*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6*

*УДК 517.984*

# АСИМПТОТИКА СПЕКТРА НЕГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

**Э. Ф. Ахмерова**

**Аннотация.** Получена асимптотика спектра негладкого возмущения одномерного гармонического осциллятора. Используется аппарат теории возмущений, основанный на асимптотическом представлении части ядра резольвенты невозмущенного оператора в некоторой окрестности каждого из собственных чисел. Аналогичные вопросы будут рассмотрены ниже в подобных ситуациях.

**Ключевые слова:** гармонический осциллятор, асимптотика спектра, негладкое возмущение.

Рассмотрим оператор $H = H^0 + V$ в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, где $H^0 = -d^2/dx^2 + x^2$, $V$ — оператор умножения на вещественную измеримую убывающую на бесконечности функцию. Как известно (см., например, [1, гл. 5, § 4, с. 326]), спектр оператора $H^0$ состоит из чисел $2n+1$, а соответствующие нормированные собственные функции суть $\varphi_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где $H_n(x)$ — многочлены Чебышева — Эрмита. Асимптотика собственных чисел возмущенного оператора $H = H^0 + V$ для гладких убывающих на бесконечности функций впервые подробно изучена в [2], где использовано эталонное решение с помощью функций Эйри [3, гл. 11, § 1, с. 377]. Так как $V(x)$ не предполагается гладкой, мы не можем непосредственно применить технику эталонных решений к функции $q(x) = x^2 + V(x)$. В данной работе используем аппарат теории возмущений, основанный на изучении асимптотического представления ядра резольвенты невозмущенного оператора.

Обозначим через $\lambda_n$ собственные значения оператора $H^0$, через $P_n$ — соответствующие проекторы на собственные подпространства, а через $R^0(\lambda)$ — резольвенту оператора $H^0$, $R^0(\lambda) = (H^0 - \lambda)^{-1}$. Согласно [4] если $V$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|\lambda-\lambda_n|\le 1/2} \big\| R_n^0(\lambda)V \big\| = 0, \tag{1}$$

где $R_n^0(\lambda) = R^0(\lambda) - (\lambda_n - \lambda)^{-1}P_n$, то спектр оператора $H = H^0 + V$ определяется из уравнения

$$\lambda = \lambda_n + (V\varphi_n, \varphi_n) - (VR_n(\lambda)V\varphi_n, \varphi_n). \tag{2}$$

Здесь $(.,.)$ — скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, $\varphi_n$ — нормированный собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_n$,

$$R_n(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \big[R_n^0(\lambda)V\big]^m R_n^0(\lambda). \tag{3}$$

© **2008 Ахмерова Э. Ф.**

Таким образом, задача асимптотического разложения собственных значений возмущенного оператора $H = H^0 + V$ сводится к исследованию поведения части $R_n^0(\lambda)$ резольвенты невозмущенного оператора $H^0$ в окрестности $\lambda = \lambda_n$.

В $L^2(0,\infty)$ рассмотрим операторы $L_D^+ u = -u'' + x^2 u$, $u(0) = 0$ и $L_N^+ u = -u'' + x^2 u$, $u'(0) = 0$. Тогда спектр $L_D^+$ состоит из чисел $\lambda_n = 4n + 3$, а оператор $L_N^+$ имеет собственные значения $\lambda_n = 4n+1$, $n \geq 0$. В п. 1 показано, что для изучения $R_n^0(\lambda)$ достаточно изучить резольвенты $B_D^+(\lambda)$ и $B_N^+(\lambda)$, соответствующие операторам задач Дирихле и Неймана в $L^2(0,\infty)$. В п. 2 получены представления ядер $B_D^+(x,t,\lambda)$ и $B_N^+(x,t,\lambda)$ указанных резольвент, в п. 3 дано асимптотическое представление части ядра резольвенты гармонического осциллятора в окрестности собственных чисел. На этой основе с использованием методов теории возмущений доказывается теорема об асимптотическом представлении спектра возмущенного гармонического осциллятора.

**1.** Представим оператор $H^0$ в виде

$$H^0 = H_D^0 \oplus H_N^0, \tag{4}$$

где $H_D^0$ и $H_N^0$ — сужения $H^0$ на инвариантные подпространства соответственно нечетных и четных функций из $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Далее, операторы $H_D^0$ и $H_N^0$, в свою очередь, разлагаются в прямые суммы

$$H_D^0 = L_D^- \oplus L_D^+, \quad H_N^0 = L_N^- \oplus L_N^+, \tag{5}$$

где

$$L_D^\pm = H_D^0|_{\mathbf{H}^\pm}, \quad L_N^\pm = H_N^0|_{\mathbf{H}^\pm}, \quad H^\pm = \{y \in \mathbf{H} : y(\mp x) = 0, x > 0\}.$$

Замечание 1. Ясно, что $\mathbf{H}^\pm$ изоморфно $(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^\pm))$. Поэтому операторы $L_D^\pm$ и $L_N^\pm$ унитарно эквивалентны операторам задач Дирихле и Неймана для гармонического осциллятора на полуосях $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^-$ соответственно. Именно поэтому мы употребляем обозначения $H_D^0$ и $H_N^0$. Тогда спектры операторов $H_D^0$ и $H_N^0$ суть $\{\lambda_{2k+1}\}_{k=0}^\infty$ и $\{\lambda_{2k}\}_{k=0}^\infty$ соответственно.

Пусть $R^0(\lambda)$, $R_D^0(\lambda)$, $R_N^0(\lambda)$ — резольвенты операторов $H^0$, $H_D^0$ и $H_N^0$. Из соотношения (4) имеем

$$R^0(\lambda) = R_D^0(\lambda) \oplus R_N^0(\lambda). \tag{6}$$

Для ядер указанных резольвент справедливы разложения

$$R^0(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{2n+1-\lambda}, \tag{7}$$

$$R_D^0(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_{2n+1}(x)\varphi_{2n+1}(t)}{4n+3-\lambda}, \tag{8}$$

$$R_N^0(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi_{2n}(x)\varphi_{2n}(t)}{4n+1-\lambda}. \tag{9}$$

Отсюда в силу соотношений $\varphi_n(-x) = (-1)^n \varphi_n(x)$ получим

$$R_D^0(-x,t,\lambda) = -R_D^0(x,t,\lambda) = R_D^0(x,-t,\lambda), \tag{10}$$

$$R_N^0(-x,t,\lambda) = R_N^0(x,t,\lambda) = R_N^0(x,-t,\lambda) \tag{11}$$

для всех $x, t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \neq 2n+1$.

Таким образом, для изучения ядра $R^0(x,t,\lambda)$ оператора $R^0(\lambda)$ при $x \in (-\infty,\infty)$, $t \in (-\infty,\infty)$ достаточно изучить ядра $R_D^0(x,t,\lambda)$ и $R_N^0(x,t,\lambda)$ при $x \geq 0$, $t \geq 0$. Для этого последнее удобнее связать с ядрами $B_D^{\pm}(x,t,\lambda)$ и $B_N^{\pm}(x,t,\lambda)$ резольвент $B_D^{\pm}(\lambda)$ и $B_N^{\pm}(\lambda)$ операторов $L_D^{\pm}$ и $L_N^{\pm}$. Из формулы (5) имеем

$$R_D^0(\lambda) = B_D^-(\lambda) \oplus B_D^+(\lambda). \tag{12}$$

Пусть $f$ — произвольная нечетная функция из $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. Тогда $f = f^- + f^+$, где $f^{\pm} = f\chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(x)$, $\chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(x)$ — характеристическая функция полуосей $\mathbb{R}^{\pm}$. Из (12) будем иметь $R_D^0(\lambda)f = B_D^-(\lambda)f^- \oplus B_D^+(\lambda)f^+$, поэтому

$$\big[R_D^0(\lambda)f\big](x) = \int\limits_{-\infty}^{0} B_D^-(x,t,\lambda)f^-(t)\,dt + \int\limits_{0}^{\infty} B_D^+(x,t,\lambda)f^+(t)\,dt, \tag{13}$$

причем $B_D^{\pm}(\mp x,t,\lambda) = 0$ для любых $x \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и $\lambda \neq 4n+3$. С другой стороны,

$$\big[R_D^0(\lambda)f\big](x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_D^0(x,t,\lambda)f(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{0} R_D^0(x,t,\lambda)f^-(t)\,dt + \int\limits_{0}^{\infty} R_D^0(x,t,\lambda)f^+(t)\,dt.$$

Отсюда, используя представление $R_D^0(x,t,\lambda) = R_D^{0-}(x,t,\lambda) + R_D^{0+}(x,t,\lambda)$, где $R_D^{0\pm}(x,t,\lambda) = R_D^0(x,t,\lambda)\chi_{\mathbb{R}^{\pm}}(x)$, и учитывая нечетность функций $f(t)$, $R_D^0(x,t,\lambda)$ по $x$ и $t$, получим

$$\big[R_D^0(\lambda)f\big](x) = 2\int\limits_{-\infty}^{0} R_D^{0-}(x,t,\lambda)f^-(t)\,dt + 2\int\limits_{0}^{\infty} R_D^{0+}(x,t,\lambda)f^+(t)\,dt.$$

Сравнивая это выражение с (13), имеем $B_D^{\pm}(x,t,\lambda) = 2R_D^{0\pm}(x,t,\lambda)$. Аналогично доказывается, что $B_N^{\pm}(x,t,\lambda) = 2R_N^{0\pm}(x,t,\lambda)$. Отсюда получаем нужные для дальнейшего соотношения

$$R_D^0(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}B_D^+(x,t,\lambda), \quad R_N^0(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}B_N^+(x,t,\lambda), \quad x,t \geq 0. \tag{14}$$

Пусть $R_n^0(x,t,\lambda)$ — ядро резольвенты $R_n^0(\lambda)$. Из определения $R_n^0(\lambda)$ следует, что

$$R_n^0(x,t,\lambda) = R^0(x,t,\lambda) - \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(t)}{2n+1-\lambda}.$$

Отсюда согласно (6)–(9) и (14) при $x,t \geq 0$ будем иметь

$$R_n^0(x,t,\lambda) = \frac{1}{2}\begin{cases} B_N^+(x,t,\lambda) + B_{Dn}^+(x,t,\lambda), & n \text{ нечетное;} \\ B_D^+(x,t,\lambda) + B_{Nn}^+(x,t,\lambda), & n \text{ четное,} \end{cases} \tag{15}$$

где

$$B_{Dn}^+(x,t,\lambda) = B_D^+(x,t,\lambda) - \frac{2\varphi_{2n+1}(t)\varphi_{2n+1}(x)}{4n+3-\lambda}, \tag{16}$$

$$B_{Nn}^+(x,t,\lambda) = B_N^+(x,t,\lambda) - \frac{2\varphi_{2n}(t)\varphi_{2n}(x)}{4n+1-\lambda}. \tag{17}$$

Таким образом, чтобы исследовать поведение части $R_n^0(\lambda)$ резольвенты $R^0(\lambda)$ в окрестности $\lambda = \lambda_n$, нужно изучить поведение ядер $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ и $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ в некоторой окрестности каждого из чисел $\lambda = \lambda_{2n+1}$ и $\lambda = \lambda_{2n}$ соответственно.

**2.** Получим представления для ядер $B_D^+(x,t,\lambda)$, $B_N^+(x,t,\lambda)$ резольвент $B_D^+(\lambda)$ и $B_N^+(\lambda)$. Начнем с изучения $B_D^+(x,t,\lambda)$. Построим линейно независимые решения $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, уравнения

$$-y''(x)+x^2y(x)=\lambda y(x), \tag{18}$$

где $y_1(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$. Для этого, следуя работам [2, 5], применим метод эталонных решений. Введем обозначения при $x\geq 0$, $\lambda>0$:

$$\xi(x,\lambda)=\left(\frac{3}{2}\int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x}|t^2-\lambda|^{\frac{1}{2}}\,dt\right)^{\frac{2}{3}}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda}),$$

$$S(x,\lambda)=|\xi'(x,\lambda)|^{-\frac{1}{2}},\quad K(x,\lambda)=S''(x,\lambda)S^{-1}(x,\lambda)|x^2-\lambda|^{-\frac{1}{2}},$$

$$\widetilde{Q}(x,\lambda)=\begin{cases} Q(x,\lambda)=\int\limits_{x}^{\sqrt{\lambda}}(\lambda-t^2)^{\frac{1}{2}}\,dt & \text{при } 0\leq x\leq\sqrt{\lambda},\\ Q_1(x,\lambda)=\int\limits_{\sqrt{\lambda}}^{x}(t^2-\lambda)^{\frac{1}{2}}\,dt & \text{при } x>\sqrt{\lambda}. \end{cases}$$

В качестве эталонных решений возьмем функции

$$z_1(x,\lambda)=S(x,\lambda)Ai(\xi(x,\lambda)),\quad z_2(x,\lambda)=S(x,\lambda)Bi(\xi(x,\lambda)),$$

где $Ai(\xi)$, $Bi(\xi)$ — вещественные функции Эйри. Соответствующие интегральные уравнения указанного метода имеют вид

$$y_1(x,\lambda)=z_1(x,\lambda)+\int\limits_{x}^{\infty}H(x,t,\lambda)y_1(t,\lambda)\,dt, \tag{19}$$

$$y_2(x,\lambda)=z_2(x,\lambda)-\int\limits_{0}^{x}H(x,t,\lambda)y_2(t,\lambda)\,dt, \tag{20}$$

где $H(x,t,\lambda)=\{z_1(x,\lambda)z_2(t,\lambda)-z_1(t,\lambda)z_2(x,\lambda)\}S''(t,\lambda)S^{-1}(t,\lambda)$.

Введем вспомогательные функции

$$\widehat{Q}_1(x,\lambda)=\begin{cases} 0, & 0\leq x\leq\sqrt{\lambda},\\ Q_1(x,\lambda), & x>\sqrt{\lambda}, \end{cases} \tag{21}$$

$$v_k(x,\lambda)=|\lambda-x^2|^{\frac{1}{4}}z_k(x,\lambda)\exp[(-1)^{k+1}\widehat{Q}_1(x,\lambda)],\quad k=1,2, \tag{22}$$

$$\psi_k(x,\lambda)=|\lambda-x^2|^{\frac{1}{4}}y_k(x,\lambda)\exp[(-1)^{k+1}\widehat{Q}_1(x,\lambda)],\quad k=1,2. \tag{23}$$

Тогда, из формул (19)–(23) следует, что функции $\psi_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, удовлетворяют уравнениям

$$\psi_1(x,\lambda)=v_1(x,\lambda)+\int\limits_{x}^{\infty}M_1(x,t,\lambda)\psi_1(t,\lambda)\,dt, \tag{24}$$

$$\psi_2(x,\lambda)=v_2(x,\lambda)+\int\limits_{0}^{x}M_2(x,t,\lambda)\psi_2(t,\lambda)\,dt, \tag{25}$$

где ядра $M_k$, $k = 1, 2$, имеют вид

$$M_1(x,t,\lambda) = \{v_1(x,\lambda)v_2(t,\lambda) - v_1(t,\lambda)v_2(x,\lambda)e^{2\widehat{Q}_1(x,\lambda)-2\widehat{Q}_1(t,\lambda)}\}K(t,\lambda),$$

$$M_2(x,t,\lambda) = \{v_2(x,\lambda)v_1(t,\lambda) - v_1(x,\lambda)v_2(t,\lambda)e^{2\widehat{Q}_1(t,\lambda)-2\widehat{Q}_1(x,\lambda)}\}K(t,\lambda).$$

Уравнения (24) и (25) рассматриваются в пространстве $\mathbf{C}(0,\infty)$, где норма определяется равенством $\|f\|_{\mathbf{C}} = \sup\limits_{x\ge 0}|f(x)|$, операторы $M_1(\lambda)$ и $M_2(\lambda)$ имеют вид

$$[M_1(\lambda)f](x) = \int\limits_x^\infty M_1(x,t,\lambda)f(t)\,dt, \quad [M_2(\lambda)f](x) = \int\limits_0^x M_2(x,t,\lambda)f(t)\,dt.$$

Из рассуждений работ [2, 5] следует, что $M_k(\lambda)$, $k = 1, 2$, — вольтерровы операторы, а для норм справедлива оценка

$$\|M_k(\lambda)\| \le C(\lambda+1)^{-1}. \tag{26}$$

Замечание 2. В дальнейшем через $C$, $C_0$, $C_1, \ldots$ будем обозначать любые положительные постоянные.

**Лемма 1.** *Функции $\psi_k(x,\lambda)$, $k = 1, 2$, представляются в виде*

$$\psi_k(x,\lambda) = v_k(x,\lambda) + v_k^{(1)}(x,\lambda),$$

*где* $\sup\limits_{x\ge 0,\lambda>0}|v_k(x,\lambda)| \le C_0$, $\sup\limits_{x\ge 0,\lambda>0}(\lambda+1)\big|v_k^{(1)}(x,\lambda)\big| \le C_1$.

Доказательство. Из формулы (22) и определений функций Эйри следует, что функции $v_k(x,\lambda)$, $k = 1, 2$, имеют вид

$$v_1(x,\lambda) \equiv \gamma_1(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{Q_1(x,\lambda)}{2}}e^{Q_1(x,\lambda)}K_{1/3}(Q_1(x,\lambda)), & x \ge \sqrt{\lambda}, \\ \sqrt{\frac{Q(x,\lambda)}{6}}[J_{1/3}(Q(x,\lambda)) + J_{-1/3}(Q(x,\lambda))], & x < \sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

$$v_2(x,\lambda) \equiv \gamma_2(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \begin{cases} \sqrt{\frac{Q_1(x,\lambda)}{2}}e^{-Q_1(x,\lambda)}[I_{1/3}(Q_1(x,\lambda)) + I_{-1/3}(Q_1(x,\lambda))], \\ \qquad\qquad x \ge \sqrt{\lambda}, \\ \sqrt{\frac{Q(x,\lambda)}{2}}[J_{-1/3}(Q(x,\lambda)) - J_{1/3}(Q(x,\lambda))], \\ \qquad\qquad x < \sqrt{\lambda}, \end{cases}$$

где $I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — функции Бесселя. Из асимптотических формул функций $I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ при больших $z$, $|z| > N$, где $N$ — достаточно большое число (см. [6, § 5.11, с. 171, 172]), имеем

$$\gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + O\big(Q_1^{-1}(x,\lambda)\big) & \text{при } Q_1(x,\lambda) \to +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\big(Q(x,\lambda) + (-1)^k\frac{\pi}{4}\big) + O(Q^{-1}(x,\lambda)) & \text{при } Q(x,\lambda) \to +\infty, \end{cases} \tag{27}$$

а при $\widetilde{Q}(x,\lambda) \to 0$ получим

$$\gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \frac{1}{\sqrt{2+(-1)^{k-1}}}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{1/6}$$
$$\times\left[\frac{1}{\Gamma\big(\frac{4}{3}\big)} + \frac{(-1)^k}{\Gamma\big(\frac{2}{3}\big)}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{2/3}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda})\right] + O(\widetilde{Q}(x,\lambda))^{13/6}, \quad k = 1, 2. \tag{28}$$

Из формул (27) и (28) будем иметь $\sup\limits_{x\ge 0,\lambda>0}|v_k(x,\lambda)|\le C_0$. Отсюда и из соотношений (24)–(26) вытекает, что $\psi_k=\psi_k(x,\lambda)$ при $\lambda\gg 1$ представляются через $v_k=v_k(x,\lambda)$ в виде ряда Неймана

$$\psi_k=[I-M_k(\lambda)]^{-1}v_k=\sum_{m=0}^{\infty}M_k^m(\lambda)v_k.$$

Из последнего представления и формулы (26) следует оценка $\|v_k^{(1)}\|_{\mathbf{C}}\le C(\lambda+1)^{-1}$. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *При достаточно больших $\lambda$, $\lambda\gg 1$, и $x\ge 0$ функции $y_k(x,\lambda)$, $k=1,2$, и $\partial y_1(x,\lambda)/\partial\lambda$ представляются в виде*

$$y_k(x,\lambda)=z_k(x,\lambda)\big(1+z_k^{(1)}(x,\lambda)\big),\tag{29}$$

$$\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial z_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}\big(1+z_1^{(2)}(x,\lambda)\big),\tag{30}$$

*причем функции $z_k(x,\lambda)$, $z_k^{(1)}(x,\lambda)$, $z_1^{(2)}(x,\lambda)$, $\partial z_1(x,\lambda)/\partial\lambda$, где $k=1,2$, удовлетворяют оценкам*

$$|z_k(x,\lambda)|\le\frac{Ce^{(-1)^k\widehat{Q}_1(x,\lambda)}}{|x^2-\lambda|^{1/4}+\lambda^{1/12}},\quad\left|\frac{\partial z_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|\le\frac{Ce^{-\widehat{Q}_1(x,\lambda)}(\widetilde{Q}(x,\lambda)+1)}{\lambda(\lambda^{1/12}+|\lambda-x^2|^{1/4})},$$

$$\sup_{x\ge 0,\lambda>1}\big|z_1^{(2)}(x,\lambda)\big|\le C\lambda^{-1},\quad\sup_{x\ge 0,\lambda>1}\big|z_k^{(1)}(x,\lambda)\big|\le C\lambda^{-1}.$$

Доказательство. Формула (29) непосредственно следует из соотношений (22), (23) и леммы 1. При этом оценку функции $z_k(z,\lambda)$ при $|\sqrt{\lambda}-x|>\varepsilon$ нетрудно получить из равенства (22) и леммы 1. При $|x-\sqrt{\lambda}|\le\varepsilon$ функция $\widetilde{Q}(x,\lambda)$ представляется в виде

$$\widetilde{Q}(x,\lambda)=\frac{1}{3\sqrt{\lambda}}\big|\lambda-x^2\big|^{3/2}+O(|\lambda-x^2|^{5/2}\lambda^{-3/2}).$$

Поэтому из формулы (28) при $|\sqrt{\lambda}-x|\le C\lambda^{-1/6}$ имеем

$$\gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))=O\left(\frac{|\lambda-x^2|^{1/4}}{\lambda^{1/12}}\right).$$

Отсюда и из равенства (22) при $|\sqrt{\lambda}-x|\le C\lambda^{-1/6}$ получим оценку $z_k(x,\lambda)$. Покажем, что верна формула (30). Для этого удобнее сделать замену переменной $x=\sqrt{\lambda}s$ и ввести обозначения

$$\tilde{y}_1(s,\lambda)=y_1(\sqrt{\lambda}s,\lambda),\quad\tilde{z}_1(s,\lambda)=z_1(\sqrt{\lambda}s,\lambda),\quad k=1,2.$$

Тогда нетрудно получить, что

$$\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\tilde{y}_1\big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}},\lambda\big)}{\partial\lambda}-\frac{x}{2\lambda}\frac{\partial y_1(x,\lambda)}{\partial x},\tag{31}$$

$$\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\tilde{z}_k\big(\frac{x}{\sqrt{\lambda}},\lambda\big)}{\partial\lambda}-\frac{x}{2\lambda}\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial x},\quad k=1,2.\tag{31$'$}$$

Из соотношений (19), (21)–(23), учитывая обозначение $v_k(x,\lambda) = \gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))$, получим

$$y_1(x,\lambda) = z_1(x,\lambda) + z_1(x,\lambda)\int\limits_x^\infty \gamma_2(\widetilde{Q}(t,\lambda))\psi_1(t,\lambda)K(t,\lambda)\,dt - z_2(x,\lambda)\int\limits_x^\infty \gamma_1(\widetilde{Q}(t,\lambda))\psi_1(t,\lambda)K(t,\lambda)e^{-2\widehat{Q}_1(t,\lambda)}\,dt. \quad (32)$$

Для нахождения производной $\partial\tilde{y}_1(s,\lambda)/\partial\lambda$ сделаем замену переменной $x = \sqrt{\lambda}s$, $t = \sqrt{\lambda}\tau$ в формуле (32). Заметим, что $K(t,\lambda) = \lambda^{-3/2}K(\tau,1)$, $\widetilde{Q}(t,\lambda) = \lambda\widetilde{Q}(\tau,1)$, поэтому нахождение производной заметно облегчается. После нахождения производной возникают выражения $\gamma_k'(\lambda\widetilde{Q}(\tau,1))$, $\tilde{\psi}_1(\tau,\lambda)/\partial\lambda \equiv \psi_1(\sqrt{\lambda}\tau,\lambda)/\partial\lambda$. Последнее также содержит функции $\gamma_k'(\lambda\widetilde{Q}(\tau,1))$. Используя рекуррентные соотношения цилиндрических функций с производными этих функций, нетрудно получить асимптотику $\gamma_k'(\widetilde{Q}(x,\lambda))$, $k = 1,2$:

$$\gamma_k'(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{\pi}Q_1(x,\lambda)} + O\big(Q_1^{-2}(x,\lambda)\big) & \text{при } Q_1(x,\lambda)\to+\infty, \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin\big(Q(x,\lambda) + (-1)^k\frac{\pi}{4}\big) + O\left(Q^{-1}(x,\lambda)\right) & \text{при } Q(x,\lambda)\to+\infty. \end{cases} \quad (33)$$

При $\widetilde{Q}(x,\lambda)\to 0$ имеем

$$\gamma_k'(\widetilde{Q}(x,\lambda)) = \frac{1}{12\sqrt{2+(-1)^{k-1}}}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{-1/6}\left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(\frac{\widetilde{Q}(x,\lambda)}{2}\right)^{-2/3} + \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda})\right] + O(\widetilde{Q}(x,\lambda))^{7/6}, \quad k = 1,2. \quad (34)$$

Замечание 3. Здесь $\gamma_k'(\widetilde{Q}) = \partial\gamma_k(\widetilde{Q})/\partial\widetilde{Q}$.

Рассуждая, как в доказательстве леммы 1, с помощью формул (33), (34) нетрудно показать, что $|\partial\tilde{\psi}_1(\tau,\lambda)/\partial\lambda| \le C$. Из рассуждений работы [2] имеем $\int\limits_0^\infty |K(\tau,1)|d\tau \le C_0$. Поэтому из формул (31), (31′) легко получить представление (30). Производя замену переменной в формуле (22), а затем дифференцируя, из асимптотических формул (27), (28), (33), (34) получим

$$\left|\frac{\partial\tilde{z}_k(s,\lambda)}{\partial\lambda}\right| \le \frac{C(\widetilde{Q}(s,1)+1)e^{(-1)^k\lambda\widehat{Q}_1(s,1)}}{\lambda^{13/12}+\lambda^{1/4}|1-s^2|^{1/4}}. \quad (35)$$

Дифференцируя соотношение (22) по $x$ и пользуясь асимптотическими формулами (27), (28), (33), (34), после несложных вычислений придем к оценке

$$\left|\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial x}\right| \le \frac{C(|x^2-\lambda|^{1/4}+1)e^{(-1)^k\widehat{Q}_1(x,\lambda)}}{\lambda^{7/12}+1}. \quad (36)$$

Теперь из формул (31′), (35), (36) получим утверждение леммы.

Пусть $u(x,\lambda) = \big[B_D^+(\lambda)h\big](x)$, где $\lambda \ne 4n+3$, $n \ge 0$, $h(x) \in L^2(0,\infty)$. Тогда $u(x,\lambda)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$-u''(x) + x^2u(x) - \lambda u(x) = h(x) \quad (37)$$

и условиям

$$u(0,\lambda)=0, \quad u(x,\lambda)\in L^2(0,\infty). \tag{38}$$

Введем ядро

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{W(\lambda)}\begin{cases} y_1(x,\lambda)y_2(t,\lambda), & 0\le t\le x<\infty,\\ y_1(t,\lambda)y_2(x,\lambda), & 0\le x<t<\infty,\end{cases}$$

где $W(\lambda)=y_1(x,\lambda)y_2'(x,\lambda)-y_1'(x,\lambda)y_2(x,\lambda)$.

**Лемма 3.** *Функция* $w(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty G(x,t,\lambda)h(t)\,dt$ *удовлетворяет уравнению* (37) *и условию* $w(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$.

Доказательство. То, что $w(x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (37), проверяется непосредственно. Из формулы (23) и леммы 1, воспользовавшись асимптотическими формулами (27), (28), (33), (34), нетрудно получить, что при $\lambda\gg 1$

$$W(\lambda)=y_1(0,\lambda)y_2'(0,\lambda)-y_1'(0,\lambda)y_2(0,\lambda)=1/\pi+O(1/\lambda). \tag{39}$$

Докажем, что $w(x,\lambda)\in L^2(0,\infty)$. Имеем

$$|w(x,\lambda)|^2\le\Phi(x,\lambda)\int\limits_0^\infty |G(x,t,\lambda)||h(t)|^2\,dt, \tag{40}$$

где $\Phi(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty |G(x,t,\lambda)|\,dt$. Достаточно доказать, что для любого $\lambda>0$

$$\Phi_0(\lambda)=\sup_{x\ge 0}|\Phi(x,\lambda)|<C<\infty, \tag{41}$$

так как отсюда и из (40) будет следовать, что

$$\int\limits_0^\infty |w(x,\lambda)|^2\,dx\le\Phi_0(\lambda)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |G(x,t,\lambda)||h(t)|^2\,dtdx\le\Phi_0^2(\lambda)\|h\|^2.$$

Оценка (41) вытекает из леммы 2 и неравенства $|W(\lambda)|\ge C>0$. Лемма доказана.

**Теорема 1.** *Ядра* $B_D^+(x,t,\lambda)$ *и* $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ *резольвент* $B_D^+(\lambda)$ *и* $B_{Dn}^+(\lambda)$ *соответственно имеют вид*

$$B_D^+(x,t,\lambda)=G(x,t,\lambda)-\frac{y_2(0,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)}y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda), \tag{42}$$

$$B_{Dn}^+(x,t,\lambda)=G(x,t,\lambda)-\frac{y_2(0,\lambda)y_1(x,\lambda)y_1(t,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)} - \frac{y_2(0,4n+3)y_1(x,4n+3)y_1(t,4n+3)}{(4n+3-\lambda)W(4n+3)(y_1)_\lambda'(0,4n+3)}. \tag{43}$$

Доказательство. Поскольку функции $u(x,\lambda)$ и $w(x,\lambda)$ удовлетворяют неоднородному уравнению (37) и принадлежат $L^2(0,\infty)$, их разность $f(x,\lambda)=u(x,\lambda)-w(x,\lambda)$ удовлетворяет однородному уравнению (18) и принадлежит

$L^2(0,\infty)$. Следовательно, $f(x,\lambda) = Ay_1(x,\lambda)$, где $A$ — некоторая постоянная. Найдем ее из условия $u(0,\lambda) = 0$:

$$A = -\frac{y_2(0,\lambda)}{W(\lambda)y_1(0,\lambda)} \int\limits_0^\infty y_1(t,\lambda)h(t)dt.$$

Поскольку $u(x,\lambda) = f(x,\lambda) + w(x,\lambda)$, подставляя значения этих функций, получим равенство (42). С другой стороны, по определению имеем

$$B_D^+(x,t,\lambda) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_{2n+1}(x)\varphi_{2n+1}(t)}{4n+3-\lambda}.$$

Отсюда, так как функция $G(x,t,\lambda)$ при $\lambda \to 4n+3$ особенностей не имеет, из формулы (42) явствует, что

$$2\varphi_{2n+1}(x)\varphi_{2n+1}(t) = \lim_{\lambda\to 4n+3}(4n+3-\lambda)B_D^+(x,t,\lambda)$$
$$= -\frac{y_2(0,4n+3)y_1(x,4n+3)y_1(t,4n+3)}{W(4n+3)(y_1)'_\lambda(0,4n+3)}. \quad (44)$$

Из формул (44) и (16) легко получить (43). Теорема доказана.

Замечание 4. Такие же представления имеют ядра $B_N^+(x,t,\lambda)$, $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ с тем отличием, что вместо отношения $y_2(0,\lambda)/y_1(0,\lambda)$ будет $y_2'(0,\lambda)/y_1'(0,\lambda)$, $4n+3$ заменится на $4n+1$ и вместо $(y_1)'_\lambda(0,\lambda_n)$ будем иметь $(y_1)''_{x\lambda}(0,\lambda_n)$.

**3.** Получим теперь асимптотику спектра возмущенного оператора. Для этого представим ядра $B_D^+(x,t,\lambda)$, $B_{Nn}^+(x,t,\lambda)$ в окрестности $\lambda_{2n} = 4n+1$ и $B_N^+(x,t,\lambda)$, $B_{Dn}^+(x,t,\lambda)$ в окрестности $\lambda_{2n+1} = 4n+3$. Из формулы (22) и асимптотических формул (27), (28), (33), (34) (поскольку по обозначению $v_k(x,\lambda) \equiv \gamma_k(\widetilde{Q}(x,\lambda))$) нетрудно получить асимптотические формулы для функций $z_k(x,\lambda)$, $\partial z_k(x,\lambda)/\partial\lambda$, $k = 1,2$. Имеем

$$z_k(x,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}(x^2-\lambda)^{1/4}} e^{(-1)^k Q_1(x,\lambda)}\big[1 + O\big(Q_1^{-1}(x,\lambda)\big)\big] \\ \qquad\qquad \text{при } Q_1(x,\lambda) \to +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}(\lambda-x^2)^{1/4}} \cos\big(Q(x,\lambda) + (-1)^k\frac{\pi}{4}\big) + O(Q^{-1}(x,\lambda)) \\ \qquad\qquad \text{при } Q(x,\lambda) \to +\infty, \end{cases} \quad (45)$$

$$z_k(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda^{1/12}\sqrt{3}\Gamma\big(\frac{4}{3}\big)6^{1/6}} + \frac{(-1)^k \operatorname{sgn}(x-\sqrt{\lambda})|x^2-\lambda|}{\lambda^{5/12}\sqrt{3}\Gamma\big(\frac{2}{3}\big)6^{5/6}} + O(\lambda^{-13/12}|x^2-\lambda|) \quad (45')$$

при $|x-\sqrt{\lambda}| \le C\lambda^{-1/6}$, $C > 0$, не зависит от $\lambda$,

$$\frac{z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = \begin{cases} \frac{(-1)^{k+1}e^{(-1)^k Q_1(x,\lambda)}}{4\sqrt{\pi}(x^2-\lambda)^{1/4}} \ln\big(\frac{x+\sqrt{x^2-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\big) + O\big(Q_1^{-1}(x,\lambda)\big) \\ \qquad\qquad \text{при } Q_1(x,\lambda) \to +\infty, \\ -\frac{\sin\big(Q(x,\lambda)+(-1)^k\frac{\pi}{4}\big)}{2\sqrt{\pi}(\lambda-x^2)^{1/4}}\big(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\big) + O(Q^{-1}(x,\lambda)) \\ \qquad\qquad \text{при } Q(x,\lambda) \to +\infty, \end{cases} \quad (46)$$

$$\frac{\partial z_k(x,\lambda)}{\partial\lambda} = O\left(\frac{1}{\lambda^{5/12}}\right) \quad \text{при } |x-\sqrt{\lambda}| \le \varepsilon\sqrt{\lambda},\ 0 < \varepsilon < 1. \quad (46')$$

Тогда из теоремы 1, замечания 4 и леммы 2 следует

**Теорема 2.** *При* $|\lambda-\lambda_n| \le 1/2$ *и* $x \ge 0$, $t \ge 0$ *справедливы асимптотические формулы*

$$B^+(x,t,\lambda) = G^0(x,t,\lambda_n) + \pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}(\lambda-\lambda_n)\right) \times \left(z_1(x,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_1(t,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right) + \widehat{G}(x,t,\lambda_n) + \hat{g}_1(x,t,\lambda_n),$$

$$B_n^+(x,t,\lambda) = G^0(x,t,\lambda_n) + \frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{4(\lambda-\lambda_n)} \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \sin\left(\frac{\pi}{4}(t-1)\right)(\lambda-t)\,dt \times \left(z_1(x,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_1(t,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right) + \frac{4}{(\lambda-\lambda_n)}\left(z_1(x,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp$$

$$+\frac{4}{(\lambda-\lambda_n)}\left(z_1(t,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right)\int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp + \widehat{G}(x,t,\lambda_n) + \hat{g}_2(x,t,\lambda_n),$$

*где*

$$B^+(x,t,\lambda) = \begin{cases} B_D^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ четном,} \\ B_N^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ нечетном,} \end{cases}$$

$$B_n^+(x,t,\lambda) = \begin{cases} B_{Dn}^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ B_{Nn}^+(x,t,\lambda) & \text{при } n \text{ четном,} \end{cases}$$

$$G^0(x,t,\lambda_n) = \pi \begin{cases} \left(z_1(x,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(x,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_2(t,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_2(t,p)}{\partial p}\,dp\right), & t \le x, \\ \left(z_1(t,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_1(t,p)}{\partial p}\,dp\right)\left(z_2(x,\lambda_n) + \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda} \frac{\partial z_2(x,p)}{\partial p}\,dp\right), & x < t, \end{cases}$$

$$\widehat{G}(x,t,\lambda_n) = O\left(\frac{e^{\operatorname{sgn}(x-t)|\widehat{Q}_1(t,\lambda_n)-\widehat{Q}_1(x,\lambda_n)|}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\right),$$

$$\hat{g}_k(x,t,\lambda_n) = O\left(\frac{e^{-\widehat{Q}_1(t,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\right) + O\left(\frac{e^{-\widehat{Q}_1(x,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})}\right).$$

Асимптотические представления собственных функций и ядер $B^+(x,t,\lambda)$, $B_n^+(x,t,\lambda)$ позволяют выписать асимптотику спектра возмущенного оператора $H = H^0 + V$. Пусть $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — спектр оператора $H = H^0 + V$. Справедлива

**Теорема 3.** *Пусть* $V(x) \in L^2(\mathbb{R})$. *Тогда выполняется условие* (1) *и собственные числа оператора* $H = H^0 + V$ *определяются из уравнения* (2). *Если же предположить, что функция* $V(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)^{\alpha}|V(x)|^{\beta}\,dx < \infty, \quad \text{где } \beta > 2,\ \alpha > \beta - 1,$$

*то при достаточно больших $n$ справедлива асимптотическая формула*

$$\mu_n = \lambda_n + \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}} V^+(x)\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)(\lambda_n - x^2)^{-1/2}\,dx$$
$$+\frac{4}{3}\frac{1}{6^{1/3}\lambda_n^{1/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}} V^+(x)\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}-\frac{(x^2-\lambda_n)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)6^{2/3}\lambda_n^{1/3}}\right)^2 dx$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}^{\infty} V^+(x)(x^2-\lambda_n)^{-1/2}e^{-2Q_1(x,\lambda_n)}\,dx$$
$$-\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\times\int\limits_0^x V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx$$
$$-\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^-(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$\times\int\limits_0^x V^-(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx$$
$$+\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$\times\int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\arccos\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

*где $\varepsilon = (\alpha+1-\beta)/(2\beta)$, $V^{\pm}(x) = (V(x)\pm V(-x))/2$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, функции $Q(x,\lambda_n)$, $Q_1(x,\lambda_n)$ определены выше.*

Замечание 5. Теорема преследует две цели: 1) найти условие на возмущение $V(x)$, при котором справедливо уравнение (2); 2) найти условие на возмущение $V(x)$, при котором справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n = \lambda_n + (V\varphi_n,\varphi_n) - \left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right) + O(1/n^{\delta}),$$

где $\delta > 1$. Приведенная в теореме асимптотика — развернутая форма записи этой формулы.

Для доказательства теоремы 3 предварительно докажем несколько лемм.

**Лемма 4.** *Пусть $V(x)\in L^2(\mathbb{R})$. Тогда при всех $n\gg 1$ справедлива оценка $\|V\varphi_n\|\le C/n^{1/12}$.*

Доказательство. Действительно, так как $\varphi_n(-x) = (-1)^n\varphi_n(x)$, имеем

$$\|V\varphi_n\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V^2(x)\varphi_n^2(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty} V^2(-x)\varphi_n^2(x)\,dx + \int\limits_0^{\infty} V^2(x)\varphi_n^2(x)\,dx.$$

Из формулы (44) и леммы 2 нетрудно получить, что при нечетных $n$ и $x \geq 0$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2} z_1(x, \lambda_n)\,(1 + \widehat{\varphi}_n(x))\,, \tag{47}$$

где $\sup\limits_{x\geq 0} |\widehat{\varphi}_n(x)| \leq Cn^{-1}$. Аналогичное представление имеет место и при четном $n$. Отсюда и из формул (45), (45′), так как $V(x) \in L^2(\mathbb{R})$, легко следует утверждение леммы.

**Лемма 5.** *Пусть $V(x)$ удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)^\alpha |V(x)|^\beta\, dx < \infty$, где $\beta > 2$, $\alpha > \beta - 1$. Тогда при всех $n \geq 1$ и $|\lambda - \lambda_n| \leq 1/2$ справедлива оценка $\left\|R_n^0(\lambda) V \varphi_n\right\| \leq C/n^{1/2}$.*

Доказательство. Из формулы (15) при нечетных $n$ (при четных $n$ имеет место аналогичное представление) нетрудно получить, что

$$\left\|R_n^0(\lambda) V \varphi_n\right\|^2 = 2 \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^\infty B_N^+(x,t,\lambda) V^-(t) \varphi_n(t)\, dt \right)^2 dx + 2 \int\limits_0^\infty \left( \int\limits_0^\infty B_{Dn}^+(x,t,\lambda) V^+(t) \varphi_n(t)\, dt \right)^2 dx,$$

где $V^\pm(t) = (V(t) \pm V(-t))/2$. Для оценки последних интегралов воспользуемся представлением (47) и теоремой 2. Здесь возникают функции $z_k(x, \lambda_n)$, $\partial z_k(x,\lambda)/\partial\lambda$. Для оценки функций $z_k(x,\lambda_n)$ достаточно воспользоваться оценкой $|z_k(x,\lambda_n)| \leq C|\lambda_n - x^2|^{-1/4} e^{(-1)^k \widehat{Q}_1(x,\lambda_n)}$, которая следует из формулы (22) и леммы 1. Для оценки производных $\partial z_k(x,\lambda_n)/\partial\lambda$ воспользуемся асимптотическими формулами (46), (46′). Тогда получим интегралы вида

$$I_n = \int\limits_0^\infty |\lambda_n - t^2|^{-1/2} |V^\pm(t)|\, dt,$$

при этом $\left\|R_n^0(\lambda) V \varphi_n\right\|^2 \leq C I_n^2$. Представим $I_n$ в виде

$$I_n = \int\limits_0^\infty (1+t)^{-\alpha/\beta} |\lambda_n - t^2|^{-1/2} |V^\pm(t)| (1+t)^{\alpha/\beta}\, dt.$$

Применив неравенство Гёльдера, получим

$$I_n \leq J_n^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left[ \int\limits_0^\infty |V(t)|^\beta (1+t)^\alpha\, dt \right]^{1/\beta},$$

где $J_n = \int\limits_0^\infty |\lambda_n - x^2|^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\, dx$. Разобьем $J_n$ на три интеграла:

$$J_n = \int\limits_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} (\lambda_n - x^2)^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\, dx + \int\limits_{\sqrt{\lambda_n}/2}^{3\sqrt{\lambda_n}/2} |\lambda_n - x^2|^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\, dx + \int\limits_{3\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty (x^2 - \lambda_n)^{-\frac{\beta}{2(\beta-1)}} (1+x)^{-\frac{\alpha}{\beta-1}}\, dx = J_n^{(1)} + J_n^{(2)} + J_n^{(3)}.$$

Нетрудно получить, что $J_n^{(1)} \le C_1 n^{-\beta/[2(\beta-1)]}$, $J_n^{(k)} \le C_k n^{-(\alpha+1)/[2(\beta-1)]}$, $k = 2, 3$. Отсюда следует, что $|I_n| \le Cn^{-1/2}$. Тогда $\|R_n^0(\lambda)V\varphi_n\|^2 \le Cn^{-1}$. Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Пусть $V(x)$ удовлетворяет условию $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|x|)^\alpha|V(x)|^\beta\,dx<\infty$, где $\beta>2$, $\alpha>\beta-1$. Тогда при всех $n\ge 1$ справедлива оценка $\|VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\| \le C/n^{7/12}$.*

Лемма 6 доказывается аналогично леммам 4 и 5.

Доказательство теоремы 3. Пусть $V(x)\in L^2(\mathbb{R})$. Покажем, что выполняется условие (1). Действительно, пусть $\|f\|=1$, $|\lambda-\lambda_n|\le 1/2$. Тогда

$$\big|\big[R_n^0(\lambda)Vf\big](x)\big|^2 \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\big|R_n^0(x,t,\lambda)\big|^2|V(t)|^2\,dt.$$

Поэтому при $|\lambda-\lambda_n|\le 1/2$, используя представление (15) и теорему 2, получим

$$\big\|R_n^0(\lambda)V\big\|^2 \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big|R_n^0(x,t,\lambda)\big|^2|V(t)|^2\,dt \le Cn^{-1/6}.$$

Таким образом, для определения собственных значений оператора $H=H^0+V$ имеем уравнение

$$\lambda_n+(V\varphi_n,\varphi_n)-(VR_n(\mu_n)V\varphi_n,\varphi_n)=\mu_n. \tag{48}$$

Покажем, что при выполнении второго условия теоремы справедлива асимптотическая формула

$$\mu_n=\lambda_n+(V\varphi_n,\varphi_n)-\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)+O(1/n^\delta),$$

где $\delta>1$.

Согласно формуле (3) $R_n(\lambda_n)=R_n^0(\lambda_n)-R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)$. Подставляя последнее в тождество Гильберта — Шмидта

$$R_n(\mu_n)=R_n(\lambda_n)+(\mu_n-\lambda_n)R_n(\mu_n)R_n(\lambda_n),$$

имеем

$$\begin{aligned}R_n(\mu_n)=R_n^0(\lambda_n)-R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)+(\mu_n-\lambda_n)R_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)\\ -(\mu_n-\lambda_n)R_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n).\end{aligned}$$

Отсюда и из (48) нетрудно получить, что

$$\begin{aligned}&\mu_n-\lambda_n-(V\varphi_n,\varphi_n)+\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)\\ &=(1-\gamma_n)^{-1}\big\{\big(VR_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)+\gamma_n\big[(V\varphi_n,\varphi_n)-\big(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)\big]\big\},\end{aligned} \tag{49}$$

где $\gamma_n=\big(VR_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)-(VR_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n)$. Оценим $\gamma_n$ и выражение в фигурной скобке формулы (49). Имеем

$$|\gamma_n|\le C\big|\big(VR_n(\mu_n)R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\big)\big|\le C\big\|R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\big\|\|R_n(\mu_n)V\varphi_n\|.$$

Из формулы (3) следует, что

$$R_n(\mu_n)V\varphi_n = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left[R_n^0(\mu_n)V\right]^m R_n^0(\mu_n)V\varphi_n.$$

Так как $\left\|R_n^0(\mu_n)V\right\| < 1$, отсюда $\|R_n(\mu_n)V\varphi_n\| \le C\left\|R_n^0(\mu_n)V\varphi_n\right\|$. Итак, при $|\mu_n - \lambda_n| \le 1/2$ из леммы 5 получаем, что

$$|\gamma_n| \le C_0 n^{-1}. \tag{50}$$

Аналогично оцениваются остальные составляющие в фигурной скобке равенства (49). Из лемм 5 и 6 имеем

$$\left|\left(VR_n^0(\lambda_n)VR_n(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right)\right| \le \|R_n(\lambda_n)V\varphi_n\|\left\|VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\right\| \le C_1 n^{-13/12}, \tag{51}$$

а из лемм 4 и 5 получим

$$|(V\varphi_n,\varphi_n)| \le \|V\varphi_n\| \le C_2 n^{-1/12}, \tag{52}$$

$$\left|\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right)\right| \le \left\|R_n^0(\lambda_n)V\varphi_n\right\|\|V\varphi_n\| \le C_3 n^{-7/12}. \tag{53}$$

Итак, из соотношений (49)–(53) выводим, что

$$\mu_n = \lambda_n + (V\varphi_n,\varphi_n) - \left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right) + O(n^{-13/12}). \tag{54}$$

Используя представления собственных функций и ядер $B_N^+(x,t,4n+3)$, $B_D^+(x,t,4n+1)$, $B_{Dn}^+(x,t,4n+3)$, $B_{Nn}^+(x,t,4n+1)$, получим асимптотические формулы для второго и третьего приближений собственного числа $\mu_n$. Так как $\varphi_n(x) = (-1)^n\varphi_n(x)$, имеем

$$(V\varphi_n,\varphi_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} V(x)\varphi_n^2(x)\,dx = \int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]\varphi_n^2(x)\,dx.$$

Согласно формуле (47)

$$\int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]\varphi_n^2(x)\,dx = 2\int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]z_1^2(x,\lambda_n)\,(1+\widehat{\varphi}(x))\;dx.$$

При выполнении второго условия теоремы, рассуждая аналогично лемме 5, нетрудно показать, что

$$\left|\int\limits_0^{\infty} V(\pm x)z_1^2(x,\lambda_n)\,dx\right| \le Cn^{-1/2}.$$

Тогда

$$(V\varphi_n,\varphi_n) = 2\int\limits_0^{\infty}[V(-x)+V(x)]z_1^2(x,\lambda_n)\,dx + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Отсюда, воспользовавшись асимптотическими формулами (45), (45′), поскольку $\widetilde{Q}(x,\lambda_n) = O(\lambda_n)$ и при выполнении второго условия теоремы $V(x) \in L(\mathbb{R})$, имеем

$$(V\varphi_n,\varphi_n) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)]\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\,dx$$

$$+\frac{2}{3\Gamma^2\left(\frac{4}{3}\right)6^{1/3}\lambda_n^{1/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)]\,dx$$

$$-\frac{2}{9\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\lambda_n^{1/2}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)]\mathrm{sgn}(x-\sqrt{\lambda_n})|x^2-\lambda_n|\,dx$$

$$+\frac{2}{3\Gamma^2\left(\frac{2}{3}\right)6^{5/3}\lambda_n^{5/6}}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}-\lambda_n^{-1/6}}^{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}[V(-x)+V(x)](x^2-\lambda_n)^2\,dx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\lambda_n^{1/2}+\lambda_n^{-1/6}}^{\infty}[V(-x)+V(x)](x^2-\lambda_n)^{-1/2}e^{-2Q_1(x,\lambda_n)}\,dx+O\left(\frac{1}{n^{7/6}}\right). \quad (55)$$

Получим асимптотическое представление $\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right)$. Рассуждая аналогично лемме 5, при нечетном $n$ имеем

$$\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right)=2\int\limits_0^\infty V^-(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_N^+(x,t,\lambda_n)V^-(t)\varphi_n(t)\,dt\,dx$$

$$+2\int\limits_0^\infty V^+(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_{Dn}^+(x,t,\lambda_n)V^+(t)\varphi_n(t)\,dtdx, \quad (56)$$

а при четном $n$ —

$$\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right)=2\int\limits_0^\infty V^-(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_D^+(x,t,\lambda_n)V^-(t)\varphi_n(t)\,dtdx$$

$$+2\int\limits_0^\infty V^+(x)\varphi_n(x)\int\limits_0^\infty B_{Nn}^+(x,t,\lambda_n)V^+(t)\varphi_n(t)\,dtdx, \quad (57)$$

где $V^-(x)=(V(x)-V(-x))/2$, $V^+(x)=(V(x)+V(-x))/2$. Теперь из формул (56), (57), теоремы 2 и формулы (47) получим

$$\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right)$$

$$=8\pi\int\limits_0^\infty V^-(x)z_1^2(x,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(x))\int\limits_0^x V^-(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(t))\,dtdx$$

$$+8\pi\int\limits_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(x))\int\limits_0^x V^+(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(t))\,dtdx$$

$$+16\pi\int\limits_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)(1+\tilde{z}_1(x,\lambda_n))\,dx\int\limits_0^\infty V^+(t)z_1(t,\lambda_n)\frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial\lambda}(1+\tilde{z}_1(t,\lambda_n))\,dt$$

$$+4\int\limits_0^\infty V^-(x)z_1(x,\lambda_n)(1+\widehat{\varphi}_n(x))\int\limits_0^\infty V^-(t)z_1(t,\lambda_n)$$

$$\times [\tilde g(x,t,\lambda_n)+\widehat G(x,t,\lambda_n)](1+\widehat\varphi_n(t))\,dtdx$$
$$+4\int_0^\infty V^+(x)z_1(x,\lambda_n)(1+\widehat\varphi_n(x))\int_0^\infty V^+(t)z_1(t,\lambda_n)$$
$$\times [\tilde g(x,t,\lambda_n)+\widehat G(x,t,\lambda_n)](1+\widehat\varphi_n(t))\,dtdx,$$

где $\sup\limits_{x\ge0}|\widehat\varphi_n(x)|\le C_1n^{-1}$, $\sup\limits_{x\ge0}|\tilde z_1(x,\lambda_n)|\le C_2n^{-1}$,

$$\widehat G(x,t,\lambda_n)=O\biggl(\frac{e^{\operatorname{sgn}(x-t)[\widehat Q_1(t,\lambda_n)-\widehat Q_1(x,\lambda_n)]}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\biggr),$$

$$\tilde g(x,t,\lambda_n)=\max_{x\ge0,t\ge0}\bigl(\hat g_k(x,t,\lambda_n)+\hat g_k^0(x,t,\lambda_n)\bigr)$$
$$=O\biggl(\frac{e^{-\widehat Q_1(t,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|t^2-\lambda_n|^{1/4})}\biggr)+O\biggl(\frac{e^{-\widehat Q_1(x,\lambda_n)}}{n(n^{1/12}+|x^2-\lambda_n|^{1/4})}\biggr).\quad(58)$$

Из формулы (22) и леммы 1, рассуждая аналогично лемме 5, при условии теоремы будем иметь

$$\biggl|\int_0^\infty V^-(x)z_1^2(x,\lambda_n)\widehat\varphi_n(x)\int_0^x V^-(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)\,dtdx\biggr|$$
$$\le\frac{C}{n}\biggl(\int_0^\infty V^-(x)|x^2-\lambda_n|^{-1/2}dx\biggr)^2\le\frac{C_1}{n^2},\quad(59)$$

$$\biggl|\int_0^\infty V^-(x)z_1(x,\lambda_n)\int_0^\infty V^-(t)z_1(t,\lambda_n)\widehat G(x,t,\lambda_n)\,dtdx\biggr|$$
$$\le\frac{C}{n}\biggl(\int_0^\infty|V^-(x)||x^2-\lambda_n|^{-1/2}dx\biggr)^2\le\frac{C_2}{n^2}.\quad(60)$$

Используя асимптотические формулы (45) и (45′), поскольку $V(x)\in L^2(\mathbb{R})$, также нетрудно показать, что

$$\biggl|\int_0^\infty V^-(x)z_1(x,\lambda_n)\int_0^\infty V^-(t)z_1(t,\lambda_n)\tilde g(x,t,\lambda_n)\,dtdx\biggr|$$
$$\le\frac{C_3}{n^{13/12}}\biggl(\int_0^\infty|V^-(x)||z_1(x,\lambda_n)|\,dx\biggr)^2\le\frac{C_4}{n^{13/12}}\int_0^\infty|z_1(x,\lambda_n)|^2\,dx\le\frac{C_5}{n^{13/12}}.\quad(61)$$

Таким образом, из формул (58)–(61) получим

$$\bigl(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\bigr)=8\pi\int_0^\infty V^-(x)z_1^2(x,\lambda_n)\int_0^x V^-(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)\,dtdx$$

$$+ 8\pi \int_0^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^+(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\, dt dx$$

$$+ 16 \int_0^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\, dx \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\, dt + O\left(\frac{1}{n^{13/12}}\right). \quad (62)$$

Рассмотрим

$$l_\pm = \int_0^\infty V^\pm(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^\pm(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\, dt dx$$

и представим $l_\pm$ в виде

$$l_\pm = \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^\pm(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^\pm(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\, dt dx$$

$$+ \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty V^\pm(x) z_1^2(x,\lambda_n) \int_0^x V^\pm(t) z_1(t,\lambda_n) z_2(t,\lambda_n)\, dt dx = l_\pm^{(1)} + l_\pm^{(2)}. \quad (63)$$

Оценим $l_\pm^{(2)}$. Согласно формуле (22) и лемме 1, рассуждая аналогично лемме 5, при выполнении второго условия будем иметь

$$\left|l_\pm^{(2)}\right| \le \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty |V(\pm x)||x^2-\lambda_n|^{-1/2}\, dx \int_0^\infty |V(\pm t)||t^2-\lambda_n|^{-1/2}\, dt \le C n^{-\frac{\alpha+1+\beta}{2\beta}}.$$

Поскольку $\alpha + 1 > \beta$, отсюда

$$\left|l_\pm^{(2)}\right| \le C_0 n^{-(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon = (\alpha+1-\beta)/2\beta > 0. \quad (64)$$

Преобразуем последний интеграл в правой части формулы (62):

$$l = \int_0^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\, dx \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\, dx \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\, dt$$

$$+ \int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\, dx \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\, dt$$

$$+ \int_{\sqrt{\lambda_n}/2}^\infty V^+(x) z_1^2(x,\lambda_n)\, dx \int_0^\infty V^+(t) z_1(t,\lambda_n) \frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial \lambda}\, dt = l_1 + l_2 + l_3. \quad (65)$$

Аналогично предыдущим рассуждениям можно показать, что

$$|l_k| \le C n^{-(1+\varepsilon)}, \quad \varepsilon = (\alpha+1-\beta)/2\beta > 0. \quad (66)$$

Итак, из формул (62)–(66) получим

$$\begin{aligned}\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right) &= 8\pi\int_0^\infty V^-(x)z_1^2(x,\lambda_n)\int_0^x V^-(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)\,dtdx\\ &+ 8\pi\int_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)\int_0^x V^+(t)z_1(t,\lambda_n)z_2(t,\lambda_n)\,dtdx\\ &+ 16\int_0^\infty V^+(x)z_1^2(x,\lambda_n)\,dx\int_0^\infty V^+(t)z_1(t,\lambda_n)\frac{\partial z_1(t,\lambda_n)}{\partial\lambda}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right). \quad (67)\end{aligned}$$

Используя асимптотические формулы (45)–(46′), из соотношения (67) будем иметь равенство

$$\begin{aligned}\left(VR_n^0(\lambda_n)V\varphi_n,\varphi_n\right) &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\times\int_0^x V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx\\ &+\frac{4}{\pi}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^-(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\times\int_0^x V^-(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\,dtdx\\ &+\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(x)(\lambda_n-x^2)^{-1/2}\cos^2\left(Q(x,\lambda_n)-\frac{\pi}{4}\right)dx\\ &\times\int_0^{\sqrt{\lambda_n}/2} V^+(t)(\lambda_n-t^2)^{-1/2}\cos 2Q(t,\lambda_n)\arccos\frac{x}{\sqrt{\lambda_n}}\,dt + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right). \quad (68)\end{aligned}$$

Итак, из соотношений (54), (55), (68) получим утверждение теоремы. Теорема доказана.

Результаты теоремы согласуются с результатами Х. Х. Муртазина и Т. Г. Амангильдина (см. [2, теорема 2]), полученными ранее для гладких и финитных возмущений $V(x)$. Например, если положить, что $V(x)\in C_0^1(-\infty,+\infty)$, $V(x)=0$ при $|x|\ge b$, то, учитывая, что $Q'(x,\lambda_n)=-\sqrt{\lambda_n-x^2}$, и интегрируя по частям, из асимптотической формулы теоремы 3 легко получить, что

$$\mu_n=\lambda_n+\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\int_{-b}^{b}V(x)\,dx+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В нашем же случае мы накладываем на потенциал лишь условия типа суммируемости. В частности, возмущение $V(x)$ может быть даже разрывным. Например, в качестве возмущения можем взять функцию $V(x)$, $|V(x)|\le C|x|^{-\delta}$, при $|x|>1$, $|V(x)|\le C|x|^{-\gamma}$ при $|x|\le 1$, где $\gamma<1/\beta$, $\delta>1$.

Автор выражает искреннюю благодарность Х. Х. Муртазину за предложенный метод и Х. К. Ишкину за обсуждение результатов работы.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
2. *Муртазин Х. Х., Амангильдин Т. Г.* Асимптотика спектра оператора Штурма — Лиувилля // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 1. С. 135–149.
3. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990.
4. *Ахмерова Э. Ф., Муртазин Х. Х.* Спектральная асимптотика для негладких возмущений дифференциальных операторов и формулы следов // Докл. РАН. 2003. Т. 388, № 6. С. 731–733.
5. *Giertz M.* On the solutions in $L^2(-\infty,+\infty)$ of $-y''+(\lambda-q(x))y=0$ when q is rapidly increasing // Proc. London Math. Soc. 1964. V. 14, N 53. P. 53–73.
6. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.; Л.: Физматгиз, 1963.


*Статья поступила 21 ноября 2006 г.*

Ахмерова Эльвира Фангизовна
Институт социально-экономических исследований УНЦ РАН,
пр. Октября, 71, Уфа 450054
eakhmerova@yandex.ru