Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 512.542.4

О ПРЕФРАТТИНИЕВЫХ ПОДГРУППАХ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

С. Ф. Каморников

Аннотация. Изучаются частично префраттиниевы подгруппы конечной разрешимой группы. Доказано, что множество всех частично префраттиниевых подгрупп, ассоциированных с гашюцевой системой дополнений корон, является булевой решеткой.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, частично префраттиниева подгруппа, решетка подгрупп.

Посвящается моему учителю
профессору Л. А. Шеметкову
в связи с его 70-летием

1. Введение

В 1962 г. Гашюц [1] доказал существование и установил основные свойства префраттиниевых подгрупп конечной разрешимой группы. В дальнейшем результат Гашюца неоднократно обобщался. При этом рассматривались различные вопросы: предлагались характеризации префраттиниевых подгрупп, изучалось существование их в частично разрешимых группах, исследовалась связь с другими каноническими подгруппами группы.

В ряде работ изучалось место префраттиниевых подгрупп в решетке подгрупп заданной группы. В частности, в [2] Курцвейлем префраттиниевы подгруппы охарактеризованы в терминах эйлеровой характеристики симплициального комплекса, связанного с решеткой всех подгрупп группы G, а в [3] Хаук и Курцвейль предложили следующий элегантный критерий: префраттиниевы подгруппы конечной разрешимой группы G совпадают с минимальными элементами множества всех таких подгрупп U группы G, что интервал решетки $[U, G]$ дополняем.

К данному направлению относится и настоящая работа. Здесь определяются частично префраттиниевы подгруппы и изучаются их свойства. При этом большое внимание уделяется решеточным свойствам. В частности, доказывается, что множество $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ всех частично префраттиниевых подгрупп конечной разрешимой группы G, ассоциированных с заданной гашюцевой системой Σ, является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G. Более того, устанавливается, что решетка $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ изоморфна решетке всех подмножеств множества всех корон группы G. Отсюда следует, например, что решетка $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ является атомной, коатомной и булевой.

Все рассматриваемые в настоящей статье группы предполагаются конечными и разрешимыми. В определениях мы следуем монографиям [4, 5].

2. Операторные формации

Важную роль в данной работе, как и в [1] при определении префраттиниевой подгруппы, играет понятие короны дополняемого главного фактора группы. Это понятие, как указал автору профессор Л. А. Шеметков, может быть определено на языке теории формаций операторных групп (более подробно об операторных группах см., например, в книге М. И. Каргаполова и Ю. И. Мерзлякова [6]). Будем рассматривать классы групп с одной и той же областью операторов Ω (как обычно, каждый оператор из Ω действует на группе из данного класса как эндоморфизм). Мы будем рассматривать только абстрактные классы. Это значит, что если $\mathfrak{F}$ — класс Ω-групп и $H \in \mathfrak{F}$, то каждая Ω-группа, Ω-изоморфная группе H, также принадлежит $\mathfrak{F}$. Напомним, что Ω-группы A и B называются Ω-*изоморфными*, если существует изоморфное отображение f группы A на B такое, что $(a^f)^\alpha = (a^\alpha)^f$ для всех $a \in A$ и $\alpha \in \Omega$. Простая Ω-группа — это неединичная Ω-группа, не имеющая нетривиальных нормальных Ω-подгрупп.

Определение 1. Класс Ω-групп $\mathfrak{F}$ называется Ω-*формацией*, если выполняются следующие условия:

1) из $H \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq H$, где N — Ω-группа, следует $H/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$, где A и B — Ω-допустимые нормальные подгруппы Ω-группы H, то $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — Ω-формация. Тогда подгруппа $H^{\mathfrak{F}}$ Ω-группы H, равная пересечению всех тех нормальных Ω-подгрупп X из H, для которых H/X принадлежит $\mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* ($\mathfrak{F}$-residual) Ω-группы H.

Если A — Ω-группа, то через $\mathrm{form}_\Omega(A)$ обозначается наименьшая Ω-формация, содержащая группу A. В дальнейшем мы будем без ссылок использовать следующий простой результат о формации $\mathrm{form}_\Omega(A)$.

Предложение. *Пусть A — простая Ω-группа. Тогда каждая неединичная группа из $\mathrm{form}_\Omega(A)$ является прямым произведением Ω-групп, Ω-изоморфных A.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — класс групп, состоящий из единичной группы и из всех тех Ω-групп, которые являются прямыми произведениями Ω-групп, Ω-изоморфных A. Ясно, что класс $\mathfrak{F}$ замкнут относительно образования Ω-фактор-групп и взятия нормальных Ω-подгрупп. Пусть N_1 и N_2 — нормальные Ω-подгруппы Ω-группы H такие, что $H/N_1 \in \mathfrak{F}$, $H/N_2 \in \mathfrak{F}$ и $N_1 \cap N_2 = 1$. Ясно, что в Ω-группе H/N_1 найдется такая нормальная Ω-подгруппа B/N_1, что $H/N_1 = N_1N_2/N_1 \times B/N_1$. Отсюда следует, что

$$H = N_2B, \quad N_2 \cap B \subseteq N_1N_2 \cap B = N_1.$$

Так как $N_1 \cap N_2 = 1$, отсюда вытекает, что $N_2 \cap B = 1$, значит, $H = N_2 \times B$, где

$$N_2 \simeq N_1N_2/N_1 \in \mathfrak{F},\ B \simeq H/N_2 \in \mathfrak{F}.$$

Таким образом, $\mathfrak{F}$ — формация и тем самым $\mathrm{form}_\Omega(A) \subseteq \mathfrak{F}$. Обратное включение очевидно. Предложение доказано.

3. Короны и их дополнения

Нам потребуется понятие группы операторов (см. [6]). Говорят, что группа G является *группой операторов группы* A, если отмечен некоторый гомоморфизм группы G в $\mathrm{Aut}\,A$; считается, что операторы из G действуют на A как соответствующие им автоморфизмы.

Зафиксируем до конца статьи группу G в качестве группы операторов для всех рассматриваемых групп.

В частности, группу G будем рассматривать как группу операторов для всех ее нормальных секций, полагая, что на нормальной секции H/K группа G действует естественным образом: $(hK)^g = h^g K$ для всех $h \in H$ и $g \in G$.

Для произвольной G-группы A через $C_G(A)$ будем обозначать совокупность тех операторов из G, которые действуют тождественно на A. Теперь определение короны по предложению Л. А. Шеметкова может быть введено следующим образом.

Определение 3. Пусть A — простая G-группа, $\mathfrak{F} = \mathrm{form}_G(A)$, $C = C_G(A)$. Фактор-группу $C/C^{\mathfrak{F}}$ будем называть *короной* группы A в G и обозначать через $\mathrm{Cr}_G(A)$.

Из определения следует, что $\mathrm{Cr}_G(A)$ либо прямое произведение G-групп, G-изоморфных A, либо единичная группа.

Нам потребуются еще некоторые понятия, связанные со свойствами нормальных факторов. Пусть M — подгруппа, а H/K — нормальный фактор группы G. Говорят, что 1) M является *дополнением фактора* H/K, если $MH = G$ и $M \cap H = K$ (в этом случае H/K называется *дополняемым фактором*); 2) M покрывает фактор H/K, если $MK \supseteq H$; 3) M изолирует фактор H/K, если $M \cap H \subseteq K$.

Если в качестве A взять некоторый дополняемый главный фактор H/K группы G, то в этом случае $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ — это в точности корона фактора H/K в смысле работы [1] (см. также [5]).

Гашюц в [1] первым обратил внимание на наличие у короны замечательных свойств, связанных с покрытием-изолированием главных факторов и с дополнениями самой короны. Приведем этот результат в виде следующей теоремы.

Теорема 1 (В. Гашюц). *Пусть A — простая G-группа. Если группа G обладает дополняемым главным фактором, G-изоморфным A, то*

1) *корона $\mathrm{Cr}_G(A)$ дополняема в группе G;*

2) *любые два дополнения короны $\mathrm{Cr}_G(A)$ сопряжены в G;*

3) *подгруппа B из G является дополнением короны $\mathrm{Cr}_G(A)$ тогда и только тогда, когда B изолирует все дополняемые главные факторы группы G, которые G-изоморфны A, и покрывает все остальные главные факторы группы G;*

4) *если заданный главный ряд группы G имеет t дополняемых главных факторов, G-изоморфных A, и если $M_1, M_2, \dots, M_t$ — максимальные подгруппы группы G, изолирующие различные дополняемые главные факторы этого ряда, то $M_1 \cap \dots \cap M_t$ — дополнение короны $\mathrm{Cr}_G(A)$.*

4. Частично префраттиниевы подгруппы

Выбирая для каждой короны в группе G по одному дополнению и пересекая их, Гашюц [1] доказывает, что эти пересечения сопряжены, изолируют все дополняемые главные факторы и покрывают все фраттиниевы главные факторы группы G. Такие пересечения он и называет *префраттиниевыми подгруппами.*

Естественным образом возникает вопрос о рассмотрении подгрупп, изолирующих не одну и не все короны в группе G, как это сделано в [1], а некоторую выделенную систему корон. Этот подход и реализуется ниже.

Рассмотрим систему $\mathfrak{M}$ простых попарно не G-изоморфных G-групп со свойством: каждая группа из $\mathfrak{M}$ G-изоморфна дополняемому главному фактору группы G. Такую систему $\mathfrak{M}$ будем называть *главной системой группы*

G. Главный фактор группы G будем называть *главным* $\mathfrak{M}$*-фактором*, если он G-изоморфен группе из $\mathfrak{M}$. Главную систему $\mathfrak{M}$ будем называть *полной главной системой* и обозначать через $\mathfrak{M}(G)$, если $|\mathfrak{M}|$ — число всех попарно не G-изоморфных дополняемых главных факторов группы G.

В дальнейшем изложении мы будем часто использовать запись вида $\mathfrak{M} = \{A_1, \dots, A_t\}$, всегда предполагая, что A_i и A_j не G-изоморфны при любых $i \neq j$.

Определение 4. Если $\mathfrak{M} = \{A_1, \dots, A_t\}$ — некоторая главная система группы G, то подгруппа $B_1 \cap \dots \cap B_t \cap G$, где B_i — дополнение короны $\mathrm{Cr}_G(A_i)$ в группе G, $1 \leq i \leq t$, называется $\mathfrak{M}$*-префраттиниевой подгруппой* группы G. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то полагаем, что $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G совпадает с группой G.

Из определения 4 следует, что если $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(G)$ — полная главная система, то $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G — это обычная префраттиниева подгруппа группы G. Если же множество $\mathfrak{M}$ одноэлементно, то $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа совпадает с дополнением некоторой короны в группе G.

Определение 5. Подгруппа H группы G называется *частично префраттиниевой подгруппой*, если она является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой для некоторой главной системы $\mathfrak{M}$ группы G.

Теорема 2. *Для любой главной системы $\mathfrak{M}$ группы G каждая ее $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа изолирует все дополняемые главные $\mathfrak{M}$-факторы и покрывает все остальные главные факторы группы G.*

Доказательство. Если $|\mathfrak{M}| = 0$, то утверждение теоремы очевидно. Если $|\mathfrak{M}| = 1$, то оно следует из теоремы 1. Поэтому полагаем далее, что $|\mathfrak{M}| = t > 1$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{A_1, \dots, A_t\}$ и B_i — дополнение короны группы A_i в группе G, $i = 1, \dots, t$. Если H/K — дополняемый главный $\mathfrak{M}$-фактор, то ввиду теоремы 1 фактор H/K изолируется подгруппой B_i для некоторого $i \in \{1, \dots, t\}$, а значит, H/K изолируется и подгруппой $B_1 \cap \dots \cap B_t$. Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что индекс $|G : B_1 \cap \dots \cap B_t|$ равен произведению порядков всех дополняемых главных $\mathfrak{M}$-факторов главного ряда группы G.

Применим индукцию по t. При $t = 1$ утверждение об индексе вытекает из теоремы 1.

Пусть $\mathfrak{M}(G) = \{A_1, \dots, A_r\}$. Ввиду теоремы 4.2 из [1] при подходящей нумерации G-простых групп $A_1, \dots, A_r$ существует главный ряд:

$$\begin{aligned} h : G = G_{10} \supset \dots \supset G_{1a_1} \supseteq F_{10} \dots \supseteq F_{1b_1} \\ = G_{20} \supset \dots \supset G_{2a_2} \supseteq F_{20} \supseteq \dots \supseteq F_{2b_2} \\ \dots = G_{r0} \supset \dots \supset G_{ra_r} \supseteq F_{r0} \supseteq \dots \supseteq F_{rb_r} = 1, \end{aligned}$$

в котором для каждого $i \in \{1, \dots, r\}$ факторы G_{ik}/G_{ik+1} дополняемы и G-изоморфны, факторы F_{il}/F_{il+1} фраттиниевы, а a_i — число множителей в разложении соответствующей короны в прямое произведение простых G-групп.

Пусть A_s — простая G-группа из $\mathfrak{M}$ такая, что все дополняемые главные $\mathfrak{M}$-факторы ряда h, которые не G-изоморфны A_s, расположены выше, чем дополняемые главные факторы ряда h, G-изоморфные A_s. Тогда

$$B_1 \cap \dots \cap B_{s-1} \cap B_{s+1} \cap \dots \cap B_t / G_{s0}$$

является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой группы G/G_{s0}. Так как подгруппа G_{s0} содержится в $B_1 \cap \dots \cap B_{s-1} \cap B_{s+1} \cap \dots \cap B_t$, а B_s является дополнением фактора G_{s0}/G_{sa_s}, то

$$|G : B_1 \cap \dots \cap B_t| = |G : B_1 \cap \dots \cap B_{s-1} \cap B_{s+1} \cap \dots \cap B_t||G : B_s|.$$

По индукции индекс $|G : B_1 \cap \dots \cap B_{s-1} \cap B_{s+1} \cap \dots \cap B_t|$ равен произведению порядков всех дополняемых главных $\mathfrak{M}_1$-факторов ряда h, где $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \setminus \{A_s\}$. Ввиду теоремы 1 индекс $|G : B_s|$ равен произведению порядков всех дополняемых главных факторов ряда h, G-изоморфных A_s. Отсюда следует требуемое утверждение об индексе $|G : B_1 \cap \dots \cap B_t|$. Теорема доказана.

Нам понадобится далее следующая лемма, известная как аргумент Гашюца (доказательство см. в [1]).

Лемма 1. *Если A, B и AB — подгруппы группы G, то для любых элементов $x, y \in AB$ подгруппы $A^x \cap B^y$ и $A \cap B$ сопряжены в AB.*

Лемма 2. *Пусть $\{A_1, \dots, A_t\}$ — некоторая главная система группы G и пусть B_i — дополнение короны группы A_i в группе G, $i = 1, \dots, t$. Если $t > 1$, то $(B_1 \cap \dots \cap B_{t-1})B_t = G$.*

Доказательство. Пусть C/R — корона группы A_t в группе G. Так как подгруппа B_t дополняет фактор C/R, то $B_tC = G$ и $B_t \cap C = R$. Ввиду теоремы 1 подгруппа $B_1 \cap \dots \cap B_{t-1}$ покрывает фактор C/R, а значит, $C \subseteq R(B_1 \cap \dots \cap B_{t-1})$. Отсюда окончательно имеем

$$G = CB_t \subseteq (B_1 \cap \dots \cap B_{t-1})RB_t = (B_1 \cap \dots \cap B_{t-1})B_t.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Для любой главной системы $\mathfrak{M}$ группы G любые две $\mathfrak{M}$-префраттиниевы подгруппы из G сопряжены.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то утверждение теоремы очевидно. Если же $|\mathfrak{M}| = 1$, то оно следует из теоремы 1. Поэтому полагаем далее, что $|\mathfrak{M}| = t > 1$.

Пусть $\mathfrak{M} = \{A_1, \dots, A_t\}$ и B_i, B'_i — дополнения короны группы A_i в группе $G, i = 1, \dots, t$. Покажем, что подгруппы $B_1 \cap \dots \cap B_t$ и $B'_1 \cap \dots \cap B'_t$ сопряжены. Применим индукцию по t.

Так как для всех $m < t$ теорема выполняется по индукции, подгруппы $B_1 \cap \dots \cap B_{t-1}$ и $B'_1 \cap \dots \cap B'_{t-1}$ сопряжены. На основании теоремы 1 сопряжены и подгруппы B_t и B'_t. Кроме того, ввиду леммы 2

$$(B_1 \cap \dots \cap B_{t-1})B_t = G.$$

Отсюда на основании леммы 1 найдется такой элемент $x \in G$, что

$$B_1 \cap \dots \cap B_t = (B'_1 \cap \dots \cap B'_t)^x.$$

Теорема доказана.

Следующая лемма прямо вытекает из теоремы 1.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ — непустая главная система группы G. Подгруппа B группы G является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$B = M_1 \cap \dots \cap M_r,$$

где $M_1, \dots, M_r$ — максимальные подгруппы группы G, изолирующие различные дополняемые главные $\mathfrak{M}$-факторы некоторого главного ряда группы G, а r — число всех дополняемых главных $\mathfrak{M}$-факторов этого ряда.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторая главная система группы G. Если B — $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$, то BN/N — $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G/N.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть

$$h : 1 = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$$

— главный ряд группы G, проходящий через подгруппу N, т. е. $N = G_s$ для некоторого $s \in \{0, 1, \dots, n\}$. Пусть $G_{i_1}/G_{i_1-1}, \dots, G_{i_r}/G_{i_r-1}$ — все дополняемые главные $\mathfrak{M}$-факторы ряда h, причем подгруппы $G_{i_1}, \dots, G_{i_m}$ содержатся в N, а подгруппы $G_{i_{m+1}}, \dots, G_{i_r}$ содержат N.

Ввиду леммы 3 найдутся такие максимальные подгруппы $M_1, \dots, M_r$, что $B = M_1 \cap \dots \cap M_r$, причем подгруппа M_j изолирует главный фактор G_{i_j}/G_{i_j-1}, $j = 1, \dots, r$. Тогда

$$\begin{aligned} BN/N &= (M_1 \cap \dots \cap M_m \cap M_{m+1} \cap \dots \cap M_r)N/N \\ &= (M_1 \cap \dots \cap M_m)N \cap (M_{m+1} \cap \dots \cap M_r)/N \\ &= (G \cap M_{m+1} \cap \dots \cap M_r)/N = M_{m+1}/N \cap \dots \cap M_r/N \cap G/N. \end{aligned}$$

Понятно, что $\{(G_{i_{m+1}}/N)/(G_{i_{m+1}-1}/N), \dots, (G_{i_r}/N)/(G_{i_r-1}/N)\}$ — множество всех дополняемых главных $\mathfrak{M}$-факторов ряда

$$1 = G_s/N \subset G_{s+1}/N \subset \dots \subset G_n/N = G/N.$$

Кроме того, для каждого $j = m+1, \dots, r$ максимальная подгруппа M_j/N дополняет главный фактор $(G_{i_j}/N)/(G_{i_j-1}/N)$. Значит, $BN/N = M_{m+1}/N \cap \dots \cap M_r/N$ — $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G/N. Теорема доказана.

5. Решетка $\mathfrak{S}(G, \Sigma)$

Определение 6. Пусть $\mathfrak{M}(G) = \{A_1, \dots, A_s\}$ — полная главная система группы G и B_i — дополнение к короне группы A_i в группе G, $i = 1, \dots, s$. Тогда система $\Sigma = \{B_1, \dots, B_s\}$ называется *гашюцевой системой* группы G.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — некоторая главная система группы G. Тогда $\mathfrak{M} = \{A^*_{i_1}, \dots, A^*_{i_k}\}$, где $A^*_{i_j}$ G-изоморфна группе A_{i_j} из полной главной системы $\mathfrak{M}(G) = \{A_1, \dots, A_s\}$, $j = 1, \dots, k$. Говорят, что $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа B группы G *ассоциирована с гашюцевой системой* Σ, если она представима в виде $B = B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k} \cap G$, где $B_{i_j} \in \Sigma$ для всех $j = 1, \dots, k$.

Частично префраттиниевой подгруппой группы G, ассоциированной с гашюцевой системой Σ, будем называть всякую подгруппу B из G, удовлетворяющую следующим условиям: 1) B является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой для некоторой главной системы $\mathfrak{M}$ группы G; 2) B ассоциирована с Σ.

Множество всех частично префраттиниевых подгрупп группы G, ассоциированных с гашюцевой системой Σ, обозначим через $\mathfrak{S}(G, \Sigma)$.

Понятно, что в случае $\mathfrak{M} = \varnothing$ $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G, ассоциированная с Σ, совпадает с G, т. е. всегда $G \in \mathfrak{S}(G, \Sigma)$.

На основании изложенного выше для гашюцевой системы Σ справедливы следующие утверждения:

1) $B_iB_j = B_jB_i = G$ для любых различных B_i и B_j из Σ;

2) если $N \trianglelefteq G$, то $\Sigma N/N$ — гашюцева система группы G/N;

3) $\bigcup\limits_{x \in G} \mathfrak{S}(G, \Sigma^x)$ — множество всех частично префраттиниевых подгрупп группы G.

Лемма 4. *Если Σ — гашюцева система группы G и B, B' — элементы из $\mathfrak{G}(G,\Sigma)$, то*

1) $B \cap B' \in \mathfrak{G}(G,\Sigma)$;

2) $BB' = B'B \in \mathfrak{G}(G,\Sigma)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}(G) = \{A_1, \dots, A_s\}$, $\Sigma = \{B_1, \dots, B_s\}$. Пусть B — $\mathfrak{M}_1$-префраттиниева подгруппа, B' — $\mathfrak{M}_2$-префраттиниева подгруппа группы G. Если

$$\mathfrak{M}_1 = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \{A_{j_1}, \dots, A_{j_l}\}, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2,$$

то по определению

$$B \cap B' = (B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k}) \cap (B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_l})$$

является $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппой группы G, принадлежащей $\mathfrak{G}(G,\Sigma)$. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \{A_1, \dots, A_t\}$. Тогда

$$BB' = (B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_k})(B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_l}) \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_t,$$

т. е. BB' содержится в $(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2)$-префраттиниевой подгруппе $C = B_1 \cap \dots \cap B_t$.

Пусть C_i/R_i — корона группы A_i в группе G и $n_i = |C_i/R_i|$, $i = 1, \dots, s$. Ввиду теоремы 2 имеем

$$|B| = \frac{|G|}{n_{i_1} \dots n_{i_k}}, \quad |B'| = \frac{|G|}{n_{j_1} \dots n_{j_l}}.$$

Так как $B \cap B'$ — $\mathfrak{M}$-префраттиниева подгруппа группы G, снова применяя теорему 2, получаем

$$|B \cap B'| = \frac{|G| n_1 \dots n_t}{n_{i_1} \dots n_{i_k} n_{j_1} \dots n_{j_l}}.$$

Теперь можно вычислить $|BB'|$:

$$|BB'| = \frac{|B||B'|}{|B \cap B'|} = \frac{|G|}{n_1 \dots n_t} = |C|.$$

Отсюда и из $BB' \subseteq C$ следует, что $BB' = C$. Лемма доказана.

Теорема 5. *Для любой группы G и любой ее гашюцевой системы Σ справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{G}(G,\Sigma)$ — подрешетка решетки всех подгрупп группы G; нулем этой решетки является префраттиниева подгруппа, ассоциированная с Σ, а единицей — сама группа G;

2) решетка $\mathfrak{G}(G,\Sigma)$ изоморфна решетке $(P(X), \cup, \cap)$ всех подмножеств $|\Sigma|$-элементного множества X; в частности, $|\mathfrak{G}(G,\Sigma)| = 2^{|\Sigma|}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}(G) = \{A_1, \dots, A_s\}$, $\Sigma = \{B_1, \dots, B_s\}$. То, что $\mathfrak{G}(G,\Sigma)$ — подрешетка решетки всех подгрупп группы G, следует из леммы 4. Так как для любой частично префраттиниевой подгруппы B, ассоциированной с Σ, справедливо включение

$$B_1 \cap \dots \cap B_s \subseteq B \subseteq G,$$

префраттиниева подгруппа $B_1 \cap \dots \cap B_s$ — нуль решетки $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$, а G — ее единица.

Пусть $X = \{1, \dots, s\}$. Рассмотрим отображение f, ставящее в соответствие каждому подмножеству $\{i_1, \dots, i_k\}$ множества X $\mathfrak{M}$-префраттиниеву подгруппу из $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$, где $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(G) \setminus \{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$. Покажем, что f и является искомым изоморфизмом решетки $(P(X), \cup, \cap)$ на $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$.

Пусть $X_1 = \{i_1, \dots, i_k\}$, $X_2 = \{j_1, \dots, j_l\}$, $\mathfrak{M}_1 = \{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$, $\mathfrak{M}_2 = \{A_{j_1}, \dots, A_{j_l}\}$. Так как

$$\mathfrak{M}(G) \setminus (\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) = (\mathfrak{M}(G) \setminus \mathfrak{M}_1) \cap (\mathfrak{M}(G) \setminus \mathfrak{M}_2),$$

$$\mathfrak{M}(G) \setminus (\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2) = (\mathfrak{M}(G) \setminus \mathfrak{M}_1) \cup (\mathfrak{M}(G) \setminus \mathfrak{M}_2),$$

ввиду леммы 4 имеем

$$\begin{aligned} f(X_1 \cup X_2) &= \bigcap\{B_i \mid B_i \in \Sigma,\, i \in X \setminus (X_1 \cup X_2)\} \\ &= \left(\bigcap\{B_i \mid B_i \in \Sigma,\, i \in X \setminus X_1\}\right)\left(\bigcap\{B_j \mid B_j \in \Sigma,\, j \in X \setminus X_2\}\right) = f(X_1)f(X_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(X_1 \cap X_2) &= \bigcap\{B_i \mid B_i \in \Sigma,\, i \in X \setminus (X_1 \cap X_2)\} \\ &= \left(\bigcap\{B_i \mid B_i \in \Sigma,\, i \in X \setminus X_1\}\right)\left(\bigcap\{B_j \mid B_j \in \Sigma,\, j \in X \setminus X_2\}\right) = f(X_1) \cap f(X_2). \end{aligned}$$

Кроме того, отображение f является биекцией $P(X)$ на $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$. Значит, f — изоморфизм решетки $P(X)$ на $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Для любой группы G и любой ее гашюцевой системы Σ решетка $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ является атомной и коатомной. Коатомами решетки $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ являются все подгруппы $B_1, \dots, B_s$ из Σ, а атомами — подгруппы $S_i = B_1 \cap \dots \cap B_{i-1} \cap B_{i+1} \cap \dots \cap B_s$ для всех $i = 1, \dots, s$.*

Следствие 2. *Для любой группы G и любой ее гашюцевой системы Σ решетка $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ является булевой. Дополнением $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппы $B \in \mathfrak{G}(G, \Sigma)$ в решетке $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ является $(\mathfrak{M}(G) \setminus \mathfrak{M})$-префраттиниева подгруппа B', ассоциированная с системой Σ.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{M}(G) = \{A_1, \dots, A_s\}$, и пусть $S_1, \dots, S_s$ — атомы решетки $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$, P — префраттиниева подгруппа группы G, ассоциированная с системой Σ. Тогда*

1) *подгруппа S_i покрывает все фраттиниевы и все дополняемые главные факторы группы G, которые G-изоморфны A_i, и изолирует все остальные главные факторы группы G;*

2) *если C_i/R_i — корона группы A_i в группе G, то $|S_i| = |C_i/R_i||P|$;*

3) *для любых различных i и j из $\{1, \dots, s\}$ справедливы равенства $S_iS_j = S_jS_i$ и $S_i \cap S_j = P$;*

4) *если B — $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$-префраттиниева подгруппа группы G, ассоциированная с гашюцевой системой Σ, то $B = S_{i_1} \dots S_{i_k}$;*

5) *$G = S_1 \dots S_s$, $S_1 \cap \dots \cap S_s = P$, $|G| = |C_1/R_1| \dots |C_s/R_s||P|$.*

Следствие 4. *Пусть Σ — некоторая гашюцева система группы G. Группа G является p-группой для некоторого простого числа p тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ — цепь.*

Следствие 5. *Пусть $|\mathfrak{M}(G)| = s$, $S_1, \dots, S_s$ — атомы решетки $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$. Тогда для любой главной системы $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}(G)$ и любой $\mathfrak{M}$-префраттиниевой подгруппы H группы G найдутся такие атомы $S_{i_1}, \dots, S_{i_k} \in \mathfrak{G}(G, \Sigma)$ и такой элемент $x \in G$, что $H = S_{i_1}^x \dots S_{i_k}^x$.*

Замечания. 1. Построение обобщенно префраттиниевых подгрупп по пути выделения корон дополняемых $\mathfrak{X}$-эксцентральных главных факторов группы привело к понятию $\mathfrak{X}$-префраттиниевой подгруппы (см., например [7, 8]). Следующий пример показывает, что частично префраттиниевых подгрупп гораздо больше, чем $\mathfrak{X}$-префраттиниевых подгрупп.

Пусть $G = D_1 \times D_2$, где D_1 и D_2 — группы, изоморфные симметрической группе степени 3, и N_1, N_2 — силовские 3-подгруппы соответственно групп D_1, D_2. Тогда $\mathfrak{M}(G) = \{N_1, N_2, D_1/N_1\}$. Если $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, то ввиду изоморфизма $G/C_G(N_1) \simeq G/C_G(N_2)$ минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 группы G либо одновременно $\mathfrak{X}$-центральны, либо одновременно $\mathfrak{X}$-эксцентральны. Поэтому $\mathfrak{X}$-префраттиниевы подгруппы группы G сопряжены с одной из подгрупп $1, G, N_1N_2, R_1R_2$, где R_1 и R_2 — силовские 2-подгруппы соответственно групп D_1 и D_2. В то же время подгруппы N_1 и N_2 являются $\mathfrak{M}$-префраттиниевыми соответственно в случаях $\mathfrak{M} = \{N_2, D_1/N_1\}$ и $\mathfrak{M} = \{N_1, D_1/N_1\}$.

2. Из следствия 5 вытекает, что любая частично префраттиниева подгруппа группы G (в том числе и любая $\mathfrak{X}$-префраттиниева подгруппа) может быть построена из атомов решетки $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$.

3. Если префраттиниева подгруппа B группы G ассоциирована с гашюцевой системой Σ, то $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ — подрешетка интервала $[B, G]$, который ввиду [3] является решеткой с дополнениями. Простые примеры показывают, что в общем случае решетка $[B, G]$ не будет даже модулярной.

4. Из теоремы 4 и следствия 3 видно, что свойства атомов и коатомов решетки $\mathfrak{G}(G, \Sigma)$ двойственны свойствам соответственно силовских подгрупп и p-дополнений группы. Например, если $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ — силовская база группы G, то множество всех холловых подгрупп группы G, ассоциированных с Σ (т. е. равных произведению элементов из Σ), — подрешетка решетки всех подгрупп группы G, причем эта решетка является булевой и содержит 2^n элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gaschütz W.* Praefrattinigruppen // Arch. Math. 1962. Bd 13, N 3. S. 418–426.
2. *Kurzweil H.* Die Praefrattinigruppe im Intervall eines Untergruppenverbands // Arch. Math. 1989. Bd 53, N 2. S. 235–244.
3. *Hauck P., Kurzweil H.* A lattice-theoretic characterization of prefrattini subgroups // Manuscripta Math. 1990. V. 66. P. 295–301.
4. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
5. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
6. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
7. *Hawkes T. O.* Analogues of prefrattini subgroups // Proc. Intern. Conf. Theory of Groups. Canberra, 1965. P. 145–150.
8. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

Статья поступила 31 марта 2007 г.

Каморников Сергей Федорович
Гомельский гос. университет им. Ф. Скорины, математический факультет,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь