Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.927.2

РАЗРЕШИМЫЕ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА НЕАБЕЛЕВЫ ПОДГРУППЫ БЕСКОНЕЧНЫХ РАНГОВ

О. Ю. Дашкова

Аннотация. Исследуются неабелевы разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности и бесконечного секционного p-ранга, $p \geq 0$, у которых все собственные неабелевы подгруппы бесконечного секционного p-ранга имеют конечную центральную размерность. Получено описание строения групп данного класса.

Ключевые слова: линейная группа, разрешимая группа, специальный ранг группы, секционный p-ранг группы, центральная размерность линейной группы.

1. Введение

Группа G всех автоморфизмов векторного пространства A над полем F называется *полной линейной группой* и обозначается $GL(F, A)$. Подгруппы группы $GL(F, A)$ называются *линейными группами.* Если размерность $\dim_F A$ векторного пространства A над F конечна, то группа G называется *конечномерной линейной группой* и $GL(F, A)$ в этом случае может быть отождествлена с группой невырожденных квадратных матриц размера $n \times n$, где $n = \dim_F A$.

В случае, когда $\dim_F A$ бесконечна, линейные группы исследовались очень мало. Более того, такие исследования требуют дополнительных ограничений на рассматриваемые группы. Одним из важных ограничений такого типа является финитарность линейной группы. Группа G называется *финитарной*, если для каждого ее элемента g подпространство $C_A(g)$ имеет конечную коразмерность в A. Финитарные линейные группы исследовались рядом автором (см., например, [1, 2]). В работах [3, 4] обсуждались другие типы условий конечности, налагаемых на линейные группы, аналогичные хорошо известным условиям минимальности и максимальности для подгрупп.

Если H — подгруппа группы $GL(F, A)$, то H реально действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Размерность фактор-пространства $A/C_A(H)$ назовем *центральной размерностью* группы H и обозначим символом $\mathrm{centdim}_F(H)$. В частности, группа G является финитарной линейной группой, если любая ее циклическая подгруппа имеет конечную центральную размерность. Отметим, что центральная размерность линейной группы зависит от векторного пространства, на котором она действует. В [5] изучались линейные группы бесконечной центральной размерности и бесконечного ранга, у которых любая собственная подгруппа бесконечного ранга имеет конечную центральную размерность.

В настоящей работе исследуются неабелевы разрешимые линейные группы бесконечной центральной размерности, у которых определенные условия конечности налагаются на собственные неабелевы подгруппы определенных бесконечных рангов. Говорят, что группа G имеет *конечный* 0-*ранг* $r_0(G) = r$, если G обладает конечным субнормальным рядом с r бесконечными циклическими факторами, все остальные факторы которого периодические. Известно, что 0-ранг не зависит от выбора ряда и является числовым инвариантом. Разрешимые группы конечного 0-ранга изучены достаточно хорошо [6].

Пусть теперь p — простое число. Говорят, что группа G имеет *конечный секционный* p-*ранг* $r_p(G) = r$, если каждая элементарная абелева p-секция U/V группы G имеет порядок, не превосходящий p^r, и существует элементарная абелева p-секция U/V такая, что $|U/V| = p^r$. В нашей работе мы будем говорить о секционном p-ранге, подразумевая, что $p = 0$ или p — простое число, делая необходимые оговорки, если это требуется. Нас интересуют неабелевы группы бесконечной центральной размерности и бесконечного секционного p-ранга, чьи собственные неабелевы подгруппы бесконечного секционного p-ранга имеют конечную центральную размерность. Как оказалось, при $p = 0$ разрешимых групп такого типа не существует вообще. Однако в случае простого числа p такие разрешимые группы существуют и их строение описано в теореме 3.3.

Получены и другие результаты о неабелевых линейных группах бесконечной центральной размерности и бесконечного ранга, удовлетворяющих заданным условиям. В дальнейшем для удобства изложения секционный p-ранг группы будем называть p-*рангом* группы.

2. Предварительные результаты

В этом разделе мы установим некоторые свойства неабелевых групп, у которых каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Хотя эти результаты элементарны, они играют важную роль.

Лемма 2.1. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $\operatorname{centdim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(i) *Если U и V — собственные неабелевы подгруппы группы G и $G = \langle U, V\rangle$, то по крайней мере одна из подгрупп U или V имеет конечный p-ранг.*

(ii) *Если H — собственная неабелева подгруппа группы G, имеющая бесконечный p-ранг, то любая подгруппа группы H и любая собственная подгруппа группы G, содержащая H, имеет конечную центральную размерность.*

(iii) *Если K и L — собственные подгруппы группы G, содержащие неабелеву подгруппу H, имеющую бесконечный p-ранг, то $\langle K, L\rangle$ является собственной подгруппой группы G.*

Лемма 2.2. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $\operatorname{centdim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Если H — собственная нормальная подгруппа группы G бесконечного p-ранга и фактор-группа G/H конечно порождена, то G/H является циклической q-группой для некоторого простого числа q.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай неабелевой подгруппы H.

Тогда для любого элемента $g \in G$, $g \notin H$, подгруппа $\langle H, g\rangle$ неабелева. Предположим, что $G = \langle H, S\rangle$ для некоторого конечного множества S с тем свойством, что если R — собственное подмножество множества S, то $G \neq \langle H, R\rangle$. Пусть S состоит из элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$. Если $k > 1$, то $\langle H, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\rangle$ и $\langle H, x_k\rangle$ являются собственными неабелевыми подгруппами бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1. Отсюда следует, что фактор-группа G/H циклическая. В случаях, когда фактор-группа G/H бесконечна либо G/H конечна, но $|\pi(G/H)| > 1$, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1. Следовательно, фактор-группа G/H — циклическая q-группа для некоторого простого числа q.

Пусть теперь подгруппа H абелева. Символом H_1 обозначим максимальную нормальную абелеву подгруппу группы G, содержащую подгруппу H, а символом C — централизатор $C_G(H_1)$. В силу определения централизатора для любого элемента $g \in G$, $g \notin C$, подгруппа $\langle C, g\rangle$ неабелева. Поэтому в случае, когда фактор-группа G/C не является циклической q-группой для некоторого простого числа q, группа G представима в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1.

Осталось рассмотреть случай, когда фактор-группа $G/C = \langle g\rangle C/C$ — циклическая q-группа для некоторого простого числа q. Пусть подгруппа C абелева, и пусть a — элемент, не содержащийся в центре группы G. Положим

$$M = C/\langle a\rangle^G, \quad G_1 = G/\langle a\rangle^G.$$

По построению фактор-группа M имеет бесконечный p-ранг. Обозначим через T периодическую часть группы M. Пусть $p \geq 0$ и $M \neq T$. Тогда фактор-группа M/T — нетривиальная абелева группа без кручения. Рассмотрим сначала случай, когда M/T является делимой. Поскольку фактор-группа G/C конечна, согласно теореме 5.9 из [7] M/T разлагается в прямое произведение G-допустимых подгрупп конечного p-ранга. Если p-ранг фактор-группы M/T бесконечен, то группа G_1 представима в виде произведения двух своих собственных подгрупп $N_1 = S_1/\langle a\rangle^G$ и $N_2 = S_2/\langle a\rangle^G$ бесконечного p-ранга таких, что подгруппы S_1 и S_2 содержат элемент g. Отсюда следует, что $G = S_1S_2$. Следовательно, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1.

Рассмотрим случай, когда фактор-группа M/T не является делимой. Тогда найдется простое число r, для которого фактор-группа $(M/T)/(M/T)^r$ нетривиальна. Если $r \neq q$ и фактор-группа $(G_1/T)/(M/T)^r$ бесконечна, то с учетом теоремы 5.9 из [7] группа G_1 представима в виде произведения двух своих собственных подгрупп $G_2 = L/\langle a\rangle^G$ и $G_3 = F/\langle a\rangle^G$ бесконечного p-ранга, где подгруппы L и F содержат элемент g. По построению подгруппы L и F неабелевы и $G = LF$; противоречие с леммой 2.1. Если же $r = q$ и фактор-группа $(G_1/T)/(M/T)^r$ бесконечна, то с учетом леммы 6.34 из [8] фактор-группа $K = (G_1/T)/(M/T)^r$ нильпотентна и имеет бесконечный q-ранг. По лемме 2.22 из [8] фактор-группа K/K' бесконечна. Отсюда следует, что группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, содержащих элемент g; противоречие с леммой 2.1.

Если фактор-группа $(M/T)/(M/T)^r$ конечна для любого простого числа r и найдутся два различных простых числа r_1 и r_2, отличные от q, для которых фактор-группы $(M/T)/(M/T)^{r_1}$ и $(M/T)/(M/T)^{r_2}$ нетривиальны, то группа $(G_1/T)/(M/T)^{r_1r_2}$ является расширением абелевой $\{r_1, r_2\}$-группы при помощи циклической q-группы. Следовательно, группа G представима в виде произведения двух своих собственных подгрупп $L_1/\langle a\rangle^G$ и $F_1/\langle a\rangle^G$ бесконечного p-ранга, где подгруппы L и F содержат элемент g. По построению подгруппы L_1 и F_1 неабелевы и $G = L_1F_1$. Вновь получили противоречие с леммой 2.1. Если простых чисел r_1 и r_2 с заданным свойством не существует, то фактор-группа G_1/T содержит нормальную делимую абелеву подгруппу без кручения конечного индекса, поэтому применимы те же рассуждения, что и в случае делимой фактор-группы M/T.

Если же подгруппа M периодическая, то обозначим через M_0 силовскую p'-подгруппу группы M. Фактор-группа G_1/M_0 является расширением абелевой p-группы бесконечного p-ранга при помощи циклической q-группы. Если фактор-группа M/M_0 является почти делимой, то обозначим через M_1/M_0 ее нижний слой. Фактор-группа G_1/M_1 является почти делимой абелевой p-группой бесконечного p-ранга, а подгруппа M_1 также имеет бесконечный p-ранг. Согласно теореме 5.9 из [7] фактор-группа G_1/M_1 представима в виде произведения двух своих нетривиальных собственных подгрупп N_1/M_1 и N_2/M_1, где $N_1 = L_2/\langle a\rangle^G$ и $N_2 = F_2/\langle a\rangle^G$, причем подгруппы L_2 и F_2 содержат g. По построению подгруппы L_2 и F_2 неабелевы, имеют бесконечный p-ранг и выполняется равенство $G = L_2F_2$; противоречие с леммой 2.1. Осталось рассмотреть случай, когда G_1/M_0 не является почти делимой. Если период фактор-группы M/M_0 бесконечен, то рассмотрим, как и в предыдущем случае, фактор-группу G_1/M_1. Она содержит нормальную абелеву p-подгруппу бесконечного p-ранга конечного индекса. К фактор-группе G_1/M_1 применимы те же рассуждения, что и в предыдущем случае. Пусть теперь период фактор-группы M/M_0 конечен. Если $q \neq p$, то по теореме 5.9 из [7] M/M_0 разлагается в прямую сумму бесконечного числа G-допустимых подгрупп. Следовательно, фактор-группа G_1/M_0 разложима в произведение двух собственных подгрупп бесконечного p-ранга, содержащих элемент gM_0/M_0. Поэтому группа G представима в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1. Если $q = p$, то с учетом леммы 6.34 из [8] фактор-группа G_1/M_0 нильпотентна и имеет бесконечный p-ранг. По лемме 2.22 из [8] фактор-группа $(G_1/M_0)/(G_1/M_0)'$ бесконечна. Отсюда следует, что группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга; противоречие с леммой 2.1.

В случае неабелевой подгруппы C фактор-группа C/H не является циклической. Отсюда вытекает, что если $G/C = \langle g\rangle C/C$, то подгруппа $\langle H, g\rangle$ является собственной неабелевой подгруппой группы G. Тогда группа G представима в виде произведения двух собственных неабелевых подгрупп C и $\langle H, g\rangle$ бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1. Лемма доказана.

Следствие 2.3. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $\operatorname{centdim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Если H — собственная нормальная подгруппа группы G бесконечного p-ранга такая, что фактор-группа G/H бесконечна, то группа G является финитарной линейной группой.*

Доказательство. По лемме 2.2 фактор-группа G/H бесконечно порождена. Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа H абелева. Обозначим через H_1 максимальную нормальную абелеву подгруппу группы G, содержащую подгруппу H. Если фактор-группа G/H_1 конечно порождена, то по лемме 2.2

она является циклической q-группой для некоторого простого числа q. Отсюда вытекает, что можно выбрать неабелеву подгруппу K группы G, имеющую конечный специальный ранг, а поэтому и конечный p-ранг. Обозначим через T периодическую часть подгруппы H_1. Рассмотрим сначала случай, когда p является простым числом. Пусть T имеет бесконечный p-ранг. Подгруппу T можно представить в виде прямого произведения $T = T_1 \times T_2$, где T_2 — силовская p-подгруппа группы T. Фактор-группа T/T_1 имеет бесконечный p-ранг. Покажем, что существует G-допустимая подгруппа $T_0 < T$, имеющая бесконечный p-ранг, такая, что p-ранг фактор-группы T/T_0 также бесконечен. Если $q \neq p$, то по теореме 5.9 из [7] фактор-группа T/T_1 разлагается в прямое произведение бесконечного числа G-допустимых подгрупп. Отсюда вытекает, что

$$T/T_1 = T_0/T_1 \times T_3/T_1,$$

где T_0/T_1 и T_3/T_1 — G-допустимые фактор-группы бесконечного p-ранга. Подгруппа T_0 удовлетворяет заданным условиям. Пусть теперь $p = q$. Поскольку фактор-группа G/H_1 является циклической q-группой, то $G/H_1 = \langle h\rangle H_1/H_1$, причем $h^n \in H_1$ для некоторого $n = p^k$. Обозначим через T_4/T_1 нижний слой фактор-группы T/T_1. Он является характеристической подгруппой группы G, и согласно лемме 2.22 из [8] фактор-группа $T_4\langle h\rangle/(T_1\langle h^n\rangle)$ нильпотентна и ее p-ранг бесконечен. Отсюда следует, что можно выбрать нормальную подгруппу $T_0\langle h\rangle/(T_1\langle h^n\rangle) \leq T_4\langle h\rangle/(T_1\langle h^n\rangle)$ такую, что подгруппа T_0 удовлетворяет заданным условиям. Тогда для любого элемента g группы G подгруппа $KT_0\langle g\rangle^G$ является собственной неабелевой подгруппой бесконечного p-ранга, откуда вытекает конечность центральной размерности подгруппы $KT_0\langle g\rangle^G$. Поскольку $\langle g\rangle \leq \langle g\rangle^G$, центральная размерность подгруппы $\langle g\rangle$ также конечна, поэтому группа G финитарна. В случае, когда p-ранг подгруппы T конечен, фактор-группа H_1/T является группой без кручения бесконечного специального ранга. Если фактор-группа G/T абелева, то группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1. Если же фактор-группа G/T неабелева, то согласно лемме 5 из [9] в H_1/T существует периодический G-фактор $(B/T)/(U/T)$ бесконечного специального ранга. Тогда для любого элемента g группы G подгруппа $KU\langle g\rangle^G$ является собственной неабелевой подгруппой бесконечного p-ранга, откуда вытекает конечность центральной размерности подгруппы $KU\langle g\rangle^G$. Следовательно, центральная размерность подгруппы $\langle g\rangle$ также конечна, и группа G является финитарной.

Рассмотрим теперь случай, когда $p = 0$. К фактор-группе G/T применим те же рассуждения, что и в случае конечности p-ранга подгруппы T для простого числа p.

Если же фактор-группа G/H_1 бесконечно порождена, то для произвольного элемента g группы G можно выбрать элемент $h \in G$ так, чтобы подгруппа $\langle H_1, g, h\rangle$ являлась собственной неабелевой подгруппой группы G бесконечного p-ранга. Поэтому подгруппа $\langle H_1, g, h\rangle$ имеет конечную центральную размерность. Следовательно, центральная размерность подгруппы $\langle g\rangle$ также конечна, тем самым группа G финитарна. Если же подгруппа H неабелева и фактор-группа G/H бесконечно порождена, то для произвольного элемента g группы G подгруппа $\langle H, g\rangle$ является собственной неабелевой подгруппой группы G и группа G финитарна. Следствие доказано.

Лемма 2.4. *Пусть G — разрешимая неабелева группа и q — простое число. Предположим, что A — бесконечная нормальная элементарная абелева q-*

подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/A конечна. Тогда G порождается двумя собственными неабелевыми подгруппами, имеющими бесконечный q-ранг.

Доказательство. Предположим сначала, что G является бесконечной q-группой. Тогда по лемме 6.34 из [8] группа G является нильпотентной. Поскольку группа G бесконечна, согласно лемме 2.22 из [8] фактор-группа G/G' также является бесконечной и разлагается в прямое произведение конечных q-подгрупп. Легко видеть, что существуют две собственные неабелевы подгруппы U и V, каждая из которых имеет бесконечный q-ранг и для которых $G = UV$.

Предположим теперь, что G/A не является q-группой. Можно выбрать конечную неабелеву подгруппу L группы G такую, что $G = AL$. Обозначим через P силовскую q-подгруппу группы G. Она является собственной подгруппой бесконечного q-ранга. Предположим сначала, что подгруппа P неабелева. Пусть $1 \neq a_1 \in A$, $a_1 \notin Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G, и пусть $A_1 = \langle a_1 \rangle^G$. Поскольку фактор-группа G/A конечна, подгруппа A_1 также конечна и $A = A_1 \times C_1$ для некоторой подгруппы C_1. Так как индекс $|G : C_1|$ конечен, подгруппа $D_1 = \operatorname{core}_G C_1$ имеет конечный индекс в A. Пусть $1 \neq a_2 \in D_1$ и $A_2 = \langle a_2 \rangle^G$. Тогда $\langle A_1, A_2 \rangle = A_1 \times A_2$ и $A = (A_1 \times A_2) \times C_2$ для некоторой подгруппы C_2. Проводя аналогичные рассуждения, построим бесконечное семейство нетривиальных G-инвариантных подгрупп A_n, $n \in N$, такое, что $\langle A_n \mid n \in N \rangle = Dr_{n \in N} A_n$. Если

$$K = A_1 \times A_3 \times \cdots \times A_{2k+1} \times A_{2k+3} \ldots,$$

то K — собственная G-инвариантная подгруппа группы A, имеющая бесконечный q-ранг. Поскольку подгруппа KL не содержит подгруппы $\langle A_n \mid n \in N \rangle$, то KL является собственной неабелевой подгруппой бесконечного q-ранга, поэтому $G = \langle P, KL \rangle$. Пусть теперь подгруппа P абелева. Тогда $P \leq C_G(P)$ и, поскольку $A \leq P$, конечная фактор-группа $G/C_G(A)$ является q'-группой. По теореме Машке подгруппа A разлагается в прямое произведение бесконечного числа $G/C_G(A)$-допустимых подгрупп

$$A = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k \times \ldots.$$

Полагаем

$$U = (B_1 \times B_3 \times \cdots \times B_{2k+1} \times B_{2k+3} \ldots)L,$$
$$V = (B_2 \times B_4 \times \cdots \times B_{2k} \times B_{2k+2} \ldots)L.$$

Подгруппы U и V являются собственными неабелевыми подгруппами группы G, причем $G = UV$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть G — разрешимая неабелева группа и q — простое число. Предположим, что A — бесконечная нормальная делимая абелева q-подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/A конечна. Если A имеет бесконечный q-ранг, то G порождается двумя собственными неабелевыми подгруппами, имеющими бесконечный q-ранг.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда подгруппа A содержится в центре группы G. Тогда $G = AM$, где M — конечная неабелева подгруппа группы G. Ввиду своего строения подгруппа A представима в виде прямого произведения $A = A_1 \times A_2$, где A_1 и A_2 — подгруппы бесконечного q-ранга. Полагаем

$$U = A_1 M, \quad V = A_2 M.$$

Тогда $G = UV$, где U и V — собственные неабелевы подгруппы группы G, имеющие бесконечный q-ранг. Пусть теперь подгруппа A не содержится в центре группы G. Поскольку A является делимой абелевой q-группой, она разлагается в прямое произведение квазициклических q-подгрупп. Пусть $K \simeq C_{q^\infty}$ является подгруппой группы A, не содержащейся в центре группы G, и пусть $L = K^G$. Поскольку фактор-группа G/A конечна, L — черниковская группа и $A = L \times U$, где U имеет бесконечный q-ранг. Пусть $D \simeq C_{q^\infty}$ является подгруппой группы U. В результате мы получаем разложение $A = L \times D \times Q$ для некоторой подгруппы Q, имеющей бесконечный q-ранг. Поскольку индекс $|G : N_G(Q)|$ конечен, подгруппа Q имеет конечное число сопряженных подгрупп $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ в группе G. Если $W = \operatorname{core}_G Q$, то фактор-группа A/W может быть вложена в прямое произведение $A/Q_1 \times A/Q_2 \times \dots \times A/Q_m$, поэтому фактор-группа A/W является черниковской. Ввиду выбора подгруппы W получаем, что $L \cap W = 1$, $A/W \neq LW/W$. Поскольку LW/W является G-инвариантной фактор-группой и фактор-группа G/A конечна в силу результата Д. И. Зайцева из [10], имеем равенство $A/W = (LW/W)(B/W)$, где фактор-группа B/W G-инвариантна и пересечение $(LW/W) \cap (B/W)$ конечно. Существует конечная неабелева подгруппа F такая, что $G = AF$, поэтому BF — собственная неабелева подгруппа группы G. Поскольку подгруппа W имеет бесконечный q-ранг, то и обе подгруппы LW и BF также имеют бесконечный q-ранг. Отсюда следует, что $G = (LWF)(BF)$. Лемма доказана.

Мы также будем использовать следующий результат, который доказывается достаточно легко с использованием предыдущих лемм.

Лемма 2.6. *Пусть G — разрешимая неабелева группа, A — нормальная подгруппа группы G, для которой фактор-группа G/A является бесконечной периодической почти абелевой группой. Если $|\pi(G/A)| > 1$, то группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп, содержащих A.*

Мы применим эти результаты для доказательства следующей леммы.

Лемма 2.7. *Пусть $H \le GL(F, A)$ — разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(H)$ и $\operatorname{centdim}_F H$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Пусть K — нормальная подгруппа неабелевой группы H, и предположим, что фактор-группа H/K почти абелева. Если $r_p(H/K)$ бесконечен, то группа H имеет конечную центральную размерность.*

Доказательство. Предположим сначала, что $p = 0$. Пусть L — нормальная подгруппа группы H такая, что фактор-группа H/L конечна, а L/K абелева. Если $r_0(L/K)$ бесконечен, то фактор-группа L/K содержит свободную абелеву подгруппу B/K такую, что ранг $r_0(B/K)$ бесконечен и фактор-группа L/B периодическая. Поскольку фактор-группа H/L конечна, подгруппа B имеет конечное число сопряженных подгрупп в H. Обозначим эти подгруппы через $B_1, \dots, B_m$. Если $C = \operatorname{core}_H B$, то существует вложение фактор-группы L/C в прямое произведение $L/B_1 \times L/B_2 \times \dots \times L/B_m$. Отсюда следует, что фактор-группа L/C периодическая. Поскольку $r_0(C/K)$ бесконечен, то $r_0(C)$ также бесконечен. Отметим также, что фактор-группа C/K является свободной абелевой. Если фактор-группа H/C конечна либо $|\pi(H/C)| = 1$, то выберем простое число $q \notin \pi(H/C)$ и положим $D/K = (C/K)^q$. Если фактор-группа H/C бесконечна и $|\pi(H/C)| > 1$, то положим $D = C$. Тогда в каждом из этих случаев H/D бесконечна и $|\pi(H/D)| > 1$, причем $r_0(D)$ бесконечен. Применяя леммы 2.6 и 2.1 к подгруппе H, видим, что H имеет конечную центральную размерность.

Предположим теперь, что $p > 0$, и пусть L — подгруппа, определенная выше. Выберем свободную абелеву подгруппу B/K фактор-группы L/K такую, что фактор-группа L/B периодическая. Если ранг $r_0(B/K)$ бесконечен, то проводим те же рассуждения, что и в случае $p = 0$. Поэтому полагаем, что $r_0(B/K)$ конечен. Как и ранее, если $C = \mathrm{core}_H B$, то фактор-группа L/C периодическая и $r_p(L/C)$ бесконечен. Рассматривая, если это необходимо, фактор-группу группы L/C по ее силовской p'-подгруппе, получаем, что L/C является p-группой. Если фактор-группа L/L^pC бесконечна, то H/L^pC удовлетворяет условиям леммы 2.4, поэтому H является произведением двух своих собственных неабелевых подгрупп, имеющих бесконечный p-ранг и конечную центральную размерность. Следовательно, H в этом случае также имеет конечную центральную размерность. Если фактор-группа L/L^pC конечна, то для нее имеет место равенство $L/C = E/C \times D/C$ для некоторой конечной подгруппы E/C и делимой подгруппы D/C. Поскольку фактор-группа H/L конечна, а L/C абелева, фактор-группа $F/C = (E/C)^{H/C}$ также конечна. Более того, L/F является делимой абелевой p-группой бесконечного p-ранга. Если фактор-группа H/F неабелева, то согласно лемме 2.5 H является произведением двух своих собственных неабелевых подгрупп, каждая из которых имеет бесконечный p-ранг и, следовательно, конечную центральную размерность. Если же фактор-группа H/F абелева, то можно выбрать две неабелевы подгруппы U и V, содержащие подгруппу F и имеющие бесконечный p-ранг, для которых $H = UV$. Таким образом, в этом случае H также имеет конечную центральную размерность. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — разрешимая неабелева группа, и пусть $r_p(G)$ и $\mathrm{centdim}_F\, G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Пусть H — нормальная подгруппа группы G, и предположим, что фактор-группа G/H почти абелева. Тогда фактор-группа G/H изоморфна подгруппе квазициклической группы C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Более того, если G/H бесконечна, то $q \neq \mathrm{char}\, F$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $G \neq H$. Если ранг $r_p(G/H)$ бесконечен, то $\mathrm{centdim}_F\, G$ конечна по лемме 2.7. Таким образом, $r_p(G/H)$ конечен, поэтому ранг $r_p(H)$ бесконечен. Более того, если фактор-группа G/H конечна, то справедливость нашего утверждения следует из леммы 2.2. Таким образом, мы полагаем, что фактор-группа G/H бесконечна.

Достаточно рассмотреть случай, когда группа G не является почти абелевой, поскольку в случае почти абелевой группы, как и при доказательстве леммы 2.2, устанавливается, что группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга; противоречие с леммой 2.1(iii). Предположим сначала, что G/H является абелевой группой. Если фактор-группа G/H свободная абелева, то группу G можно представить в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп U и V бесконечного p-ранга, что противоречит лемме 2.1(iii). Следовательно, G/H не является свободной абелевой группой. Обозначим через B/H свободную абелеву подгруппу группы G/H такую, что фактор-группа G/B периодическая. Поскольку ранг $r_p(H)$ бесконечен, ранг $r_p(B)$ также бесконечен. Если $\pi(G/B) > 1$, то по лемме 2.2 фактор-группа G/B бесконечна и тогда группа G является произведением двух своих собственных неабелевых подгрупп, имеющих бесконечный p-ранг, что противоречит лемме 2.1(iii). Таким образом, фактор-группа G/B является q-группой для некоторого простого числа q. Пусть фактор-группа B/H нетривиальна и r — простое число, отличное от q. Положим $C/H = (B/H)^r \neq B/H$. Отсюда вытекает, что фактор-группа G/C периодическая и $\pi(G/C)$ состоит из двух различных простых чисел q и r, причем по лемме 2.2 фактор-группа G/C бесконечна. Как и ранее, приходим к противоречию. Следовательно, фактор-группа G/H является периодической q-группой. Если G/H делимая, то она является прямым произведением квазициклических q-групп и согласно лемме 2.1(iii) $G/H \simeq C_{q^\infty}$. В противном случае фактор-группа $(G/H)/(G/H)^q$ является нетривиальной элементарной абелевой q-группой и по лемме 2.1(iii) получаем, что $|(G/H)/(G/H)^q| = q$. Отсюда следует, что $G/H = (E/H) \times (D/H)$, где D/H делимая, $|E/H| = q$. Подгруппа D неабелева, поэтому группу G можно представить в виде произведения двух своих собственных неабелевых подгрупп, имеющих бесконечный p-ранг, что противоречит лемме 2.1(iii).

Перейдем к рассмотрению общего случая. Пусть L/H — нормальная абелева подгруппа фактор-группы G/H такая, что фактор-группа G/L конечна. Пусть U/H — произвольная подгруппа конечного индекса в группе G/H. Если $V/H = \mathrm{core}_{G/H}\, U/H$, то G/V конечна, причем ранг $r_p(V)$ бесконечен. Согласно лемме 2.2 фактор-группа G/V является циклической q-группой для некоторого простого числа q, поэтому $G' \leq V \leq U$. Таким образом, если W/H — пересечение всех подгрупп конечного индекса фактор-группы L/H, то G/W абелева, W имеет бесконечный p-ранг, а фактор-группа G/W финитно аппроксимируема и поэтому конечна. Таким образом, $G = WK$ для некоторой подгруппы K, содержащей H, причем фактор-группа K/H конечно порождена. Предположим, что W и K — собственные подгруппы группы G. Фактор-группа G/W конечно порождена и по лемме 2.2 является циклической q-группой для некоторого простого числа q. Тогда $G/W = \langle g\rangle W/W$ для некоторого элемента g. Достаточно рассмотреть случай неабелевой подгруппы W. Предположим, что подгруппа K абелева. Отсюда следует, что подгруппа H также абелева, поэтому группа G является почти метабелевой. Тогда можно выбрать элемент h подгруппы W, для которого подгруппа $K\langle h\rangle^G$ является собственной неабелевой подгруппой группы G, а фактор-группа $K\langle h\rangle^G/H$ конечно порождена. Отсюда вытекает, что группа G представима в виде произведения $G = W(K\langle h\rangle^G)$ двух своих собственных неабелевых подгрупп бесконечного p-ранга. Получили противоречие с леммой 2.1(iii). Следовательно, подгруппа K неабелева, и из соотношения $G = WK$ вытекает, что выполняется одно из равенств: $G = W$ либо $G = K$. Поскольку фактор-группа G/H бесконечна, из леммы 2.2 следует, что $G \neq K$. Отсюда получаем, что $G = W$. Тогда фактор-группа G/H абелева и справедливость результата следует из первой части доказательства.

Пусть теперь $G/H \simeq C_{q^\infty}$. Если подгруппа H абелева, то найдется неабелева подгруппа K, являющаяся конечным расширением подгруппы H. Подгруппа K имеет конечную центральную размерность, следовательно, центральная размерность подгруппы H также конечна. В случае неабелевой подгруппы H конечность ее центральной размерности следует из условия теоремы. Если $C = C_A(H)$, то $\dim_F(A/C)$ конечна. Поскольку $H \leq C_G(C)$, получаем, что либо $G = C_G(C)$, либо $G/C_G(C) \simeq C_{q^\infty}$. В первом случае $\mathrm{centdim}_F(G)$ конечна, что противоречит условию леммы. Следовательно, $G/C_G(C) \simeq C_{q^\infty}$. Согласно следствию 2.3 группа G является финитарной линейной группой, поэтому фактор-группа $G/C_G(C)$ является финитарной подгруппой группы $GL(F,C)$. С учетом леммы 5.1 из [3] $q \neq \operatorname{char} F$. Лемма доказана.

3. Разрешимые группы

В этом разделе применим результаты разд. 2 к исследованию разрешимых групп. Увидим, что структура таких групп, удовлетворяющих заданным условиям конечности, в значительной степени ограничена.

Предложение 3.1. *Пусть $G \leq GL(F,A)$ — неабелева разрешимая группа, и пусть $r_p(G)$ и $\operatorname{centdim}_F G$ бесконечны. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность. Если группа G разрешима, то G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H бесконечного p-ранга и $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Если поле F имеет характеристику 0, то подгруппа H не имеет кручения. Если $\operatorname{char} F \neq 0$, то $p \neq 0$, $\operatorname{char} F = p$ и H является ограниченной p-группой.*

Доказательство. Пусть

$$G = D_0 \geq D_1 \geq \cdots \geq D_{n-1} \geq D_n = 1$$

— производный ряд группы G. Тогда существует такое натуральное число m, что фактор-группа G/D_m конечна, а фактор-группа D_m/D_{m+1} бесконечна. Положим $K = D_m$. Согласно лемме 2.8 $G/K' \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Следовательно, K' имеет бесконечный p-ранг. Если подгруппа K' неабелева, то ее центральная размерность конечна. Если же подгруппа K' абелева, то существует ее конечное расширение, являющееся неабелевым, так что и в этом случае центральная размерность подгруппы K' конечна. Положим $C = C_A(K')$. Подпространство C имеет конечную коразмерность над полем F. Поскольку K' — нормальная подгруппа группы G, C является FG-подмодулем модуля A, обладающего конечным рядом FG-подмодулей

$$0 = C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq \cdots \leq C_{t-1} = C \leq C_t = A$$

таких, что $C_1, C_2/C_1, \dots, C_{t-1}/C_{t-2}$ являются простыми FG-модулями. Пусть

$$H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap \cdots \cap C_G(C_{t-1}/C_{t-2}).$$

Так как группа G разрешима, фактор-группы $G/C_G(C_2/C_1), \dots, G/C_G(C_t/C_{t-1})$ по теореме А. И. Мальцева (лемма 3.5 из [11]) являются почти абелевыми. Отсюда следует, что фактор-группа G/H также почти абелева и по лемме 2.8 $G/H \simeq C_{q^\infty}$. Таким образом, ранг $r_p(H)$ бесконечен.

В результате получаем, что каждый элемент подгруппы H действует тривиально в каждом факторе C_{j+1}/C_j, $j = 0, 1, \dots, t-1$. Отсюда следует, что H нильпотентна. Если $\operatorname{char} F = 0$, то H не имеет кручения, если же $\operatorname{char} F = r > 0$, то H является ограниченной r-группой согласно предложению 1.C.3 из [12] и результатам гл. 8 из [13], тем самым в этом случае $p = r$. Лемма доказана.

Получим нашу первую главную теорему о неабелевых группах, у которых каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного 0-ранга имеет конечную центральную размерность, показывающую, что таких групп не существует.

Теорема 3.2. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — неабелева разрешимая группа. Предположим, что каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного 0-ранга имеет конечную центральную размерность. Тогда либо группа G имеет конечную центральную размерность, либо ранг $r_0(G)$ конечен.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $\mathrm{centdim}_F(G)$ и $r_0(G)$ бесконечны. Согласно предложению 3.1 группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H без кручения такую, что $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Поскольку $r_0(G)$ бесконечен, $H \neq 1$. Пусть

$$1 = H_0 \leq H_1 \leq H_2 \leq \dots \leq H_t = H$$

— верхний центральный ряд подгруппы H, каждый фактор которого не имеет кручения.

Предположим сначала, что группа G локально нильпотентна, и обозначим через T периодическую часть группы G. Поскольку $T \cap H = 1$, то либо $T \simeq C_{q^\infty}$, либо T конечен. Изолятор подгруппы HT/T в группе G/T совпадает с G/T. Отсюда получаем, что локально нильпотентная группа без кручения G/T нильпотентна и имеет бесконечный 0-ранг из [14, § 4]. Следовательно, фактор-группа $G/G'T$ по теореме 2.26 из [8] также имеет бесконечный 0-ранг. Однако по лемме 2.8 $G/G' \simeq C_{q^\infty}$. Получили противоречие. Следовательно, группа G не является локально нильпотентной.

Докажем, что произвольная разрешимая группа, не являющаяся локально нильпотентной и удовлетворяющая заданным условиям, будет произведением двух собственных неабелевых подгрупп бесконечного 0-ранга. Переходя к рассмотрению фактор-группы H/H_{t-1}, полагаем, что H является абелевой группой без кручения.

Пусть H является $\mathbf{Z}R$-модулем, где $R = G/G'$, который определен естественным образом. Обозначим через X $\mathbf{Q}$-делимую оболочку H. Она является $\mathbf{Q}R$-модулем. Пусть $1 \neq z \in R$, и пусть $\langle x \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Тогда X является $\mathbf{Q}\langle x \rangle$-модулем, если мы определим действие x на X по правилу: $ax = a^z$ для любого элемента $a \in X$. Групповое кольцо $\mathbf{Q}\langle x \rangle$ является областью главных идеалов, поэтому z имеет конечный порядок. Следовательно, X является $\mathbf{Q}\langle x \rangle$-периодическим ограниченным модулем, т. е. $\mathrm{Ann}_{Q\langle x \rangle}(X) \neq 0$. Пусть I — идеал кольца $\mathbf{Q}\langle x \rangle$, X_I — совокупность всех элементов $a \in X$ таких, что $aI^n = 0$ для некоторого натурального $n \in N$. Положим

$$X_I = \{a \in X \mid aI^n = 0\}$$

для некоторого $n \in N$. Назовем X_I *I-компонентой модуля* X, X_I является $\mathbf{Q}\langle x \rangle$-подмодулем модуля X. Так как $\mathbf{Q}\langle x \rangle$ — область главных идеалов, получаем разложение

$$X = \bigoplus_{P \in \pi} X_P,$$

где π — конечное множество максимальных идеалов кольца $\mathbf{Q}\langle x \rangle$. Если $\pi = \{(x-1)\mathbf{Q}\langle x \rangle\}$, то $X(x-1)^m = 0$ для некоторого $m \in N$, поэтому $X\langle z \rangle$ нильпотентно. Поскольку группа G не является локально нильпотентной, можно выбрать элемент $z \in R$ так, чтобы $\pi \neq \{(x-1)\mathbf{Q}\langle x \rangle\}$. Положим

$$\sigma = \pi \setminus \{(x-1)\mathbf{Q}\langle x \rangle\}, \quad B = \bigoplus_{P \in \sigma} X_P,$$

и пусть C является $(x-1)\mathbf{Q}\langle x \rangle$-компонентой X. Ввиду выбора элемента z получаем, что $B \neq 0$. Более того, $C_B(z) = 0$, поэтому $C_{X/C}(z) = 0 = C_{X/C}(R)$.

Поскольку группа R абелева, C является $\mathbf{Q}G$-модулем и, кроме того, каждая собственная подгруппа R конечна. Тогда X/C является $\mathbf{M}_c$-модулем над $\mathbf{Q}R$ в терминологии из [14]. Для каждого $z \in R$ справедливо, что $\mathbf{Q}\langle z\rangle$-модуль X является полупростым, и по теореме Машке пересечение максимальных $\mathbf{Q}R$-подмодулей модуля X/C тривиально. В частности, X/C обладает максимальными подгруппами, поэтому X содержит максимальный $\mathbf{Q}R$-подмодуль. Обозначим его через E.

Положим $V = E \cap H$, V является ZR-подмодулем модуля H. Поскольку H порождает X как $\mathbf{Q}R$-модуль, получаем, что $V \neq H$. Более того, $\mathbf{Z}R$-модуль H/V не является простым, так как согласно лемме 5.26 из [8] такие модули элементарные абелевы и H/V, будучи подгруппой группы X/V, не имеет кручения. Предположим, что W является ZR-подмодулем модуля H, причем $V < W$. Тогда $W \otimes_{ZR} \mathbf{Q}R = W \otimes_Z Q$ является QR-модулем, для которого E — собственный подмодуль. Следовательно, этот $\mathbf{Q}R$-модуль совпадает с X. Таким образом, $W \otimes_Z \mathbf{Q} = H \otimes_Z \mathbf{Q}$, поэтому H/W является периодическим.

Выберем элемент $a \in H \setminus V$ так, чтобы $L = \langle a\rangle^G V \neq H$. Тогда модуль H/L периодический и согласно результату Д. И. Зайцева из [15] множество

$$\Delta = \{p \mid (L/V)^p \neq L/V\},$$

где p — простое число, бесконечно. Пусть r_1 и r_2 — два различных простых числа из Δ, отличных от q. Тогда $L_1/V = (L/V)^{r_1 r_2} \neq L/V$. Пусть U/L_1 — силовская $\{r_1, r_2\}'$-подгруппа группы H/L_1. Тогда фактор-группа G/U периодическая, поэтому $r_0(U)$ бесконечен. Согласно теореме 1.D.4 из [12] имеет место равенство $G/U = (H/U)(P/U)$, где H/U — нормальная подгруппа фактор-группы G/U, пересечение $(H/U) \cap (P/U)$ тривиально и $P/U \simeq R$. Следовательно, G является произведением двух собственных подгрупп H и P бесконечного 0-ранга. Найдется подгруппа $K < P$ такая, что фактор-группа K/U конечна, а подгруппа $H_1 = HK$ является собственной нормальной неабелевой подгруппой группы G. Рассмотрим случай абелевой подгруппы P. Согласно построению подгруппа P не содержится в центре группы G, поэтому можно выбрать элемент g в подгруппе H, для которого подгруппа $P_1 = \langle g\rangle^P P$ является собственной неабелевой подгруппой группы G. В случае неабелевой подгруппы P полагаем $P_1 = P$. Тогда группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп H_1 и P_1 бесконечного 0-ранга; противоречие с леммой 2.1(iii). Отсюда следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Когда $p \neq 0$, имеет место следующая

Теорема 3.3. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — неабелева разрешимая линейная группа, и пусть $p > 0$. Предположим, что $r_p(G)$ и $\operatorname{centdim}_F G$ бесконечны. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного p-ранга имеет конечную центральную размерность, то группа G удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *$G = HQ$, где H — нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q, $q \neq p$;*

(ii) *H является p-группой конечной центральной размерности, причем $\operatorname{char} F = p$;*

(iii) *$K = H \cap Z(G)$ — конечная подгруппа;*

(iv) *H/K — бесконечная элементарная абелева p-группа;*

(v) *H/K — минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G/K.*

Доказательство. Согласно предложению 3.1 G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H, для которой $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Поскольку $r_p(G/H) \leq 1$, подгруппа H имеет бесконечный p-ранг. Если подгруппа H неабелева, то ее центральная размерность бесконечна. В случае абелевой подгруппы H существует ее конечное расширение, являющееся неабелевым, откуда вытекает конечность центральной размерности подгруппы H. В частности, группа G не является почти абелевой.

Сначала покажем, что $\operatorname{char} F \neq 0$. Предположим, что $\operatorname{char} F = 0$. Тогда согласно предложению 3.1 подгруппа H не имеет кручения. Как и в доказательстве теоремы 3.2, мы можем предположить, что группа G не является локально нильпотентной, а подгруппа H абелева и H содержит G-инвариантную подгруппу V такую, что фактор-группа H/V — рационально неприводимая абелева группа без кручения. Можно показать, что H содержит G-инвариантную подгруппу W, для которой $V \leq W$ и H/W является $\{r_1, r_2\}$-группой, где r_1, r_2 — различные простые числа, отличные от p и q. Следовательно, группа G является произведением двух собственных неабелевых подгрупп, содержащих подгруппу W. Если $r_0(H/V)$ конечен, то и $r_p(H/V)$ конечен. Отсюда мы получаем, что оба ранга $r_p(V)$ и $r_p(W)$ бесконечны, что противоречит лемме 2.1(iii). Если $r_0(H/V)$ бесконечен, то $r_0(W/V)$ также бесконечен, поскольку фактор-группа H/W периодическая. Тогда $r_p(W/V)$ бесконечен, поэтому ранг $r_p(W)$ тоже бесконечен. Вновь получаем противоречие. Следовательно, $\operatorname{char} F = p > 0$.

Согласно предложению 3.1 H — нильпотентная ограниченная p-группа и $p \neq q$. Тогда по лемме 1.D.4 из [12] $G = HQ$, где H — нормальная подгруппа группы G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$. Если подгруппа H неабелева, то ее центральная размерность конечна. Если же подгруппа H абелева, то существует ее конечное расширение H_1, являющееся неабелевым, тем самым и в этом случае центральная размерность подгруппы H конечна. В случае неабелевой подгруппы H полагаем $H_1 = H$. Таким образом, Q имеет бесконечную центральную размерность. Если L — собственная G-инвариантная подгруппа группы H, то LQ является собственной подгруппой группы G, причем $\operatorname{centdim}_F LQ$ бесконечна. Если подгруппа LQ неабелева, то согласно условию теоремы ранг $r_p(LQ)$ конечен, значит, конечен ранг $r_p(L)$. Поскольку L является ограниченной нильпотентной p-группой, то L конечна. Следовательно, $G/C_G(L)$ конечна, и тогда ранг $r_p(C_G(L))$ бесконечен. Поскольку $Q \leq C_G(L)$, то $G = H_1C_G(L)$. Ввиду построения $G \neq H_1$. Так как группа G не является почти абелевой, централизатор $C_G(L)$ неабелев. Отсюда $G = C_G(L)$. Таким образом, $L \leq Z(G)$. Получили противоречие с тем, что подгруппа LQ неабелева. Следовательно, подгруппа LQ абелева, а поскольку ранг $r_p(L)$ конечен и $L \leq H$, то L конечна. В частности, $K = H \cap Z(G)$ является собственной подгруппой группы H. Значит, подгруппа K конечна, и фактор-группа H/K не содержит собственных G-инвариантных подгрупп. Отсюда следует, что H/K является минимальной нормальной подгруппой фактор-группы G/K. Поскольку H нильпотентна, то H/K является элементарной абелевой p-группой. Теорема доказана.

Говорят, что группа G имеет *конечный абелев секционный ранг*, если каждая абелева секция группы G имеет конечный p-ранг для всех $p \geq 0$. Отметим, что Бэр и Хайнекен [16] доказали, что для разрешимых (и даже для гиперабелевых) групп конечность абелева секционного ранга эквивалентна конечности абелева подгруппового ранга (напомним, что группа G имеет конечный абелев подгрупповой ранг, если все абелевы подгруппы группы G имеют конечный p-ранг для всех $p \geq 0$). В этом случае имеет место следующий результат.

Следствие 3.4. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ — неабелева разрешимая линейная* *группа бесконечного абелева секционного ранга. Предположим, что* $\operatorname{centdim}_F G$ *бесконечна. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного абелева секционного ранга имеет конечную центральную размерность, то группа* G *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $G = HQ$, *где* H *— нормальная подгруппа группы* G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$ *для некоторого простого числа* q*;*

(ii) H *является* p*-группой конечной центральной размерности, причем* $\operatorname{char} F = p$, $q \neq p$*;*

(iii) $K = H \cap Z(G)$ *— конечная подгруппа;*

(iv) H/K *— бесконечная элементарная абелева* p*-группа;*

(v) H/K *— минимальная нормальная подгруппа фактор-группы* G/K.

Доказательство. Поскольку группа G разрешима и имеет бесконечный абелев секционный ранг, существует простое число p, для которого $r_p(G)$ бесконечен. Для этого простого числа p верно, что любая собственная неабелева подгруппа H бесконечного p-ранга имеет бесконечный абелев секционный ранг, следовательно, H имеет конечную центральную размерность. Применим теперь теорему 3.3. Следствие доказано.

В завершение этого раздела рассмотрим группы бесконечного специального ранга. Говорят, что группа G имеет *конечный специальный ранг* $r(G) = r$, если r является наименьшим числом с тем свойством, что каждая конечно порожденная подгруппа группы G может быть порождена не более чем r элементами. Это определение введено А. И. Мальцевым [17]. Специальный ранг группы иногда называют *рангом Прюфера — Мальцева.* Справедлива следующая

Теорема 3.5. *Пусть* $G \leq GL(F, A)$ *— неабелева разрешимая линейная группа бесконечного специального ранга. Предположим, что* $\operatorname{centdim}_F G$ *бесконечна. Если каждая собственная неабелева подгруппа бесконечного специального ранга имеет конечную центральную размерность, то группа* G *удовлетворяет следующим условиям:*

(i) $G = HQ$, *где* H *— нормальная подгруппа группы* G, $H \cap Q = E$, $Q \simeq C_{q^\infty}$ *для некоторого простого числа* q*;*

(ii) H *является* p*-группой конечной центральной размерности, причем* $\operatorname{char} F = p$, $q \neq p$*;*

(iii) $K = H \cap Z(G)$ *— конечная подгруппа;*

(iv) H/K *— бесконечная элементарная абелева* p*-группа;*

(v) H/K *— минимальная нормальная подгруппа фактор-группы* G/K.

Доказательство. Если G имеет бесконечный абелев секционный ранг, а X — собственная неабелева подгруппа бесконечного абелева секционного ранга, то X имеет конечную центральную размерность. Тогда справедливость теоремы следует из следствия 3.4. Поэтому предположим, что G имеет конечный абелев секционный ранг.

Пусть U — нормальная подгруппа группы G такая, что фактор-группа G/U — бесконечная почти абелева группа. Обозначим через V/U нормальную абелеву подгруппу G/U, для которой фактор-группа G/V конечна. Поскольку ранг $r_0(G)$ конечен, V/U содержит конечно порожденную подгруппу B/U, для которой фактор-группа V/B периодическая. Если $C/U = (B/U)^{G/U}$, то C/U также конечно порождена. Предположим, что G/U имеет бесконечный специальный ранг. Поскольку G имеет конечный абелев секционный ранг, отсюда следует, что p-подгруппы фактор-группы V/C черниковские для каждого простого числа p. Таким образом, множество $\pi(V/C)$ бесконечно. Если D/C является силовской $\pi(G/V)$-подгруппой фактор-группы V/C, то фактор-группа V/D имеет бесконечный специальный ранг и $G/D = (V/D)(W/D)$, где V/D — нормальная подгруппа группы G/D, $(V/D) \cap (W/D) = E$, причем фактор-группа W/D конечна и пересечение $\pi(V/D) \cap \pi(W/D)$ пусто. Тогда фактор-группа V/D является произведением двух собственных G-инвариантных подгрупп V_1/D и V_2/D бесконечного специального ранга. При этом подгруппы V_1 и V_2 можно выбрать таким образом, чтобы подгруппы V_1W и V_2W являлись неабелевыми. Следовательно, $G = (V_1W)(V_1W)$, что противоречит лемме 2.1(iii). Поэтому группа G имеет конечную центральную размерность; противоречие с условием теоремы. Отсюда вытекает, что фактор-группа G/U имеет конечный специальный ранг, а следовательно, специальный ранг подгруппы U бесконечен. Как и в разд. 2, доказываем, что $G/U \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Как и в теореме 3.3, G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H такую, что $G/H \simeq C_{q^\infty}$ для некоторого простого числа q. Если $\operatorname{char} F = 0$, то H не имеет кручения. Поскольку группа G имеет конечный абелев секционный ранг, то $r_0(H)$ конечен. Отсюда вытекает, что H является группой без кручения конечного специального ранга и в этом случае G имеет конечный специальный ранг; противоречие. Если $\operatorname{char} F = p > 0$, то H является ограниченной p-группой. Поскольку G имеет конечный абелев секционный ранг, то ранг $r_p(G)$ также конечен. Следовательно, подгруппа H конечна, и G имеет конечный специальный ранг. Снова получаем противоречие. Теорема доказана.

В работе [4] построен пример 3.2 неабелевой разрешимой группы $G \leq GL(F, A)$ бесконечного ранга и бесконечной центральной размерности, у которой любая собственная неабелева подгруппа бесконечного ранга имеет конечную центральную размерность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey // Finite and locally finite groups. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. P. 11–146. (NATO ASI ser. C. Math. Phys. Sci.; V. 471).
2. *Phillips R. E.* The structure of groups of finitary transformations // J. Algebra. 1988. V. 119, N 2. P. 400–448.
3. *Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A.* Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. 2004. V. 277, N 1. P. 172–186.
4. *Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. 2006. V. 50, N 1. P. 103–131.
5. *Dashkova O. Yu., Dixon M. R., Kurdachenko L. A.* Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure Appl. Algebra. 2007. V. 208, N 3. P. 785–795.
6. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V.* On some ranks of infinite groups // Ric. Mat. 2006. V. 56, N 1. P. 43–59.
7. *Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya.* Artinian modules over group rings. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 2007.
8. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1972. V. 1, 2.
9. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. 1990. Т. 42, № 2. С. 159–164.
10. *Зайцев Д. И.* Дополнения подгрупп экстремальных групп. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1974.
11. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear Groups. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1973. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete).

12. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. Amsterdam; London: North-Holland, 1973. (North-Holland Math. Library).
13. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974.
14. *Hall P.* The Edmonton notes on nilpotent groups. London: Queen Mary College Math. Notes, 1969.
15. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 2. С. 94–106.
16. *Baer R., Heineken H.* Radical groups of finite abelian subgroup rank // Illinois J. Math. 1972. V. 16, N 4. P. 533–580.
17. *Мальцев А. И.* О группах конечного ранга // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 351–352.

Статья поступила 13 мая 2007 г.

Дашкова Ольга Юрьевна
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко,
механико-математический факультет,
ул. Владимирская, 64, Киев 01601, Украина
odashkova@yandex.ru