}(\xi,\lambda) = \mathcal{T}^{-1}(\xi,\lambda)R(\xi,\lambda), R(\xi,\lambda) = R_0(\xi) + \frac{R_1(\xi)}{\lambda} + \dots + \frac{R_k(\xi)}{\lambda^k} + \frac{R_{k+1}(\xi,\lambda)}{\lambda^{k+1}}, \tag{17}$$

где $R_0(\xi) = I$, а свойства матриц $R_i(\xi)$, $R_{k+1}(\xi,\lambda)$ по переменным $\xi$, $\lambda$ аналогичны свойствам соответствующих матриц $P_i(x)$, $P_{k+1}(x,\lambda)$ по переменным $x,\lambda$.

При построении функции Грина $G(x,\xi,\lambda)$ задачи (15) используем методику, применяемую в [6] и опирающуюся на результаты работ [10–12]. Справедливо [6] представление

$$G(x,\xi,\lambda) = G_1(x,\xi,\lambda) + G_2(x,\xi,\lambda), \tag{18}$$

$$G_1(x,\xi,\lambda) = -V(x,\lambda)Q(x,\xi)V^{-1}(\xi,\lambda)\mathscr{K}^{-1}(\xi), \tag{19}$$

$$G_2(x,\xi,\lambda) = -V(x,\lambda)H(\lambda)V^{-1}(\xi,\lambda)\mathscr{K}^{-1}(\xi), \tag{20}$$

$$H(\lambda) = X^{-1}(\lambda)(I_0V(0,\lambda)I^{**} - I_1V(1,\lambda)I^*), \quad Q(x,\xi) = \begin{cases} -I^{**} & \text{при } x<\xi, \\ I^* & \text{при } x>\xi. \end{cases}$$

Здесь $I^*$ — диагональная матрица, у которой первые $\mathbf{p}$ диагональных элементов 1, остальные 0, а матрица $I^{**}$ такова, что $I^* + I^{**} = I$.

Функция $G_1$ не зависит от матриц $I_0$, $I_1$, а определяется только через коэффициенты выражения $L_{\mathscr{A}}$. Поэтому в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Re}\lambda < 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ при $|\lambda| > N$ запишем для нее представление, полученное в [6]:

$$G_1(x,\xi,\lambda) = \sum_{l=0}^{k} \frac{G_{1l}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l} + \frac{G_{1,k+1}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^{k+1}}, \quad G_{1l} = (g_{1l_{ij}})_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}, \tag{21}$$

$$g_{1l_{ij}}(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{q=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}} e^{\lambda\mu_q(x,\xi)} z_{lq_{ij}}(x,\xi) & \text{при } x<\xi, \\ \sum\limits_{q=1}^{\mathbf{p}} e^{\lambda\mu_q(x,\xi)} z_{lq_{ij}}(x,\xi) & \text{при } x>\xi \end{cases} \quad (l=0,1,\dots,k), \tag{22}$$

где $z_{lq_{ij}}(x,\xi) \in C^{2+k-l,2+k-l}_{x,\xi}([0,1]\times[0,1])$, $\mu_q(x,\xi) = \int\limits_{\xi}^{x} \frac{-d\tau}{k_q(\tau)}$. Функция $G_{1,k+1}$ непрерывно дифференцируема по $x,\xi\in[0,1]$, аналитична по $\lambda$ в областях $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ при $|\lambda|>N$, и при $\operatorname{Re}\lambda \ge \varrho$ ($\varrho$ — любое вещественное число), $|\lambda|>N$ имеет место оценка $|G_{1,k+1}(x,\xi,\lambda)| \le K$. Из (4) и вида функции $\mu_q(x,\xi)$ следует существование числа $\mu_0>0$ такого, что

$$\begin{gathered} -\mu_0 \le \mu_q(x,\xi) \le 0 \quad \text{при } x\le\xi \ (q=\mathbf{p}+1,\dots,\mathbf{n}), \\ -\mu_0 \le \mu_q(x,\xi) \le 0 \quad \text{при } x\ge\xi \ (q=1,\dots,\mathbf{p}). \end{gathered} \tag{23}$$

Для построения $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$ и $G_2(x,\xi,\lambda)$ исследуем функцию $\det X(\lambda)$ и составим обратную матрицу $X^{-1}(\lambda)$. Для этого наряду с дифференциальным выражением $L_{\mathscr{A}}$ рассмотрим выражение $L_{\mathscr{A}_d}$, в котором диагональная матрица $\mathscr{A}_d(x)$ имеет вид $\mathscr{A}_d(x) = (a_{ij}(x)\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}$. Фундаментальная матрица $V_d(x,\lambda)$ решений уравнения $\lambda Y = L_{\mathscr{A}_d}Y$ есть матрица $\mathcal{T}(x,\lambda)$, поэтому определитель матрицы $X_d(\lambda) = I_0V_d(0,\lambda) + I_1V_d(1,\lambda) = I_0 + I_1\mathcal{T}(1,\lambda)$ можно записать в виде

$$\det X_d(\lambda) = e^{\lambda\sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathscr{B}_i}(\Delta(\lambda) + r_0(\lambda)).$$

Здесь числа $\mathcal{T}_i$, $\mathscr{B}_i$ и полином Дирихле $\Delta(\lambda)$ определены в (8), причем в силу (4) справедливы соотношения $\mathcal{T}_{\mathbf{p}} < \mathcal{T}_{\mathbf{p}-1} < \dots < \mathcal{T}_1 < 0 < \mathcal{T}_{\mathbf{p}+1} < \dots < \mathcal{T}_{\mathbf{n}}$. Полином Дирихле $\Delta(\lambda)$ имеет следующий смысл:

$$\det X_0(\lambda) = e^{\lambda\sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathscr{B}_i}\Delta(\lambda),$$

где $X_0(\lambda)$ определена во введении. Заметим, что коэффициенты полинома Дирихле определяются через элементы матриц, соответствующих только сосредоточенному запаздыванию.

Обсудим вид функции $r_0(\lambda)$. Будем обозначать через $\mathcal{L}(g_1,\dots,g_n)$ линейную комбинацию с постоянными коэффициентами функций $g_1,\dots,g_n$, тогда $r_0(\lambda) = \mathcal{L}(e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda), e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\tilde f(\lambda)}_{2},\dots,e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{\mathbf{n}})$. Здесь и далее $\tilde f(\lambda)$ —

целая по $\lambda$ функция, принадлежащая множеству $\widetilde{\mathscr{F}} = \{\tilde{f}^r_{kij}(\lambda),\ i,j = 1,\dots,\mathbf{n};$ $k = 1,\dots,\mathbf{m};\ r = 0,1\}$, где $\tilde{f}^r_{kij}(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_k} f^r_{kij}(\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi$. Выражение $\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{n}$ обозначает произведение $n$ функций $\tilde{f}(\lambda)$, принадлежащих множеству $\widetilde{\mathscr{F}}$ и не обязательно равных между собой. Число $t$ принимает значения из конечного множества неотрицательных чисел, максимальное из которых $t_*$. Заметим, что существование функции $r_0(\lambda)$ связано с наличием матриц $\Phi^r_k(\xi)$ $(r = 0,1;$ $k = 1,\dots,\mathbf{m})$, соответствующих распределенному запаздыванию.

Из (13), (16) при $|\lambda| > N$ имеем

$$\det X(\lambda) = \det\left(X_d(\lambda) + \sum_{i=1}^{k+1}\frac{I_0P_i(0) + I_1P_i(1)\mathcal{T}(1,\lambda)}{\lambda^i}\right).$$

Разложим этот определитель по первым $\mathbf{p}$ строкам, тогда

$$\det X(\lambda) = e^{\lambda\sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathcal{T}_i + \sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathscr{B}_i}\Theta(\lambda), \quad \Theta(\lambda) = \Delta(\lambda) + r_0(\lambda) + \sum_{l=1}^{k+1}\frac{\Theta_l(\lambda)}{\lambda^l}, \tag{24}$$

$$\Theta_l(\lambda) = \mathcal{L}_l(1, e^{-\lambda t}, e^{-\lambda t}\tilde{f}(\lambda), e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)}_{2},\dots, e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{\mathbf{n}})\ (l = 1,\dots,k). \tag{25}$$

В выражениях $\Theta_l$ $(1 \le l \le k)$ все $t$, встречающиеся в показателях экспонент, принадлежат конечному множеству неотрицательных чисел, максимальное из которых $t_{**}$. Функция $\Theta_{k+1}(\lambda)$ аналитична в областях $\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$ при $|\lambda| > N$ и ограничена при $\operatorname{Re}\lambda \ge \varrho$ ($\varrho$ — любое вещественное число).

Пусть всюду далее матрицы $\Phi^r_k(\xi)$ принадлежат пространству $C^1[0,\tau_k]$ $(r = 0,1; k = 1,\dots,\mathbf{m})$, тогда для $i,j = 1,\dots,\mathbf{n}$ имеет место равенство

$$\tilde{f}^r_{kij}(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_k} f^r_{kij}(\xi)e^{-\lambda\xi}\,d\xi = \frac{f^r_{kij}(0)}{\lambda} - \frac{f^r_{kij}(\tau_k)e^{-\lambda\tau_k}}{\lambda} + \int\limits_0^{\tau_k}\frac{{f^r_{kij}}'(\xi)e^{-\lambda\xi}}{\lambda}\,d\xi. \tag{26}$$

Обозначим $t^* = \max(t_* + \mathbf{n}\tau_{\mathbf{m}}, t_{**} + \mathbf{n}\tau_{\mathbf{m}})$, тогда из равенства (26) для любого числа $B > 0$ при $|\lambda| > N$ имеем

$$|r_0(\lambda)| \le \frac{Ke^{Bt^*}}{|\lambda|}, \quad \left|\frac{\Theta_l(\lambda)}{\lambda^l}\right| \le \frac{Ke^{Bt^*}}{|\lambda|}, \quad l = 1,\dots,k\ (-B \le \operatorname{Re}\lambda). \tag{27}$$

Из (24) следует, что $\lambda \in \Lambda(L_{\mathscr{A}}) \Leftrightarrow \Theta(\lambda) = 0$. В [9] показано, что возможны два случая асимптотического поведения собственных чисел задачи (10). В случае $\Delta(\lambda) \not\equiv 1$ полином Дирихле $\Delta(\lambda)$ имеет [13] счетное число нулей, заключенных в полосе, параллельной мнимой оси, и при $|\lambda| \to \infty$ часть собственных чисел задачи (10) приближается к корням уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. В этом случае $\kappa_\Delta \le \kappa_A$, где $\kappa_\Delta = \sup\limits_{\Delta(\lambda)=0}\operatorname{Re}\lambda$. Если же $\Delta(\lambda) \equiv 1$, то справа от любой прямой, параллельной мнимой оси, может лежать только конечное число собственных чисел задачи (10).

Итак, в силу (24), (27) при $|\lambda| > N$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \kappa_{\mathscr{A}} + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ имеем представление

$$\frac{1}{\det X(\lambda)} = \frac{e^{-\lambda\sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathcal{T}_i - \sum\limits_{i=\mathbf{p}+1}^{\mathbf{n}}\mathscr{B}_i}}{\Delta(\lambda)}\chi(\lambda),$$

$$\chi(\lambda)=1+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\left(\frac{r_0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\sum_{l=1}^{k}\frac{\Theta_l(\lambda)}{\lambda^l\Delta(\lambda)}\right)^m+\frac{R_\chi(\lambda)}{\lambda^{k+1}},$$

$|R_\chi(\lambda)|\le K$, $K$ зависит от

$$\max_{1\le l\le \mathbf{m}, r=0,1}\left(\|\mathscr{A}(x)\|_{C^{k+1}[0,1]},\|\mathscr{K}(x)\|_{C^{k+1}[0,1]},\left\|\Phi_l^r(\xi)\right\|_{C^1[0,\tau_l]},|A_l|,|B_l|\right).$$

В случае $\Delta(\lambda)\equiv 1$, используя вид (25) $\Theta_l(\lambda)$, получим

$$\chi(\lambda)=\sum_{m=0}^{k}\frac{\chi_m(\lambda)}{\lambda^m}+\frac{\chi_{k+1}(\lambda)}{\lambda^{k+1}},\quad \chi_0(\lambda)=1+\sum_{i=1}^{k}(-1)^i r_0(\lambda)^i, \tag{28}$$

$|\chi_{k+1}(\lambda)|\le K$, $\chi_m(\lambda)=\mathcal{L}_m(1,e^{-\lambda t},e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda),e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\tilde f(\lambda)}_{2},\dots,e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{\mathbf{n}(m+1)})$ $(1\le m\le k)$. Все $t$, встречающиеся в показателях экспонент функций $\chi_m(\lambda)$ $(0\le m\le k)$, принадлежат конечному множеству неотрицательных чисел.

Построим матрицу $X^{-1}(\lambda)$. Обозначим через $\widetilde X_{ij}(\lambda)$ алгебраическое дополнение к элементу матрицы $X(\lambda)$, находящемуся в $j$-й строке и $i$-м столбце. Тогда $X^{-1}(\lambda)=\big(\frac{\widetilde X_{ij}(\lambda)}{\det X(\lambda)}\big)_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}$. Разложим $\widetilde X_{ij}(\lambda)$ по последним $\mathbf{n}-\mathbf{p}$ строкам матрицы $X(\lambda)$, тогда при $|\lambda|>N$, $\operatorname{Re}\lambda\ge\kappa_{\mathscr{A}}+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ имеет место разложение

$$X^{-1}(\lambda)=\left(\frac{e^{\lambda A_{ij}+B_{ij}}}{\Delta(\lambda)}X_{ij}(\lambda)\chi(\lambda)\right)_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}, \tag{29}$$

$A_{ij}=0$, $B_{ij}=0$ при $1\le i,j\le\mathbf{p}$; $A_{ij}=0$, $B_{ij}=0$, если $\mathbf{p}+1=\mathbf{n}$, и $A_{ij}=-\mathcal{T}_{\mathbf{p}+1}$, $B_{ij}=-\mathscr{B}_{\mathbf{p}+1}$, если $\mathbf{p}+1<\mathbf{n}$ при $1\le i\le\mathbf{p}$, $\mathbf{p}+1\le j\le\mathbf{n}$; $A_{ij}=\mathcal{T}_{\mathbf{p}}-\mathcal{T}_i$, $B_{ij}=\mathscr{B}_{\mathbf{p}}-\mathscr{B}_i$ при $\mathbf{p}+1\le i\le\mathbf{n}$, $1\le j\le\mathbf{p}$; $A_{ij}=-\mathcal{T}_i$, $B_{ij}=-\mathscr{B}_i$ при $\mathbf{p}+1\le i,j\le\mathbf{n}$,

$$X_{ij}(\lambda)=\sum_{l=0}^{k}\frac{x_{ij}^l(\lambda)}{\lambda^l}+\frac{X_{ij}^{as}(\lambda)}{\lambda^{k+1}}. \tag{30}$$

Здесь функции $x_{ij}^l(\lambda)$ $(l=0,1,\dots,k)$ суть линейные комбинации

$$x_{ij}^l(\lambda)=\mathscr{L}_{ij}^l(1,e^{-\lambda t},e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda),\dots,e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{\mathbf{n}-1}), \tag{31}$$

в которых все $t$, встречающиеся в показателях экспонент, принадлежат конечному множеству неотрицательных чисел. Функция $X_{ij}^{as}(\lambda)$ аналитична в областях $\operatorname{Re}\lambda>0$, $\operatorname{Re}\lambda<0$ и ограничена при $|\lambda|>N$, $\operatorname{Re}\lambda\ge\varrho$.

Найдем асимптотическое разложение функции $\mathcal{T}(x,\lambda)X^{-1}(\lambda)$. Из (29) имеем

$$\mathcal{T}(x,\lambda)X^{-1}(\lambda)=\frac{\mathcal{T}^x(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\chi(\lambda),\quad \mathcal{T}^x(x,\lambda)=(e^{\lambda\mu_{ij}(x)+\nu_{ij}(x)}X_{ij}(\lambda))_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}, \tag{32}$$

где $\mu_{ij}(x)=A_{ij}+\mathcal{T}_i(x)$, $\nu_{ij}(x)=B_{ij}+\mathscr{B}_i(x)$, поэтому $\mu_{ij},\nu_{ij}\in C^{k+2}[0,1]$ и

$$\frac{d\mu_{ij}(x)}{dx}=-\frac{1}{k_i(x)}\ne 0,\quad -\mu_1\le\mu_{ij}(x)\le 0\quad(\mu_1>0). \tag{33}$$

Матрицу $\mathcal{T}^x(x,\lambda)$ можно представить в виде суммы по степеням $\lambda$, где в силу (30) $\Gamma_l(x,\lambda) = \big(e^{\lambda\mu_{ij}(x)+\nu_{ij}(x)}x_{ij}^l(\lambda)\big)_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}$, $l = 0,\dots,k$, и $\Gamma_{k+1}(x,\lambda) = \big(e^{\lambda\mu_{ij}(x)+\nu_{ij}(x)}X_{ij}^{as}(\lambda)\big)_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}$:

$$\mathcal{T}^x(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{k+1}\frac{\Gamma_l(x,\lambda)}{\lambda^l}. \tag{34}$$

Для дальнейшего исследования функции $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$ запишем ее в виде

$$\widetilde{U}_1(x,\lambda) = W(x,\lambda)R(\lambda), \tag{35}$$

где $W(x,\lambda) = -V(x,\lambda)X^{-1}(\lambda) = -\frac{P(x,\lambda)\mathcal{T}^x(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\chi(\lambda)$. Используя (28), (32), при $|\lambda| > N$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \kappa_{\mathscr{A}} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) для $W(x,\lambda)$ в случае $\Delta(\lambda) \equiv 1$ запишем представление

$$W(x,\lambda) = \sum_{q=0}^{k}\frac{W_q(x,\lambda)}{\lambda^q} + \frac{W_{k+1}(x,\lambda)}{\lambda^{k+1}}, \quad W_q(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{q}P_l(x)D_l(x,\lambda). \tag{36}$$

Здесь матрицы $P_l(x)$ определены в (16), элементы матриц $D_l(x,\lambda)$ имеют вид $d_{l_{ij}}(\lambda)e^{\lambda\mu_{ij}(x)+\nu_{ij}(x)}$ ($i,j = 1,\dots,\mathbf{n}$), где $\mu_{ij}$, $\nu_{ij}$ определены в (32), а

$$d_{l_{ij}}(\lambda) = \mathcal{L}_{l_{ij}}(1, e^{-\lambda t}, e^{-\lambda t}\tilde{f}(\lambda), e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)}_{2},\dots, e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{\mathbf{n}(k+2)-1}). \tag{37}$$

Элементы матрицы $W_{k+1}(x,\lambda)$ имеют вид $w_{k+1_{ij}}(x,\lambda) = e^{\lambda\mu_{ij}(x)+\nu_{ij}(x)}\widetilde{w}_{k+1_{ij}}(x,\lambda)$, где функции $\widetilde{w}_{k+1_{ij}}(x,\lambda)$ непрерывно дифференцируемы по $x$ и равномерно ограничены по $\lambda$ при $|\lambda| > N$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \kappa_{\mathscr{A}} + \varepsilon$ для всех $i,j = 1,\dots,\mathbf{n}$. При фиксированном $l$ ($l = 0,1,\dots,k$) числа $t$ в показателях экспонент $d_{l_{ij}}(\lambda)$ для всех $i$, $j$ принадлежат конечному множеству $\{\mathscr{T}_l\}$ неотрицательных чисел, максимальное из которых $\mathscr{T}_l$, причем

$$0 \le \mathscr{T}_0 \le \mathscr{T}_1 \le \dots \le \mathscr{T}_k. \tag{38}$$

Используя вид (29) функции $X^{-1}(\lambda)$, построим асимптотическое представление $G_2(x,\xi,\lambda)$, задаваемой выражением (20). Представим в виде суммы по степеням $\lambda$ следующее выражение: $I_0V(0,\lambda)I^{**} - I_1V(1,\lambda)I^{*} = \sum\limits_{i=0}^{k+1}\frac{Q_i(\lambda)}{\lambda^i}$. Подставив его вместе с (16), (17), (32), (34) в (20), получим, что при $|\lambda| > N$, $\operatorname{Re}\lambda \ge \kappa_{\mathscr{A}} + \varepsilon$

$$G_2(x,\xi,\lambda) = \sum_{i=0}^{k+1}\frac{P_i(x)}{\lambda^i}\left(\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\Gamma_i(x,\lambda)}{\lambda^i}\right)\left(\sum_{i=0}^{k+1}\frac{Q_i(\lambda)}{\lambda^i}\right) \times \mathcal{T}^{-1}(\xi,\lambda)\left(\sum_{i=0}^{k+1}\frac{R_i(\xi)}{\lambda^i}\right)K^{-1}(\xi)\frac{\chi(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

В случае $\Delta(\lambda) \equiv 1$, используя (28), запишем $G_2$ в виде

$$G_2(x,\xi,\lambda) = \sum_{l=0}^{k}\frac{G_{2l}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l} + \frac{G_{2,k+1}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^{k+1}}, \quad G_{2l} = (g_{2l_{ij}})_{i,j=1,\dots,\mathbf{n}}, \tag{39}$$

$$g_{2l_{ij}}(x,\xi,\lambda)=\sum_{q=1}^{N_l}\frac{d_{ij}^{q,l}(x,\xi)}{k_j(\xi)}e^{\lambda\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi)+\psi_{ij}^{q,l}(x,\xi)}\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda),\quad l=0,1,\dots,k. \tag{40}$$

Здесь $d_{ij}^{q,l}(x,\xi)$ — произведение двух функций $\alpha_{ij}^{q,l}(x)\beta_{ij}^{q,l}(\xi)$, одна из которых — некоторый элемент матрицы $P_m(x)$, а другая — некоторый элемент матрицы $R_n(\xi)$ $(n,m=0,1,\dots,l)$, поэтому $d_{ij}^{q,l}(x,\xi)\in C_{x,\xi}^{k+2-l,k+2-l}([0,1]\times[0,1])$. Функция $\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi)$ при фиксированных индексах есть одна из функций $\mu_{ij}(x)-\int\limits_\xi^1\frac{d\tau}{k_s(\tau)}$, где $1\le s\le\mathbf{p}$, или $\mu_{ij}(x)+\int\limits_0^\xi\frac{d\tau}{k_s(\tau)}$, где $\mathbf{p}+1\le s\le\mathbf{n}$. Поэтому $\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi)$ принадлежит $C_{x,\xi}^{k+2,k+2}([0,1]\times[0,1])$, ее частные производные по $x$ и $\xi$ отличны от нуля и для всех рассматриваемых индексов справедливо неравенство

$$-\mu_2\le\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi)\le 0\quad(\mu_2>0), \tag{41}$$

если $x,\xi\in[0,1]$. Функция $\psi_{ij}^{q,l}(x,\xi)\in C_{x,\xi}^{k+2,k+2}([0,1]\times[0,1])$ при фиксированных индексах есть одна из функций $\nu_{ij}(x)+\int\limits_\xi^1\frac{a_{ss}(\tau)d\tau}{k_s(\tau)}$, где $1\le s\le\mathbf{p}$, или $\nu_{ij}(x)-\int\limits_0^\xi\frac{a_{ss}(\tau)d\tau}{k_s(\tau)}$, где $\mathbf{p}+1\le s\le\mathbf{n}$. Функции $\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)$ суть линейные комбинации

$$\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)=\mathcal{L}_{ij}^{q,l}(1,e^{-\lambda t},e^{-\lambda t}\tilde f(\lambda),e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\tilde f(\lambda)}_{2},\dots,e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde f(\lambda)\dots\tilde f(\lambda)}_{\mathbf{n}(k+2)}), \tag{42}$$

$i,j=1,\dots,n$. При фиксированном $l$ $(l=0,1,\dots,k)$ числа $t$ в показателях экспонент $\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)$ для всех допустимых $i,j,q$ принадлежат конечному множеству $\{T_l\}$ неотрицательных чисел, максимальное из которых $T_l$, причем

$$0\le T_0\le T_1\le\dots\le T_k. \tag{43}$$

Матрица $G_{2,k+1}(x,\xi,\lambda)$ непрерывно дифференцируема по $x$ и $\xi$ и равномерно ограничена по $\lambda$ при $|\lambda|>N$, $\operatorname{Re}\lambda\ge\kappa_{\mathscr{A}}+\varepsilon$.

Итак, в случае $P$-регулярных краевых условий построено асимптотическое представление при $|\lambda|\to\infty$ функции $\widetilde U(x,\lambda)$, которая является преобразованием Лапласа решения $U(x,t)$ первоначальной гиперболической задачи. Для доказательства повышения гладкости $U(x,t)$ обратимся к исследованию обратного преобразования Лапласа от $\widetilde U(x,\lambda)$.

### Доказательство теоремы 2

В силу оценки (6) и теоремы об обращении преобразования Лапласа [14] гладкое решение $U(x,t)$ задачи (1)–(3) представимо в виде

$$U(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\rho-i\infty}^{\rho+i\infty}\widetilde U(x,\lambda)e^{\lambda t}\,d\lambda,\quad \rho>A,$$

где интеграл на бесконечности понимается в смысле главного значения, а константа $A$ определена в (6). Доказательство теоремы становится более наглядным, если считать, что несобственный интеграл берется по прямой, лежащей в левой полуплоскости, т. е.

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \widetilde{U}(x,\lambda) e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad \gamma > 0.$$

Действительно, с помощью замены $U(x,t) = V(x,t)e^{(A+\gamma+\varepsilon)t}$ ($\varepsilon > 0$) мы получим краевую задачу вида (1), (2) относительно $V(x,t)$, и будет справедлива оценка $\|V(x,t)\|_{C^1[0,1]} \le Ke^{-(\gamma+\varepsilon)t}\|\overline{V}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)}$. Наличие такой оценки гарантирует, что для вновь полученной задачи относительно $V(x,t)$ собственные числа соответствующей краевой задачи с параметром лежат в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \le -(\gamma+\varepsilon)$.

Ранее мы представили $\widetilde{U}(x,\lambda)$ в виде суммы $\widetilde{U} = \widetilde{U}_1 + \widetilde{U}_2$, поэтому запишем $U(x,t)$ также в виде суммы двух функций $U = U_1 + U_2$, где

$$U_j(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \widetilde{U}_j(x,\lambda) e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad j = 1, 2, \tag{44}$$

а $\widetilde{U}_j(x,\lambda)$ определены в (14). Для исследования поведения этих функций при $t \to \infty$ введем в рассмотрение множество $\mathfrak{G}$, состоящее из вещественнозначных функций $g(t)$, для каждой из которых существует отрезок $[0, \tau_g]$, $\tau_g > 0$, на котором она непрерывно дифференцируема, а вне его тождественно равна нулю. Очевидно, что множество $\mathfrak{G}$ является линейным многообразием, замкнутым относительно операции свертки. Действительно, если $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$, то свертка $(g_1 * g_2)(t) = \int\limits_0^t g_1(\tau) g_2(t-\tau)d\tau$ этих функций также принадлежит $\mathfrak{G}$ и имеет носитель $[0, \tau_{g_1} + \tau_{g_2}]$, где $[0, \tau_{g_i}]$ — носители $g_i(t)$ ($i = 1, 2$).

Обозначим через $\mathfrak{L}(g)$ преобразование Лапласа $\tilde{g}(\lambda) = \int\limits_0^\infty g(t)e^{-\lambda t}dt$ от функции $g \in \mathfrak{G}$, а через $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ — множество всех функций $\tilde{g}(\lambda)$, $g \in \mathfrak{G}$. Тогда множество $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ замкнуто относительно сложения и умножения функций, так как $\mathfrak{L}(g_1 * g_2) = \tilde{g}_1(\lambda)\tilde{g}_2(\lambda)$. Если $\tilde{g} \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, то $\tilde{g}(\lambda)$ есть целая по $\lambda$ функция и для нее при $\lambda \ne 0$ верна оценка $|\tilde{g}(\lambda)| \le \|g(t)\|_{C^1[0,\tau_g]} \bigl(\frac{1+e^{-\tau_g \operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|}\bigr)\bigl(1 + \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}\bigr)$. Из этой оценки и леммы Жордана [14] для любой функции $\tilde{g} \in \mathfrak{L}(G)$ и любого $\gamma > 0$ при $t > \tau_g$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = -\gamma} \frac{e^{\lambda t}\tilde{g}(\lambda)}{\lambda^l}\, d\lambda \equiv 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots. \tag{45}$$

Изучим поведение $U_1(x,t)$, для чего обратимся к функции (35) $\widetilde{U}_1(x,\lambda)$. Используя (36), где $k = \mathbf{k} + 1$, запишем $U_1(x,t)$ в виде

$$U_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \left( W(x,\lambda) - \sum_{q=0}^{\mathbf{k}+1} \frac{W_q(x,\lambda)}{\lambda^q} \right) R(\lambda)\, d\lambda \\ + \frac{1}{2\pi i} \sum_{q=0}^{\mathbf{k}+1} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \frac{W_q(x,\lambda)}{\lambda^q} R(\lambda)\, d\lambda. \tag{46}$$

В качестве $R(\lambda)$ (см. (11), (12)) будем рассматривать функцию $\widetilde{U}_l^r(\lambda)$ или функцию $\widetilde{\Phi}_l^r(\lambda)$:

$$\widetilde{U}_l^r(\lambda) = e^{\lambda\tau_l}\int\limits_0^{\tau_l}\overline{U}(r,\xi-\tau_l)e^{-\lambda\xi}\,d\xi, \quad \widetilde{\Phi}_l^r(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_l}e^{-\lambda y}\int\limits_y^{\tau_l}\Phi_l^r(\xi)\overline{U}(r,y-\xi)\,d\xi dy \quad (47)$$

при произвольных фиксированных $r = 0, 1$ и $l = 1, \ldots, \mathbf{m}$. Такой вид этих функций получается из соответствующих выражений в (12) с помощью замены переменных в подынтегральных выражениях. Обозначим первое слагаемое в (46) через $J_1(x,t)$, а второе — через $J_2(x,t)$. При $t \geq 0$ функция $J_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема $\mathbf{k}$ раз по $t$. Действительно, так как $A(x), K(x) \in C^{\mathbf{k}+2}[0,1]$, при больших значениях $|\lambda|$ из (36) следует, что $W(x,\lambda) - \sum\limits_{q=0}^{\mathbf{k}+1}\frac{W_q(x,\lambda)}{\lambda^q} = \frac{W_{\mathbf{k}+2}(x,\lambda)}{\lambda^{\mathbf{k}+2}}$, где $|W_{\mathbf{k}+2}(x,\lambda)| \leq K$. Отсюда и из (47) при $t \geq 0$ имеем оценки

$$\left|\frac{\partial^l J_1(x,t)}{\partial t^l}\right| \leq Ke^{-\gamma t}\max_{r=0,1}\|\overline{U}(r,t)\|_{L_2(\Gamma^r)}, \quad l = 0, 1, \ldots, \mathbf{k}. \quad (48)$$

Для исследования гладкости $J_2(x,t)$ рассмотрим функции

$$w_q(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\frac{W_q(x,\lambda)}{\lambda^q}R(\lambda)d\lambda, \quad q = 0, \ldots, \mathbf{k}+1.$$

При фиксированном $q$ из (36) получим

$$w_q(x,t) = \sum_{l=0}^{q}P_l(x)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}e^{\lambda t}\frac{D_l(x,\lambda)}{\lambda^q}R(\lambda)\,d\lambda\right). \quad (49)$$

Из вида элементов матрицы $D_l(x,\lambda)$ вытекает, что для исследования внутреннего интеграла достаточно изучить свойства функции

$$j(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t+\mu_{ij}(x))+\nu_{ij}(x)}d_{l_{ij}}(\lambda)\varphi(\lambda)}{\lambda^q}\,d\lambda, \quad (50)$$

где $l \in \{0, 1, \ldots, q\}$, а $d_{l_{ij}}(\lambda)$ определены в (37). В силу (47) $\varphi(\lambda)$ есть либо функция $e^{\lambda\tau_{l_0}}\varphi_1(\lambda)$, либо функция $\varphi_2(\lambda)$:

$$\varphi_1(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_{l_0}}\bar{u}_s(r,\xi-\tau_{l_0})e^{-\lambda\xi}\,d\xi, \quad \varphi_2(\lambda) = \int\limits_0^{\tau_{l_0}}e^{-\lambda y}\int\limits_y^{\tau_{l_0}}f_{l_0ps}^r(\xi)\bar{u}_s(r,y-\xi)\,d\xi\,dy,$$

где $p, s \in \{1, 2, \ldots, \mathbf{n}\}$, $l_0 \in \{1, 2, \ldots, \mathbf{m}\}$. Очевидно, что $\varphi_i(\lambda) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{G})$, $i = 1, 2$, являются преобразованиями Лапласа от функций с носителями $[0, \tau_{l_0}]$. Согласно (37) функции $d_{l_{ij}}(\lambda)$ из (50) суть линейные комбинации

$$d_{l_{ij}}(\lambda) = \mathcal{L}_{l_{ij}}(1, e^{-\lambda t}, e^{-\lambda t}\tilde{f}(\lambda), e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\tilde{f}(\lambda)}_{2}, \ldots, e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\ldots\tilde{f}(\lambda)}_{\mathbf{n}(\mathbf{k}+3)-1}).$$

Из определения функции $\tilde{f}(\lambda) \in \widetilde{\mathscr{F}}$ видно, что $\tilde{f}(\lambda) = \mathfrak{L}(f)$, где $f(t) \in \mathfrak{G}$, так как $f(t)$ совпадает с функцией $f_{kij}^r(t)$ на отрезке $[0, \tau_k]$ (при некоторых фиксированных индексах $r, k, i, j$) и равна нулю вне этого отрезка. Поскольку множество $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ замкнуто относительно умножения, для любых $p = 1, 2$ и $i = 1, \dots, \mathbf{n}(\mathbf{k}+3) - 1$ функции $\varphi_p(\lambda) \underbrace{\tilde{f}(\lambda) \dots \tilde{f}(\lambda)}_{i}$ суть преобразования Лапласа от некоторых функций из $\mathfrak{G}$ с носителями из отрезка $[0, \tau_{\mathbf{m}}(i+1)]$.

Воспользуемся свойством преобразования Лапласа — свойством смещения, согласно которому справедливо соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\sigma} e^{\lambda t} \tilde{y}(\lambda) d\lambda = y(t),\ t > 0, \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\sigma} e^{\lambda(t-t_0)} \tilde{y}(\lambda) d\lambda = y(t - t_0),\ t > t_0. \tag{51}$$

Для $l = 0, 1, \dots, \mathbf{k}+1$ введем в рассмотрение числа $t_l = \mu_1 + \mathscr{T}_l + \tau_{\mathbf{m}}\mathbf{n}(\mathbf{k}+3)$, $t_0 \le t_1 \le \dots \le t_{\mathbf{k}+1}$, где $\mu_1$ определено в (33), а $\mathscr{T}_l$ — в (38). Тогда в силу свойства (45) функций из множества $\mathfrak{L}(\mathfrak{G})$ и соотношения (51) при $t > t_q$ функция (50) $j(x,t)$ равна нулю для всех допустимых $i, j, l$, поэтому и функция (49) $w_q(x,t)$ тождественно нулевая. Тогда $J_2(x,t) \equiv 0$ при $t > t_{\mathbf{k}+1}$, следовательно, при этих же значениях $t$ функция (46) $U_1(x,t)$ непрерывно дифференцируема $\mathbf{k}$ раз по $t$ и имеет место оценка, аналогичная (48):

$$\left| \frac{\partial^l U_1(x,t)}{\partial t^l} \right| \le K e^{-\gamma t} \max_{r=0,1} \|\overline{U}(r,t)\|_{L_2(\Gamma^r)}, \quad l = 0, 1, \dots, \mathbf{k}. \tag{52}$$

Для изучения свойств $U_2(x,t)$ воспользуемся асимптотическим представлением функции (14) $\widetilde{U}_2(x,\lambda) = -\int\limits_0^1 G(x,\xi,\lambda) U_0(\xi)\, d\xi$. В (18) $G(x,\xi,\lambda)$ представлена в виде суммы двух функций $G_i$ ($i = 1, 2$), определенных в (19), (20). Поэтому представим $U_2(x,t)$ в виде суммы $U_2 = -(Z_1 + Z_2)$, где

$$Z_i(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \int\limits_0^1 G_i(x,\xi,\lambda) U_0(\xi)\, d\xi d\lambda \quad (i = 1, 2), \tag{53}$$

и исследуем свойства гладкости каждой из функций $Z_i(x,t)$ в отдельности.

Рассмотрим сначала функцию $Z_2(x,t)$ и, пользуясь при $|\lambda| \to \infty$ представлением (39) (где $k = \mathbf{k}+1$) для $G_2$, определим две функции

$$\begin{gathered} I_1(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \int\limits_0^1 \left( G_2(x,\xi,\lambda) - \sum_{l=0}^{\mathbf{k}+1} \frac{G_{2l}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l} \right) U_0(\xi)\, d\xi d\lambda, \\ I_2(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \int\limits_0^1 \sum_{l=0}^{\mathbf{k}+1} \frac{G_{2l}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l} U_0(\xi)\, d\xi d\lambda. \end{gathered} \tag{54}$$

Таким образом, $Z_2 = I_1 + I_2$. В силу (39) при $|\lambda| > N$ имеем

$$G_2(x,\xi,\lambda) - \sum_{l=0}^{\mathbf{k}+1} \frac{G_{2l}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l} = \frac{G_{2,\mathbf{k}+2}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^{\mathbf{k}+2}},$$

где $|G_{2,\mathbf{k}+2}(x,\xi,\lambda)| \le K$. Поэтому функция $I_1(x,t)$ при $t \ge 0$ является $\mathbf{k}$ раз непрерывно дифференцируемой по $t$ и для нее верна оценка

$$\left| \frac{\partial^l I_1(x,t)}{\partial t^l} \right| \le K e^{-\gamma t} \|\overline{U}_0(x)\|_{L_2(0,1)}, \quad l = 0, 1, \dots, \mathbf{k}. \tag{55}$$

Для исследования $I_2(x,t)$ согласно виду (40) элементов матриц $G_{2l}(x,\xi,\lambda)$ достаточно при каждом $l = 0, 1, \dots, \mathbf{k}+1$ рассмотреть функции

$$j_l(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^l}\int\limits_0^1\frac{d_{ij}^{q,l}(x,\xi)}{k_j(\xi)}e^{\lambda\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi)+\psi_{ij}^{q,l}(x,\xi)}\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)u_{0_m}(\xi)\,d\xi\,d\lambda, \quad (56)$$

где индексы $i, j, m, q, l$ принимают произвольные допустимые значения, а функции $\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)$ имеют вид (42), где $k = \mathbf{k}+1$.

При $l \geq 2$ справа в выражениях (56) можно сменить порядки интегрирования и согласно (40) записать

$$j_l(x,t) = \alpha_{ij}^{q,l}(x)e^{\nu_{ij}(x)}\int\limits_0^1 e^{-\int\limits_0^\xi\frac{a_{ss}(\tau)}{k_s(\tau)}d\tau}\frac{\beta_{ij}^{q,l}(\xi)}{k_j(\xi)}u_{0_m}(\xi)$$
$$\times\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)e^{\lambda(t+\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi))}}{\lambda^l}\,d\lambda\right)d\xi.$$

Здесь согласно (40) мы считаем, что $\psi_{ij}^{q,l}(x,\xi) = \nu_{ij}(x) - \int\limits_0^\xi\frac{a_{ss}(\tau)\,d\tau}{k_s(\tau)}$ при некотором $s$ от $\mathbf{p}+1$ до $\mathbf{n}$ (в случае $s = 1, \dots, \mathbf{p}$ рассуждения аналогичны).

Введем в рассмотрение для $l = 0, 1, \dots, \mathbf{k}+1$ следующие числа: $\hat{t}_l = \mu_2 + T_l + \tau_{\mathbf{m}}\mathbf{n}(\mathbf{k}+3)$, $\hat{t}_0 \leq \hat{t}_1 \leq \dots \leq \hat{t}_{\mathbf{k}+1}$, где $\mu_2$ определено в (41), а $T_l$ — в (43). Пользуясь известным свойством [14] преобразования Лапласа

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{e^{\lambda(t-t_0)}}{\lambda^m}\,d\lambda = 0 \quad \text{при } t > t_0 \ (m = 1, 2, \dots) \quad (57)$$

и учитывая то, что при фиксированном $i$ $(1 \leq i \leq \mathbf{n}(\mathbf{k}+3))$ функция $\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{i}$ есть преобразование Лапласа некоторой функции из $\mathfrak{G}$ с носителем из отрезка $[0, i\tau_{\mathbf{m}}]$, получаем, что при $t > \hat{t}_l$ интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty}\frac{\sigma_{ij}^{q,l}(\lambda)e^{\lambda(t+\varphi_{ij}^{q,l}(x,\xi))}}{\lambda^l}\,d\lambda$ равен нулю для всех допустимых $i, j, q$. Но тогда и $j_l(x,t) \equiv 0$ при $t > \hat{t}_l$, $l = 2, 3, \dots$.

Рассмотрим случай $l = 1$ и подставим в $j_1(x,t)$ линейную комбинацию (42), тогда $j_1(x,t)$ можно представить в виде суммы соответствующих слагаемых. Так как $\tilde{f}(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$ (см. (26)), все слагаемые, содержащие члены с $e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{i}$, $1 \leq i \leq \mathbf{n}(\mathbf{k}+3)$, обратятся в нуль при $t > \hat{t}_1$ (это видно, как и при $l \geq 2$, из смены порядков интегрирования). Остается рассмотреть слагаемые, в которых вместо $\sigma_{ij}^{q,1}(\lambda)$ стоит или 1, или функция $e^{-\lambda\tilde{\tau}}$, $\tilde{\tau} \in \{T_1\}$. Очевидно, в силу свойства смещения (51) достаточно рассмотреть случай, когда $\sigma_{ij}^{q,1}(\lambda) \equiv 1$. Согласно (40) можно считать, что функция $\varphi_{ij}^{q,1}(x,\xi)$ имеет вид $\mu_{ij}(x) + \int\limits_0^\xi\frac{d\tau}{k_s(\tau)}$ при некотором $s$ от $\mathbf{p}+1$ до $\mathbf{n}$ (в случае $1 \leq s \leq \mathbf{p}$ рассуждения аналогичны). Тогда справедливо равенство

$$e^{\lambda\varphi_{ij}^{q,1}(x,\xi)} = \frac{e^{\lambda\mu_{ij}(x)}k_s(\xi)}{\lambda}\frac{d}{d\xi}\left(e^{\lambda\int\limits_0^\xi\frac{d\tau}{k_s(\tau)}}\right),$$

которое в силу гладкости по $\xi$ всех входящих во внутренний интеграл в (56) функций гарантирует, что этот интеграл в рассматриваемом случае ведет себя как $O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ на прямой $\operatorname{Re}\lambda = -\gamma$. Поэтому, меняя порядок интегрирования в правой части (56) и пользуясь свойством (57) при $m = 1$, получаем, что и $j_1(x,t) = 0$ при $t > \hat{t}_1$.

Рассмотрим выражение (56) в случае $l = 0$. Рассуждая, как в случае $l = 1$, используем вид (42) функции $\sigma_{ij}^{q,0}(\lambda)$ и представляем $j_0(x,t)$ в виде конечной суммы слагаемых. Замечаем, что все слагаемые, содержащие выражения вида $e^{-\lambda t}\underbrace{\tilde{f}(\lambda)\dots\tilde{f}(\lambda)}_{i}$, $2 \le i \le \mathbf{n}(\mathbf{k}+3)$, обратятся в нуль при $t > \hat{t}_0$. Остается рассмотреть случай, когда вместо $\sigma_{ij}^{q,0}(\lambda)$ берется 1 или $e^{-\lambda\tilde{\tau}}$, или функция $e^{-\lambda\tilde{\tau}}\tilde{f}(\lambda)$, где $\tilde{\tau} \in \{T_0\}$. Так как $\tilde{f}(\lambda) = O(1/\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$, то для $\sigma_{ij}^{q,0}(\lambda) = e^{-\lambda\tilde{\tau}}\tilde{f}(\lambda)$ из предыдущих рассуждений следует, что при $t > \hat{t}_0$ соответствующее слагаемое в $j_0(x,t)$ обратится в нуль. Для исследования случая $\sigma_{ij}^{q,0}(\lambda) = e^{-\lambda\tilde{\tau}}$ и $\sigma_{ij}^{q,0}(\lambda) \equiv 1$ нам понадобится

**Лемма 1.** *Пусть $y(x,\xi)$ — непрерывно дифференцируемая, а $z(x,\xi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функции своих аргументов, причем $z'_\xi(x,\xi) \ne 0$, $-\rho \le z(x,\xi) \le 0$ ($\rho > 0$) для всех $x,\xi \in [a,b]$. Тогда при $t > \rho$ имеет место равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=-\gamma} e^{\lambda t}\int\limits_a^b e^{\lambda z(x,\xi)}y(x,\xi)\,d\xi d\lambda \equiv 0. \tag{58}$$

Обозначим левую часть (58) через $I(x,t)$. Используя формулу интегрирования по частям, имеем

$$I(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=-\gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\left[\frac{e^{\lambda z(x,\xi)}y(x,\xi)}{z'_\xi(x,\xi)}\bigg|_{\xi=a}^{\xi=b} - \int\limits_a^b e^{\lambda z(x,\xi)}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{y(x,\xi)}{z'_\xi(x,\xi)}\right)d\xi\right]d\lambda.$$

В силу (57) и условий леммы несобственный интеграл от первого слагаемого в квадратных скобках равен нулю при $t > \rho$. Для исследования интеграла от второго слагаемого достаточно рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=-\gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\int\limits_a^b e^{\lambda z(x,\xi)}f(x,\xi)\,d\xi d\lambda, \tag{59}$$

где $f(x,\xi)$ — непрерывная функция своих аргументов. Так как интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=-\gamma}\frac{e^{\lambda(t+z(x,\xi))}}{\lambda}d\lambda$ при $t + z(x,\xi) \ge \delta$ ($\delta > 0$) по признаку Дирихле сходится равномерно относительно $\xi \in [a,b]$, то при $t + z(x,\xi) \ge \delta$ в (59) можно поменять порядок интегрирования. Используя (57), получаем, что при $t > \rho$ интеграл (59), а следовательно, и функция $I(x,t)$ обращаются в нуль. Лемма доказана.

Итак, при $\sigma_{ij}^{q,0}(\lambda) \equiv 1$ рассмотрим согласно (56) функцию

$$i_0(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} e^{\lambda t}\int\limits_0^1 \frac{d_{ij}^{q,0}(x,\xi)}{k_j(\xi)}e^{\lambda\varphi_{ij}^{q,0}(x,\xi)+\psi_{ij}^{q,0}(x,\xi)}u_{0_m}(\xi)\,d\xi d\lambda,$$

где все подынтегральные функции являются гладкими по $x$, $\xi$ , причем $\varphi_{ij}^{q,0}(x,\xi)$

$\in C^{\mathbf{k}+3,\mathbf{k}+3}_{x,\xi}([0,1]\times[0,1])$ и $\frac{\partial\varphi^{q,0}_{ij}(x,\xi)}{\partial\xi}\neq 0$ для всех $x,\xi\in[0,1]$. Применив к правой части этого равенства лемму 2, в силу (41) получим, что $i_0(x,t)\equiv 0$ при $t>\mu_2$. В случае $\sigma^{q,0}_{ij}(\lambda)=e^{-\lambda\tilde{\tau}}$ из свойства смещения (51) вытекает, что соответствующее слагаемое в $j_0(x,t)$ равно нулю при $t>\mu_2+T_0$. Поэтому для $t>\hat{t}_0$ функция $j_0(x,t)$ равна нулю при всех допустимых значениях индексов. Таким образом, при $t>\hat{t}_{\mathbf{k}+1}$ функция (54) $I_2(x,t)$ обращается в нуль, что означает в силу (55) наличие для $Z_2(x,t)$ при $t>\hat{t}_{\mathbf{k}+1}$ оценки

$$\left\|\frac{\partial^l Z_2(x,t)}{\partial t^l}\right\|_{C[0,1]}\le Ke^{-\gamma t}\|\overline{U}_0(x)\|_{L_2(0,1)},\quad l=0,1,\dots,\mathbf{k}. \tag{60}$$

Рассмотрим функцию (53) $Z_1(x,t)$ и воспользуемся представлением (21) для $G_1$. Тогда $G_1(x,\xi,\lambda)=\sum\limits_{l=0}^{\mathbf{k}+1}\frac{G_{1l}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^l}+\frac{G_{1,\mathbf{k}+2}(x,\xi,\lambda)}{\lambda^{\mathbf{k}+2}}$, где элементы матриц $G_{1l}(x,\xi,\lambda)$ имеют вид (22). Аналогично (54) представим $Z_1(x,t)$ в виде суммы двух функций, одна из которых является $\mathbf{k}$ раз непрерывно дифференцируемой по $t$, причем все ее производные по $t$ до порядка $\mathbf{k}$ оцениваются правой стороной неравенства (60). Другое слагаемое есть функция, равная нулю при $t>\mu_0$ (см. (23)). Это следует из вида (22) элементов матриц $G_{1l}(x,\xi,\lambda)$ и рассуждений, которые использовались выше для анализа функции $I_2(x,t)$. Поэтому при $t>\mu_0$ для функции $Z_1(x,t)$ имеет место неравенство, аналогичное (60).

Так как $U_2=-(Z_1+Z_2)$, при $t>\max(\hat{t}_{\mathbf{k}+1},\mu_0)$ все производные по $t$ до порядка $\mathbf{k}$ от функции $U_2(x,t)$ оцениваются правой стороной неравенства (60). Отсюда и из (52) для гладкого решения $U(x,t)$ задачи (1)–(3) при $t>T(\mathbf{k})$ имеем оценку $\left\|\frac{\partial^l U(x,t)}{\partial t^l}\right\|_{C[0,1]}\le Ke^{-\gamma t}\|\overline{U}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$, $l=0,1,\dots,\mathbf{k}$, где $T(\mathbf{k})=\max(t_{\mathbf{k}+1},\hat{t}_{\mathbf{k}+1},\mu_0)$. Функция $U(x,t)$ в полуполосе $\Pi$ удовлетворяет дифференциальной системе (1), из которой с помощью этой оценки и получается при $t>T(\mathbf{k})$ неравенство $\left\|D^{\alpha,\beta}_{x,t}U(x,t)\right\|_{C[0,1]}\le Ke^{-\gamma t}\|\overline{U}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)}$ $(\alpha+\beta\le\mathbf{k})$ для гладкого решения $U(x,t)$ исходной задачи, если $\kappa_{\mathscr{A}}<-\gamma$. Если же $\kappa_{\mathscr{A}}=\rho$ $(\rho>0)$ то, очевидно, эта оценка будет иметь вид

$$\left\|D^{\alpha,\beta}_{x,t}U(x,t)\right\|_{C[0,1]}\le Ke^{(\rho+\varepsilon_1)t}\|\overline{U}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)},$$

где $\varepsilon_1>0$ — произвольное число. Теорема доказана.

В качестве примера приведем систему из двух уравнений

$$u_t+u_x=a(x)u+b(x)v,\quad v_t-v_x=c(x)u+d(x)v, \tag{61}$$

$$\begin{gathered}u(0,t)=\alpha_1v(0,t)+\beta_1u(1,t)+\gamma_1u(0,t-1)+\int\limits_0^{\tau_1}f_1(\xi)u(0,t-\xi)\,d\xi,\\ v(1,t)=\alpha_2v(0,t)+\beta_2u(1,t)+\gamma_2v(1,t-1)+\int\limits_0^{\tau_2}f_2(\xi)v(1,t-\xi)\,d\xi,\\ (u,v)|_\Gamma=(\bar{u},\bar{v}).\end{gathered} \tag{62}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$A_0=\begin{pmatrix}1&-\alpha_1\\0&-\alpha_2\end{pmatrix},\ B_0=\begin{pmatrix}-\beta_1&0\\-\beta_2&1\end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix}-\gamma_1&0\\0&0\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&-\gamma_2\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{T}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^{-\lambda x+\int\limits_0^x a(\xi)\,d\xi}&0\\0&e^{\lambda x-\int\limits_0^x d(\xi)\,d\xi}\end{pmatrix},$$

$$\det(A_0 + A_1 e^{-\lambda} + (B_0 + B_1 e^{-\lambda})\mathcal{T}(1,\lambda)) = e^{\lambda - \int_0^1 d(\xi)\,d\xi}\Delta(\lambda),$$

где

$$\Delta(\lambda) = 1 - e^{-\lambda}\Big(\gamma_1 + \gamma_2 + \beta_1 e^{\int_0^1 a(\xi)\,d\xi} + \alpha_2 e^{\int_0^1 d(\xi)\,d\xi}\Big)$$
$$+ e^{-2\lambda}\Big(\beta_1\gamma_2 e^{\int_0^1 a(\xi)\,d\xi} + \alpha_2\gamma_1 e^{\int_0^1 d(\xi)\,d\xi} + \gamma_1\gamma_2 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)e^{\int_0^1 (a(\xi)+d(\xi))\,d\xi}\Big).$$

Итак, краевые условия (62) для задачи (61) $P$-регулярны, если коэффициенты матриц $A_0, B_0, A_1, B_1$ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \beta_1 e^{\int_0^1 a(\xi)\,d\xi} + \alpha_2 e^{\int_0^1 d(\xi)\,d\xi} = 0,$$
$$\beta_1\gamma_2 e^{\int_0^1 a(\xi)\,d\xi} + \alpha_2\gamma_1 e^{\int_0^1 d(\xi)\,d\xi} + \gamma_1\gamma_2 + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)e^{\int_0^1 (a(\xi)+d(\xi))\,d\xi} = 0.$$

Заметим, что в случае распадающихся краевых условий для системы (61), т. е. $u(0,t) = \alpha_1 v(0,t)$, $v(1,t) = \beta_2 u(1,t)$, в [6] доказано, что соответствующая задача обладает свойством повышения гладкости тогда и только тогда, когда $\alpha_1\beta_2 = 0$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Аболиня В. Э., Мышкис А. Д.* Смешанная задача для почти линейной гиперболической системы на плоскости // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 4. С. 423–442.
2. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
3. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Непрерывные решения гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2003. С. 337–351.
4. *Акрамов Т. А.* Дифференциальные уравнения и их приложения в моделировании физико-химических процессов. Уфа: Башкирск. гос. ун-т, 2000.
5. *Kmit I.* Delta-waves for a strongly singular initial-boundary hyperbolic problem with integral boundary condition // J. Anal. Appl. 2005. V. 24, N 1. P. 29–74.
6. *Елтышева Н. А.* О качественных свойствах решений некоторых гиперболических систем на плоскости // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 2. С. 186–209.
7. *Лаврентьев М. М. (мл.), Люлько Н. А.* Повышение гладкости решений некоторых гиперболических задач // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 109–124.
8. *Люлько Н. А.* Повышение гладкости решений смешанной задачи для волнового уравнения на плоскости // Мат. физика, анализ, геометрия. 2004. Т. 11, № 2. С. 169–176.
9. *Люлько Н. А.* Смешанная задача для гиперболической системы на плоскости с запаздыванием в граничных условиях // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 5. С. 1100–1124.
10. *Брушлинский К. В.* О росте решения смешанной задачи в случае неполноты собственных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 6. С. 893–912.
11. *Birkhoff G. D., Langer R. E.* The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order // Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 1923. V. 58, N 2. P. 51–128.
12. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
13. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
14. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.


*Статья поступила 5 июня 2007 г.*

Люлько Наталья Альбертовна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
natlyl@mail.ru