Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 512.542

О ФОРМАЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ ГРУППОЙ ЦОКОЛЬНОЙ ДЛИНЫ 2

В. П. Буриченко

Аннотация. Гашюц предположил, что формация, порожденная конечной группой, содержит лишь конечное число подформаций. В статье это предположение доказывается для групп цокольной длины не более 2. (Мы говорим, что группа *имеет цокольную длину* 1, если она совпадает со своим цоколем, и цокольную длину 2, если ее фактор-группа по цоколю имеет цокольную длину 1.) Ранее гипотеза Гашюца была доказана в нескольких частных случаях, включая разрешимые группы.

Ключевые слова: конечные группы, формация.

1. Введение

Все группы, рассматриваемые в данной статье, конечны. Под *классом* понимается семейство конечных групп, замкнутое относительно изоморфизма. Напомним, что *формация* есть класс $\mathfrak{F}$ со следующими свойствами:

(1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;
(2) если G — группа, $K, N \trianglelefteq G$, $K \cap N = 1$, $G/K \in \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Отметим, что условие (2) эквивалентно следующему: для любых $G_1, G_2 \in \mathfrak{F}$ любое их подпрямое произведение G также лежит в $\mathfrak{F}$.

Если $\mathscr{A}$ — любое множество конечных групп, то через $\mathrm{form}(\mathscr{A})$ обозначаем порожденную им формацию, т. е. наименьшую формацию, содержащую $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A} = \{G_1, \dots, G_m\}$ конечно, то вместо $\mathrm{form}(\mathscr{A})$ будем писать $\mathrm{form}(G_1, \dots, G_m)$ (опуская фигурные скобки).

Теории формаций посвящены книга [1] и значительная часть книги [2]. Одной из самых известных проблем теории формаций является следующая (см., например, [3, вопрос 9.59]).

Проблема (В. Гашюц). *Доказать, что для любой конечной группы G формация $\mathrm{form}(G)$ содержит лишь конечное число подформаций.*

Эта проблема решена в следующих частных случаях:

(1) когда G разрешима [4];
(2) когда G является расширением разрешимой группы с помощью простой [5];
(3) когда разрешимый корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ группы G не содержит фраттиниевых главных факторов группы G [6].

(Разрешимый корадикал $G^{\mathfrak{S}}$ есть наименьшая нормальная подгруппа в G такая, что $G/G^{\mathfrak{S}}$ разрешима. Условие в (3) означает, что если Y и X — нормальные подгруппы в G, содержащиеся в $G^{\mathfrak{S}}$, причем Y/X — главный фактор группы G, то $Y/X \not\subseteq \Phi(G/X)$.)

Основная цель настоящей работы — доказать гипотезу Гашюца еще в одном частном случае.

Под *цоколем* $\mathrm{Soc}(G)$ конечной группы G понимается, как обычно, подгруппа, порожденная всеми минимальными нормальными подгруппами в G. Определим *цокольную длину* $l_s(G)$ по индукции, полагая $l_s(1) = 0$ и $l_s(G) = 1 + l_s(G/\mathrm{Soc}(G))$ при $G \neq 1$. В работе будет доказана

Теорема 1.1. *Если G — группа цокольной длины $l_s(G) \leq 2$, то $\mathrm{form}(G)$ содержит лишь конечное число подформаций.*

Работа организована следующим образом. В разд. 2 каждая формация $\mathrm{form}(G)$ вкладывается в некоторую более обозримую формацию, обозначаемую через $\mathfrak{F}(k, M)$. Теорема 1.1 сводится к доказательству того, что формация $\mathfrak{F}(2, M)$ содержит лишь конечное число формационно неразложимых групп (определение см. в разд. 2). В разд. 3 с использованием когомологий доказывается некоторый признак формационной разложимости. Наконец в разд. 4 анализируется строение формационно неразложимых групп цокольной длины 2, откуда следует доказательство теоремы 1.1.

Благодарности. Автор признателен В. Н. Тютянову за дружескую поддержку и А. Н. Скибе за полезное указание на [7].

2. Формация $\mathfrak{F}(k, M)$

Сначала мы докажем, что класс групп цокольной длины $\leq k$ является формацией. В [7, теорема 3.21] доказано аналогичное утверждение для алгебраических систем произвольной сигнатуры. Наше доказательство, по существу, является модификацией доказательства из [7].

Подпрямое произведение семейства групп $G_1, \dots, G_m$ — это подгруппа $G \leq G_1 \times \dots \times G_m$ такая, что $\mathrm{pr}_i\, G = G_i$ для всех i, где $\mathrm{pr}_i : \prod\limits_{j=1}^{m} G_j \to G_i$ — проекция на i-й сомножитель. Подпрямое произведение «ассоциативно»; например, если G — подпрямое произведение групп G_1 и G_2, а G_2 — подпрямое произведение G_3 и G_4, то G является подпрямым произведением семейства $\{G_1, G_3, G_4\}$.

Мы будем называть подпрямое произведение $G \leq \prod\limits_{i=1}^{m} G_i$ *несократимым*, если для любого собственного подмножества $J \subset \{1, \dots, m\}$ проекция G на $G_J = \prod\limits_{i \in J} G_i$ имеет нетривиальное ядро. (Иначе говоря, G не представляется как подпрямое произведение собственного подмножества $\{G_i \mid i \in J\}$.) Очевидно, подпрямое произведение несократимо тогда и только тогда, когда пересечение $G \cap G_i$ (где G_i понимается как естественным образом вложенное в $G_1 \times \dots \times G_m$) нетривиально для каждого i.

Напомним, что группа G называется *монолитической*, если она имеет ровно одну минимальную нормальную подгруппу K (называемую *монолитом* группы G).

Лемма 2.1. *Пусть $G_1, \dots, G_m$ — монолитические группы с монолитами K_i и $G \leq G_1 \times \dots \times G_m$ — несократимое подпрямое произведение. Тогда $K = K_1 \times \dots \times K_m$ — нормальная подгруппа в G и G/K является подпрямым произведением (может быть, сократимым) групп G_i/K_i.*

Доказательство. Так как произведение несократимо, то $N_i = G \cap G_i \neq 1$ для всех i. Если $n \in N_i$, $g \in G_i$ и $\tilde{g} \in G$ — элемент, i-я компонента которого есть g, то $\tilde{g} n \tilde{g}^{-1} = g n g^{-1}$. Отсюда $N_i \trianglelefteq G_i$. Следовательно, $K_i \subseteq N_i$. Поэтому $K = K_1 \times \dots \times K_m \subseteq G$.

Для данного $1 \leq i \leq m$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{j=1}^{m} G_j \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \prod\limits_{j=1}^{m} (G_j/K_j) \arrow[d, "\gamma"'] \\ G_i \arrow[r, "\delta"] & G_i/K_i \end{tikzcd}$$

(стрелки определены очевидным образом). Она, очевидно, коммутативна. Ясно, что $\mathrm{Ker}(\alpha) = K$, откуда $\alpha G \cong G/K$. Далее, $\gamma(\alpha G) = \delta\beta G = \delta G_i = G_i/K_i$. Так как это верно для любого i, то αG — подпрямое произведение групп G_i/K_i, что и требовалось. $\square$

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *полуформацией* (или *гомоморфом*), если $G/N \in \mathfrak{F}$ для любых $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$.

Лемма 2.2. *Если $\mathfrak{F}$ — полуформация, то любая группа $G \in \mathfrak{F}$ есть подпрямое произведение монолитических групп из $\mathfrak{F}$.*

Доказательство проводится индукцией по порядку группы $G \in \mathfrak{F}$. Если G монолитическая, утверждение очевидно. Иначе существуют минимальные нормальные подгруппы $N, K \triangleleft G$ с $N \cap K = 1$. Тогда G есть подпрямое произведение групп G/N и G/K. Обе эти группы лежат в $\mathfrak{F}$ и по индуктивному предположению являются подпрямыми произведениями монолитических групп из $\mathfrak{F}$, поэтому такова и G. $\square$

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — произвольная формация. Через $\widehat{\mathfrak{F}}$ обозначим класс групп G таких, что $G/\operatorname{Soc}(G) \in \mathfrak{F}$.

Предложение 2.3. *$\widehat{\mathfrak{F}}$ — формация.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\widehat{\mathfrak{F}}$ — полуформация. Достаточно доказать, что если $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$ и L — минимальная нормальная подгруппа в G, то $G/L \in \widehat{\mathfrak{F}}$. Если N — минимальная нормальная подгруппа в G, отличная от L, то NL/L — минимальная нормальная подгруппа в G/L. Отсюда следует, что $\operatorname{Soc}(G)/L \subseteq \operatorname{Soc}(G/L)$. Поэтому $A = (G/L)/\operatorname{Soc}(G/L)$ является фактор-группой для $(G/L)/(\operatorname{Soc}(G)/L) \cong G/\operatorname{Soc}(G)$. Последняя группа лежит в $\mathfrak{F}$, поэтому A также лежит в $\mathfrak{F}$. Отсюда $G/L \in \widehat{\mathfrak{F}}$, что и требовалось.

Осталось доказать, что $\widehat{\mathfrak{F}}$ замкнуто относительно подпрямых произведений. Пусть $A, B \in \widehat{\mathfrak{F}}$ и G — некоторое их подпрямое произведение. Обе A и B представляются как подпрямые произведения некоторого семейства монолитических групп из $\widehat{\mathfrak{F}}$, поэтому то же верно и для G. Удаляя из этого произведения лишние сомножители, видим, что G является несократимым подпрямым произведением некоторого семейства $G_1, \dots, G_m$ монолитических групп из $\widehat{\mathfrak{F}}$. Пусть K_i — их монолиты. Тогда $K = K_1 \times \dots \times K_m$ — нормальная подгруппа в G. Все K_i суть минимальные нормальные подгруппы в G, следовательно, $K \subseteq \operatorname{Soc}(G)$. С другой стороны, проекция любой минимальной нормальной подгруппы $N \triangleleft G$ на G_i есть либо 1, либо минимальная нормальная подгруппа в G_i, т. е. K_i. Отсюда $N \subseteq K$ и тем самым $\operatorname{Soc}(G) \subseteq K$, откуда $\operatorname{Soc}(G) = K$. Наконец, G/K

есть подпрямое произведение групп $G_i/K_i \in \mathfrak{F}$ и потому лежит в $\mathfrak{F}$. Значит, $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$. $\square$

Для $k \geq 0$ пусть $\mathfrak{L}_k = \{G \mid l_s(G) \leq k\}$ — класс всех групп цокольной длины $\leq k$. Ясно, что $\mathfrak{L}_0 = \{1\}$ и $\mathfrak{L}_k = \widehat{\mathfrak{L}}_{k-1}$ при $k \geq 1$. Очевидной индукцией по k получается

Следствие 2.4 (Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба). *Для любого $k \geq 0$ класс $\mathfrak{L}_k$ является формацией.*

Пусть $M = \{X_1, \dots, X_m\}$ — конечное множество характеристически простых групп. Пусть $\mathfrak{F}(M)$ — класс всех групп G таких, что любой главный фактор группы G изоморфен группе из M. Следующее утверждение почти очевидно.

Лемма 2.5. *Класс $\mathfrak{F}(M)$ является формацией.*

Доказательство. Если $N \trianglelefteq G$, то любой главный фактор для G/N является главным фактором и для G. Поэтому $G \in \mathfrak{F}(M)$ влечет $G/N \in \mathfrak{F}(M)$. Остается доказать, что если $N, K \triangleleft G$, $N \cap K = 1$, $G/N \in \mathfrak{F}(M)$ и $G/K \in \mathfrak{F}(M)$, то $G \in \mathfrak{F}(M)$.

Очевидно, главные факторы для G суть в точности композиционные факторы для G, рассматриваемой как G-группа (т. е. как группа с областью операторов G; действие G на себе есть действие внутренними автоморфизмами). Более того, G/N и G/K также являются G-группами, и их G-композиционные факторы суть в точности их главные факторы.

Поскольку $N \cap K = 1$, то N вкладывается как G-группа в G/K. Значит, любой главный фактор для G, лежащий в N, должен быть изоморфен (как G-группа и тем более как группа без операторов) некоторому главному фактору для G/K. Итак, любой главный фактор группы G изоморфен главному фактору для G/N или G/K. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{F}(M)$. $\square$

Обозначим $\mathfrak{F}(k, M) = \mathfrak{L}_k \cap \mathfrak{F}(M)$.

Предложение 2.6. *$\mathfrak{F}(k, M)$ — формация.*

Очевидное следствие двух предыдущих утверждений. $\square$

Определение. Будем говорить, что группа G *формационно разложима*, если существуют группы $G_1, \dots, G_m$ порядка меньше, чем $|G|$, такие, что $\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(G_1, \dots, G_m)$. В противном случае G *формационно неразложима*.

Предложение 2.7. 1. *Любая формация $\mathfrak{F}$ порождается содержащимися в ней формационно неразложимыми группами.*

2. *$\mathfrak{F}$ содержит лишь конечное множество подформаций тогда и только тогда, когда она содержит лишь конечное (с точностью до изоморфизма) множество формационно неразложимых групп.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathscr{B}$ — множество всех формационно неразложимых групп из $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A} = \mathrm{form}(\mathscr{B})$. Покажем, что любая группа $G \in \mathfrak{F}$ лежит в $\mathfrak{A}$. Используем индукцию по $|G|$. Если G формационно неразложима, то утверждение очевидно. Иначе существуют группы $G_1, \dots, G_m$ такие, что $|G_i| < |G|$ и $\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(G_1, \dots, G_m)$. Все G_i суть группы из $\mathfrak{F}$ порядка меньше $|G|$, значит, лежат в $\mathfrak{A}$ по предположению индукции. Поэтому и $G \in \mathfrak{A}$. Утверждение 1 доказано.

2. Заметим, что если G_1 и G_2 формационно неразложимы и $|G_1| \neq |G_2|$, то $\mathrm{form}(G_1) \neq \mathrm{form}(G_2)$. Поэтому бесконечность $\mathscr{B}$ влечет бесконечность числа подформаций в $\mathfrak{F}$. С другой стороны, если $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{F}$ — подформация, то $\mathfrak{C} = \mathrm{form}(\mathscr{B} \cap \mathfrak{C})$. Если $\mathscr{B}$ конечно, то для $\mathscr{B} \cap \mathfrak{C}$, значит, и для $\mathfrak{C}$ есть лишь конечное число возможностей. $\square$

Теперь мы сформулируем предложение, которое будет доказано в разд. 4.

Предложение 2.8. *Пусть M — конечное множество характеристически простых групп. Тогда класс $\mathfrak{F}(2, M)$ содержит лишь конечное число формационно неразложимых групп.*

Теорема 1.1 является легким следствием этого предложения. Действительно, если $l_s(G) \leq 2$, то G лежит в $\mathfrak{F}(2, M)$, где M есть множество всех главных факторов для G. Последняя формация содержит лишь конечное множество формационно неразложимых групп и, следовательно, лишь конечное множество подформаций. Тем более $\mathrm{form}(G)$ содержит лишь конечное множество подформаций.

Замечание. В предыдущих работах [4–6] использовалось понятие формационной критичности, а не формационной неразложимости. Группа G *формационно критическая*, если не существует групп $G_1, \dots, G_m$ таких, что $\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(G_1, \dots, G_m)$ и все G_i — собственные сечения группы G. Если группа неразложима, то она критична. Обратное, видимо, неверно. В рассуждениях из [4–6] формационно критические группы могут быть заменены формационно неразложимыми. С другой стороны, в настоящей работе неразложимые группы не могут быть заменены критическими.

3. Необходимые сведения о когомологиях

Пусть G — группа, M — G-модуль (т. е. $\mathbb{Z}G$-модуль). Под *расширением модуля M с помощью G* мы понимаем короткую точную последовательность групп

$$E : 1 \to M \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{\rho} G \to 1,$$

согласованную со структурой G-модуля на M, т. е. такую, что $gi(m)g^{-1} = i(\rho(g)m)$ для любых $m \in M$, $g \in \widetilde{G}$.

Отображение $c : G \times G \to M$ называется (*нормализованным*) 2-*коциклом*, если (а) $c(1, x) = c(x, 1) = 0$ для любого $x \in G$ и (б) $c(x, y) + c(xy, z) = xc(y, z) + c(x, yz)$ для любых $x, y, z \in G$, и (*нормализованной*) 2-*кограницей*, если оно представляется как $c(x, y) = xb(y) + b(x) - b(xy)$ для некоторого отображения $b : G \to M$ такого, что $b(1) = 0$. Всякая 2-кограница является 2-коциклом. *Группа* 2-*когомологий* есть фактор-группа $H^2(G, M) = Z^2(G, M)/B^2(G, M)$, где Z^2 и B^2 суть группы 2-коциклов и 2-кограниц соответственно. Для ненормализованных 2-коциклов и 2-кограниц (т. е. без условий $c(x, 1) = c(1, x) = b(1) = 0$) группы H^2 те же самые, что и для нормализованных. В дальнейшем рассматриваются лишь нормализованные 2-коциклы и 2-кограницы.

Пусть E — расширение, как выше. Для каждого $g \in G$ выберем прообраз $\tilde{g} \in \rho^{-1}(g)$, причем в качестве представителя для $1 \in G$ возьмем $1 \in \widetilde{G}$. Тогда легко проверить, что формула $c(x, y) = i^{-1}(\tilde{x}\tilde{y}\widetilde{xy}^{-1})$ определяет 2-коцикл на G. Два коцикла, отвечающие различным выборам системы представителей $\{\tilde{g}\}$, отличаются на кограницу. Таким образом, каждому расширению отвечает однозначно определенный класс 2-когомологий, который мы будем обозначать через $[E]$. Обратно, если c есть 2-коцикл, то мы можем определить на множестве $\widetilde{G} = M \times G$ структуру группы по правилу $(m, g)(l, h) = (m + gl + c(g, h), gh)$. Тогда

$$E : 1 \to M \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{\rho} G \to 1,$$

где i и ρ определены правилами $i(m) = (m, 1)$ и $\rho((m, x)) = x$, является расширением M с помощью G.

Любые два расширения, отвечающие одному и тому же классу когомологий, в определенном смысле эквивалентны, и множество $\mathscr{E}(G, M)$ классов этой эквивалентности находится в биекции с $H^2(G, M)$. Детали могут быть найдены в [8, гл. 4; 9, гл. 4; 10, § 2.7].

Для двух расширений

$$E_j : 1 \to M \xrightarrow{i_j} \widetilde{G}_j \xrightarrow{\rho_j} G \to 1,$$

где $j = 1, 2$, определим их *сумму Бэра* E следующим образом. В прямом произведении $\widetilde{G}_1 \times \widetilde{G}_2$ рассмотрим подгруппу $L = \{(g_1, g_2) \mid \rho_1(g_1) = \rho_2(g_2)\}$. Далее, $N = \{(i_1(m), i_2(-m)) \mid m \in M\}$ является нормальной подгруппой в L. Положим $\widetilde{G} = L/N$. Определим $\rho : \widetilde{G} \to G$ и $i : M \to \widetilde{G}$ правилами $\rho((x, y) \bmod N) = \rho_1(x)(= \rho_2(y))$, $i(m) = (i_1(m), 1) \bmod N$. Тогда несложно проверить, что

$$E : 1 \to M \xrightarrow{i} \widetilde{G} \xrightarrow{\rho} G \to 1$$

является расширением и его класс $\theta = [E]$ совпадает с суммой классов $\theta_1 = [E_1]$ и $\theta_2 = [E_2]$.

Далее, для данного расширения E, как выше, определим $(-E)$ как

$$(-E) : 1 \to M \xrightarrow{i_1} \widetilde{G} \xrightarrow{\rho} G \to 1,$$

где $i_1(m) = i(-m)$. Несложно видеть, что $[(-E)] = -[E]$.

Для данного класса $\theta \in H^2(G, M)$ пусть $\widetilde{G}(\theta)$ есть группа $\widetilde{G}$, появляющаяся в расширении E таком, что $[E] = \theta$. Очевидно, класс изоморфизма группы $\widetilde{G}$ зависит только от θ. Отметим, что для различных классов θ группы $\widetilde{G}(\theta)$ могут быть изоморфны. В частности, как следует из определения расширения $(-E)$, всегда $\widetilde{G}(-\theta) \cong \widetilde{G}(\theta)$.

Через $\mathrm{Aut}(G, M)$ обозначим множество всех пар $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(M)$, согласованных в том смысле, что $\alpha(g)\beta(m) = \beta(gm)$ для любых $g \in G$, $m \in M$. Очевидно, $\mathrm{Aut}(G, M)$ есть группа относительно покомпонентного умножения. Определим действие $\mathrm{Aut}(G, M)$ на $H^2(G, M)$ следующим образом. Пусть $\theta \in H^2(G, M)$ представлено коциклом c. Тогда $c_1 = (\alpha, \beta)c$, определенное тем, что $c_1(x, y) = \beta(c(\alpha^{-1}x, \alpha^{-1}y))$, является коциклом. Положим $(\alpha, \beta)\theta = \theta_1 = [c_1]$. Несложно видеть, что в терминах расширений θ_1 может быть описано следующим образом. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\ j\ } & \widetilde{G} & \xrightarrow{\ \rho\ } & G & \longrightarrow & 1 \\
 & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\| & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\ j_1\ } & \widetilde{G} & \xrightarrow{\ \rho_1\ } & G & \longrightarrow & 1\ ,
\end{array}$$

где верхняя строка есть расширение, представляющее θ, а нижняя определяется из условия коммутативности диаграммы, т. е. $j_1 = j\beta^{-1}$, $\rho_1 = \alpha\rho$. Легко показать, что нижняя строка является расширением и его класс есть в точности θ_1.

Из последнего описания следует, в частности, что $\widetilde{G}(\theta_1) \cong \widetilde{G}(\theta)$.

Полезность 2-когомологий для изучения формаций иллюстрируется следующей леммой.

Лемма 3.1. *Пусть M есть G-модуль и $\mathfrak{F}$ есть произвольная формация. Тогда*
$$H^2(G,M)_{\mathfrak{F}} = \{\theta \in H^2(G,M) \mid \widetilde{G}(\theta) \in \mathfrak{F}\}$$
либо пусто, либо является $\mathrm{Aut}(G,M)$*-подмодулем в* $H^2(G,M)$.

Доказательство. Поскольку всегда $\widetilde{G}(-\theta) \cong \widetilde{G}(\theta)$, то $\theta \in H^2(G,M)_{\mathfrak{F}}$ влечет $-\theta \in H^2(G,M)_{\mathfrak{F}}$. Кроме того, из описания сложения Бэра следует, что $\widetilde{G}(\theta_1+\theta_2)$ является фактор-группой подпрямого произведения групп $\widetilde{G}(\theta_1)$ и $\widetilde{G}(\theta_2)$. Поэтому $\widetilde{G}(\theta_1), \widetilde{G}(\theta_2) \in \mathfrak{F}$ влечет $\widetilde{G}(\theta_1+\theta_2) \in \mathfrak{F}$. Наконец, $\mathrm{Aut}(G,M)$-инвариантность $H^2(G,M)_{\mathfrak{F}}$ следует из того, что $\widetilde{G}(\theta)$ и $\widetilde{G}((\alpha,\beta)\theta)$ всегда изоморфны. □

Теперь рассмотрим одну специальную ситуацию. Пусть $G = G_1 \times \dots \times G_m$, $K \cong Z_p$, K рассматривается как модуль с тривиальным действием над G и всеми G_i. Опишем отображение $\sigma : \bigoplus_{i=1}^{m} H^2(G_i,K) \to H^2(G,K)$. Пусть $\theta_i \in H^2(G_i,k)$ представляется коциклом $c_i \in Z^2(G_i,K)$. Определим $c : G \times G \to K$ формулой
$$c((x_1,\dots,x_m),(y_1,\dots,y_m)) = \sum_{i=1}^{m} c_i(x_i,y_i). \tag{1}$$
Легко проверить, что c — коцикл и его класс $\theta = [c]$ зависит только от $\theta_1,\dots,\theta_m$. Положим $\sigma(\theta_1,\dots,\theta_m) = \theta$. Далее, легко видеть, что σ есть гомоморфизм групп.

Пусть $\theta = \sigma(\theta_1,\dots,\theta_m)$ и
$$E : 1 \to K \xrightarrow{j} \widetilde{G} \xrightarrow{\rho} G \to 1 \tag{2}$$
— любое расширение с $[E] = \theta$. Пусть
$$E_i : 1 \to K \xrightarrow{j} \widetilde{G}_i \xrightarrow{\rho_i} G_i \to 1 \tag{3}$$
суть ограничения E на подгруппы G_i; здесь $\widetilde{G}_i = \rho^{-1}(G_i)$ и $\rho_i = \rho|_{\widetilde{G}_i}$. Легко видеть, что $[E_i] = \theta_i$. Кроме того, $\widetilde{G}_i$ и $\widetilde{G}_j$ коммутируют при $i \neq j$. Таким образом, $\widetilde{G}$ является центральным произведением групп $\widetilde{G}_i$ с отождествленной подгруппой K.

Обратно, допустим, что $\theta \in H^2(G,K)$ таково, что для соответствующего расширения вида (2) подгруппы $\widetilde{G}_i = \rho^{-1}(G_i)$ попарно коммутируют. Тогда нетрудно проверить, что $\theta = \sigma(\theta_1,\dots,\theta_m)$, где $\theta_i = [E_i] = \theta|_{G_i}$. В самом деле, возьмем для элементов $g \in G_i$ какие-либо прообразы $\tilde{g}$. Пусть $c_i \in Z^2(G_i,K)$ — отвечающие данному выбору прообразов коциклы. Очевидно, $[c_i] = \theta_i$. Теперь определим прообраз для произвольного элемента $g = (g_1,\dots,g_m) \in G_1 \times \dots \times G_m$ как $\tilde{g} = \tilde{g}_1 \dots \tilde{g}_m$. Несложно вычислить, что коцикл c, соответствующий данному выбору прообразов, определяется формулой (1). Это и значит, что $\theta = \sigma(\theta_1,\dots,\theta_m)$.

Если среди $\theta_1,\dots,\theta_m$ есть нули, скажем $\theta_i = 0$, то соответствующее расширение E_i расщепимо, откуда $\widetilde{G}_i = K \times \widehat{G}_i$, $\widehat{G}_i \cong G_i$. Легко видеть, что $\widehat{G}_i$ выделяется прямым сомножителем в $\widetilde{G}$.

Наконец, допустим, что среди $G_1,\dots,G_m$ есть изоморфные группы. Пусть, например, $G = G_1 \times G_2 \times G_3$ и $G_2 \cong G_3$. Выберем и фиксируем изоморфизм между G_2 и G_3, так что мы можем записать $G = G_1 \times G_2 \times G_2$. Далее, $H^2(G_2,K)$ отождествляется с $H^2(G_3,K)$. Пусть $\theta_1 \in H^2(G_1,K)$, $\theta_2,\theta_3 \in H^2(G_2,K)$, $\theta = \sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ и $\theta' = \sigma(\theta_1,\theta_3,\theta_2)$.

Лемма 3.2. *В указанных выше предположениях $\widetilde{G}(\theta)$ и $\widetilde{G}(\theta')$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть c_i — коциклы, представляющие классы θ_i. Тогда коциклы c и c', представляющие классы θ и θ' соответственно, могут быть определены формулами

$$c((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = c_1(x_1,y_1) + c_2(x_2,y_2) + c_3(x_3,y_3),$$
$$c'((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = c_1(x_1,y_1) + c_3(x_2,y_2) + c_2(x_3,y_3).$$

Пусть $\pi : G \to G$ переставляет два последних сомножителя, т. е. $\pi((g_1,g_2,g_3)) = (g_1,g_3,g_2)$, и пусть $\hat{\pi} = (\pi, \mathrm{id}_K)$. Тогда класс $\hat{\pi}\theta$ представлен коциклом $c_1 = \hat{\pi}c$, определенным тем, что $c_1(x,y) = c(\pi^{-1}x, \pi^{-1}y)$, т. е.

$$\begin{aligned} c_1((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) &= c((x_1,x_3,x_2),(y_1,y_3,y_2)) \\ &= c_1(x_1,y_1) + c_2(x_3,y_3) + c_3(x_2,y_2), \end{aligned}$$

что совпадает с $c'((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3))$. Значит, $\theta' = \hat{\pi}\theta$, откуда $\widetilde{G}(\theta') \cong \widetilde{G}(\theta)$. $\square$

Разумеется, подобное утверждение верно и для других случаев, когда среди G_i есть изоморфные сомножители.

Теперь мы готовы доказать ключевую лемму данной работы.

Лемма 3.3. *Пусть G есть группа, $K \subseteq Z(G)$, $K \cong Z_p$, и $H = G/K$ разлагается как $H = A \times B_1 \times B_2$. Предположим далее, что это разложение обладает следующими свойствами:* 1) $A, B_1, B_2 \neq 1$; 2) $B_1 \cong B_2$; 3) *подгруппы $\widetilde{A}, \widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2 \subset G$, которые суть прообразы в G подгрупп A, B_1 и B_2 соответственно, попарно коммутируют. Тогда G формационно разложима.*

Доказательство. Возьмем каноническую последовательность

$$1 \to K \to G \to H \to 1,$$

и пусть θ — ее когомологический класс, так что $G \cong \widetilde{H}(\theta)$. Предшествующие рассмотрения показывают, что $\theta = \sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ для некоторых $\theta_1 \in H^2(A,K)$, $\theta_2 \in H^2(B_1,K)$, $\theta_3 \in H^2(B_2,K)$.

Обозначим $B = B_1$ и фиксируем некоторый изоморфизм B_1 с B_2, так что $H = A \times B \times B$. Далее, положим $H_1 = H \times B = A \times B \times B \times B$. Наконец, пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{form}(G)$. Тогда группа $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_1(\eta_1)$, где $\eta_1 = \sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3,0)$, изоморфна $G \times B$, поэтому лежит в $\mathfrak{F}$, т. е. $\sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3,0) \in H^2(H_1,K)_{\mathfrak{F}}$.

Если $\xi_1 \in H^2(A,K)$, $\xi_2,\xi_3,\xi_4 \in H^2(B,K)$ и π — произвольная перестановка на множестве $\{2,3,4\}$, то, как следует из предыдущей леммы, группы $\widetilde{H}_1(\sigma(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4))$ и $\widetilde{H}_1(\sigma(\xi_1,\xi_{\pi(2)},\xi_{\pi(3)},\xi_{\pi(4)}))$ изоморфны. Отсюда вытекает, что класс $\eta_2 = \sigma(\theta_1,\theta_2,0,\theta_3)$ также лежит в $H^2(H_1,K)_{\mathfrak{F}}$, которая содержит и

$$\sigma(0,0,\theta_3,-\theta_3) = \sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3,0) - \sigma(\theta_1,\theta_2,0,\theta_3),$$

а следовательно, и $\eta_3 = \sigma(0,\theta_3,-\theta_3,0)$, а потому и

$$\eta_4 = \sigma(\theta_1,\theta_2+\theta_3,0,0) = \sigma(\theta_1,\theta_2,\theta_3,0) + \sigma(0,\theta_3,-\theta_3,0) = \eta_1 + \eta_3.$$

Заметим, что $\widetilde{H}_1(\eta_3) \cong A \times \widetilde{H}_2 \times B$, где $H_2 = B \times B$ и $\widetilde{H}_2 = \widetilde{H}_2(\sigma(\theta_3,-\theta_3))$. Аналогично $\widetilde{H}_1(\eta_4) \cong \widetilde{H}_3 \times B \times B$, где $H_3 = A \times B$ и $\widetilde{H}_3 = \widetilde{H}_3(\sigma(\theta_1,\theta_2+\theta_3))$. Поскольку $\widetilde{H}_1(\eta_3)$ и $\widetilde{H}_1(\eta_4) \in \mathfrak{F}$, видим, что $\widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3 \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $A, B, \widetilde{H}_2, \widetilde{H}_3 \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, $\eta_1 = \eta_4 - \eta_3$, поэтому $\widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_1(\eta_1)$ есть подпрямое произведение групп $\widetilde{H}_1(\eta_3)$ и $\widetilde{H}_1(\eta_4)$, значит, $\widetilde{H}_1$ и G лежат в формации, порожденной $A, B, \widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_3$. Тем самым $\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(A,B,\widetilde{H}_2,\widetilde{H}_3)$. Поскольку все группы A, B, $\widetilde{H}_2$ и $\widetilde{H}_3$ имеют порядок меньше $|G|$, это и означает, что G формационно разложима. $\square$

4. Формационно неразложимые группы

Цель этого раздела — доказать предложение 2.8.

Следующая важная лемма почти очевидна.

Лемма 4.1. *Формационно неразложимая группа монолитична.*

Доказательство. Допустим, G имеет две различные минимальные нормальные подгруппы K и L. Тогда $K \cap L = 1$. Отсюда тотчас следует $\mathrm{form}(G) = \mathrm{form}(G/K, G/L)$. Значит, G формационно разложима. $\square$

Хорошо известно, что группа совпадает со своим цоколем тогда и только тогда, когда она является полупростой, т. е. прямым произведением нескольких простых групп. Также известно, что в полупростой группе любая нормальная подгруппа дополняема (см., например, лемму 4.6 книги [2]).

Лемма 4.2. *Пусть G — монолитическая группа из $\mathfrak{F}(2, M)$. Тогда либо $l_s(G) = 1$ и G — простая группа из M, либо $l_s(G) = 2$, монолит K группы G лежит в M и фактор-группа G/K — прямое произведение нескольких (не обязательно различных) простых групп из M.*

Доказательство. Если $l_s(G) = 1$, то G полупроста. Если при этом G монолитична, то она проста (и, очевидно, лежит в M). Пусть $l_s(G) = 2$. Так как G монолитична, цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ совпадает с монолитом K. Фактор $G/\mathrm{Soc}(G)$ — полупростая группа. Ее простые сомножители являются ее главными факторами и потому лежат в M. $\square$

Пусть G — формационно неразложимая группа из $\mathfrak{F}(2, M)$ и K — ее монолит. Возможны 3 случая: (1) K неабелев; (2) K абелев и $K \not\subseteq Z(G)$; (3) $K \subseteq Z(G)$. Мы покажем, что в каждом из этих случаев для G есть лишь конечное число возможностей.

Случай неабелева монолита. Нужное нам утверждение вытекает из следующего.

Лемма 4.3. *Пусть K — неабелева характеристически простая группа. Тогда существует лишь конечное число монолитических групп, монолит которых изоморфен K.*

Доказательство. Пусть G — монолитическая группа с монолитом K. Заметим, что $C_G(K)$ есть нормальная подгруппа в G. Поскольку K неабелева и характеристически проста, то $Z(K) = 1$. Отсюда $K \cap C_G(K) \subseteq Z(K) = 1$. Из монолитичности G следует $C_G(K) = 1$. Значит, G действует на K точно и поэтому изоморфна некоторой подгруппе в $\mathrm{Aut}(K)$. $\square$

Случай, когда монолит абелев и нецентрален. В этом случае K — характеристически простая абелева группа, т. е. $K \cong Z_p^k$ для некоторых p и k. Нужное нам утверждение вытекает из следующего.

Предложение 4.4. *Для данных p, k существует лишь конечное число групп G таких, что G монолитична, ее монолит K изоморфен Z_p^k, $K \not\subseteq Z(G)$, и G/K — произведение нескольких простых групп.*

Для доказательства нам потребуется лемма. Ниже $\mathbb{F}_p$ обозначает конечное поле из p элементов.

Лемма 4.5. *Пусть H — группа и V — $\mathbb{F}_pH$-модуль, имеющий единственный минимальный подмодуль. Тогда V изоморфен подмодулю регулярного модуля $\mathbb{F}_pH$.*

Доказательство. Поскольку V имеет единственный минимальный подмодуль, то двойственный модуль V^* имеет единственный максимальный подмодуль, который обозначим через L. Возьмем элемент $v \in V^* - L$. Тогда порожденный им подмодуль $\mathbb{F}_pH\langle v\rangle$ не является подмодулем в L, значит, должен совпадать со всем V^*. Тем самым V^* — фактор-модуль регулярного модуля. Поскольку регулярный модуль самодвойствен, видим, что V изоморфен подмодулю регулярного модуля. □

Доказательство предложения 4.4. Пусть G — группа, удовлетворяющая данным условиям. Тогда G/K действует на K. Пусть A — ядро этого действия. Поскольку G/K полупроста, то A дополняема, $G/K = A \times B$. Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ — прообразы A и B в G. Поскольку B действует на K точно, то B вкладывается в $\mathrm{Aut}(K) \cong GL(k,p)$. Следовательно, для B есть лишь конечное число возможностей.

Покажем, что $\widetilde{A}$ — элементарная абелева p-группа. Если $a \in \widetilde{A}$, $b \in \widetilde{B}$, то $c = [a,b] \in K \subseteq Z(\widetilde{A})$. Далее, пусть $a_1, a_2 \in \widetilde{A}$, $c_1 = [b,a_1]$, $c_2 = [b,a_2]$. Тогда $a_1^b = ba_1b^{-1} = c_1a_1$ и $a_2^b = c_2a_2$. Поскольку оба c_1 и c_2 лежат в центре группы $\widetilde{A}$, то $[c_1a_1, c_2a_2] = [a_1,a_2]$, значит, $[a_1,a_2]^b = \left[a_1^b, a_2^b\right] = [a_1,a_2]$. Таким образом, $[\widetilde{A},\widetilde{A}]$ и $\widetilde{B}$ поэлементно коммутируют. Так как $[\widetilde{A},\widetilde{A}]$ характеристична в $\widetilde{A}$, она нормальна в G. Поскольку B действует на K точно и неприводимо, имеем $C_K(B) = 1$, откуда $K \cap [\widetilde{A},\widetilde{A}] = 1$. Отсюда и из монолитичности следует $[\widetilde{A},\widetilde{A}] = 1$, т. е. $\widetilde{A}$ абелева. Поэтому B действует на $\widetilde{A}$.

Далее, p'-компонента в $\widetilde{A}$ является характеристической подгруппой, тривиально пересекающей K, поэтому сама тривиальна. Тогда A — произведение нескольких экземпляров Z_p. Отображение $\varphi : x \mapsto x^p$ на $\widetilde{A}$ является B-эндоморфизмом. Поскольку на K это отображение тривиально, получаем B-гомоморфизм из A в K. Но таких гомоморфизмов нет, так как на A группа B действует тривиально, а на K — нетривиально и неприводимо. Итак, $\varphi = 0$, т. е. $\widetilde{A}$ — элементарна абелева.

Очевидно, нормальные подгруппы в G, лежащие в $\widetilde{A}$, — это в точности B-подмодули в $\widetilde{A}$. Значит, K — единственный минимальный B-подмодуль в $\widetilde{A}$. По лемме 4.5 $\widetilde{A}$ изоморфен подмодулю регулярного модуля $\mathbb{F}_pB$, поэтому для $\widetilde{A}$ также имеется лишь конечное число возможностей при каждом возможном B. □

Случай, когда монолит централен. Если монолит K монолитической группы G лежит в центре, то он обязательно изоморфен Z_p, где p простое. Для любой подгруппы $X \subseteq G/K$ будем обозначать через $\widetilde{X}$ прообраз X в G.

Лемма 4.6. *Если G — монолитическая группа из $\mathfrak{F}(2,M)$, K — ее монолит, $K \subseteq Z(G)$ и $K \cong Z_p$, то существует разложение $G/K = A_0 \times A_1 \times \dots \times A_m \times B_1 \times \dots \times B_l$ со следующими свойствами:*

1) $A_0 = 1$ или $A_0 \cong Z_p$, $A_i \cong Z_p^2$ при $i \geq 1$, B_i — неабелева простая группа порядка, делящегося на p;

2) $\widetilde{A}_0 = K \cong Z_p$ или $\widetilde{A}_0 \cong Z_{p^2}$, $\widetilde{A}_i$ экстраспециальна при $i \geq 1$ и $\widetilde{B}_i$ — нерасщепимое расширение K с помощью B_i;

3) *если N и L —любые две различные группы из $\{A_0, \dots, B_l\}$, то $[\widetilde{N}, \widetilde{L}] = 1$ (таким образом, G является центральным произведением $\widetilde{A}_0 * \dots * \widetilde{B}_l$ с отождествленным центром K).*

Доказательство. Фактор-группа G/K есть произведение нескольких простых групп. Разложим $G/K = A \times B \times C$, где A содержит все сомножители Z_p, B — все неабелевы сомножители порядков, делящихся на p, и C — все сомножители, являющиеся p'-группами.

Покажем, что $C = 1$. По теореме Шура — Цассенхауза любое расширение p-группы с помощью p'-группы расщепимо. В частности, если это расширение центрально, то оно является прямым произведением подгруппы на фактор-группу. Значит, $\widetilde{C} = K \times C_1$, где $C_1 \cong C$. Поскольку C_1 характеристична в $\widetilde{C}$, монолитичность G влечет $C_1 = 1$, откуда $C = 1$.

Теперь разложим $B = B_1 \times \dots \times B_l$, B_i просты. Если $\widetilde{B}_i$ — расщепимое расширение K с помощью B_i, то $\widetilde{B}_i = K \times B_i^1$, где $B_i^1 \cong B_i$, и потому характеристична в $\widetilde{B}_i$; противоречие. Значит, $\widetilde{B}_i$ нерасщепима. В частности, $[\widetilde{B}_i, \widetilde{B}_i] = \widetilde{B}_i$.

Далее, для каждого $i = 1, \dots, l$ имеем $G/K = L_i \times B_i$, где $L_i = A \times \prod\limits_{j \neq i} B_j$. То же рассуждение, что применялось в случае нецентрального монолита, показывает, что если $g \in \widetilde{L}_i$ и $b_1, b_2 \in \widetilde{B}_i$, то g коммутирует с $[b_1, b_2]$. Следовательно, $\widetilde{L}_i$ поэлементно коммутирует с $[\widetilde{B}_i, \widetilde{B}_i] = \widetilde{B}_i$. В частности, $\widetilde{B}_i$ коммутирует с $\widetilde{B}_j$ при $j \neq i$, а также с $\widetilde{A}$.

Нам остается получить разложение $A = A_0 \times \dots \times A_m$, удовлетворяющее нужным условиям. Поскольку A — элементарная абелева p-группа, мы можем рассматривать ее как пространство над $\mathbb{F}_p$. Также отождествим K с $\mathbb{F}_p$ посредством некоторого изоморфизма $\varphi : K \to \mathbb{F}_p$. Как обычно, коммутатор определяет кососимметрическую билинейную форму f на A (именно, для $a, b \in A$ положим $f(a, b) = \varphi([\tilde{a}, \tilde{b}])$, где $\tilde{a}, \tilde{b}$ — какие-нибудь прообразы для a и b соответственно). Положим $A_0 = \operatorname{Ker}(f)$. Очевидно, что $\widetilde{A}_0 \subseteq Z(\widetilde{A}) \subseteq Z(G)$ (и даже $\widetilde{A}_0 = Z(G)$, но сейчас нам это не нужно). Поскольку центр монолитической группы имеет ранг ≤ 1, то либо $\widetilde{A}_0 = K$ и $A_0 = 1$, либо $\widetilde{A}_0 \cong Z_{p^2}$ и $A_0 \cong Z_p$. Наконец, выберем дополнение A^+ к A_0 в A. Ограничение $f|_{A^+}$ невырожденно, и мы можем разложить A^+ в ортогональную прямую сумму двумерных невырожденных подпространств A_i: $A^+ = A_1 \dotplus \dots \dotplus A_m$. Тогда $A_i \cong Z_p^2$, $\widetilde{A}_i$ неабелева и $\widetilde{A}_i$ коммутирует с $\widetilde{A}_j$ при $i \neq j$. □

Лемма 4.7. *Формация $\mathfrak{F}(2, M)$ содержит лишь конечное число формационно неразложимых групп G таких, что $K \subseteq Z(G)$.*

Доказательство. Прежде всего $K \cong Z_p$ для некоторого простого p. Так как M содержит лишь конечное множество групп Z_p, для K имеется конечное число возможностей. Далее, для G/K имеет место разложение $G/K = A_0 \times \dots \times B_l$ со свойствами, описанными в предыдущей лемме. Наконец, из леммы 3.3 следует, что если G формационно неразложима, то либо среди групп $A_0, \dots, B_l$ нет двух изоморфных, либо в этом наборе групп ровно две неединичных и они изоморфны. В каждом из этих случаев, очевидно, имеется лишь конечное число возможностей для G/K. □

Доказательства предложения 2.8 и теоремы 1.1 закончены.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
3. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 13-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1995.
4. *Bryant R. M., Bryce R. A., Hartley B.* The formation generated by a finite group // Bull. Austral. Math. Soc. 1970. V. 2. P. 347–357.
5. *Bryant R. M., Foy P. D.* The formation generated by a finite group // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1995. V. 94. P. 215–225.
6. *Скиба А. Н.* О формациях, порожденных классами групп // Вести АН БССР, сер. физ.-мат. наук. 1981. Т. 140. С. 33–38.
7. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
8. *Браун К. С.* Когомологии групп. М.: Наука, 1987.
9. *Маклейн С.* Гомология. М.: Мир, 1966.
10. *Suzuki M.* Group theory. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1983.

Статья поступила 11 июля 2007 г.

Буриченко Владимир Петрович
Институт математики НАН Беларуси,
ул. Кирова, 32а, Гомель 246000, Беларусь
`goim@nauka.belpak.gomel.by,` `vpburich@gmail.com`