Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 517.984.46

ФОРМУЛА СЛЕДА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Н. М. Асланова

Аннотация. Получена формула регуляризованного следа для операторного уравнения Штурма — Лиувилля с граничным условием, зависящим от спектрального параметра.

Ключевые слова: гильбертово пространство, самосопряженный оператор, дискретный спектр, регуляризованный след, ядерный оператор.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Пусть также $L_2 = L_2(H,(0,\pi)) \oplus H$, где $L_2(H,(0,\pi))$ — гильбертово пространство вектор-функций $y(t)$ $(t \in (0,\pi))$, для которых $\int_0^\pi \|y(t)\|_H^2 dt < \infty$. Скалярное произведение для $Y, Z \in L_2$ $(Y = \{y(t), y(\pi)\},\ Z = \{z(t), z(\pi)\})$ определяется как

$$(Y,Z) = \int_0^\pi (y(t), z(t))_H\,dt + (y(\pi), z(\pi))_H.$$

Рассмотрим задачу

$$l[y] = -y'' + Ay + q(t)y = \lambda y, \tag{1}$$

$$y(0) = 0, \tag{2}$$

$$y'(\pi) - \lambda y(\pi) = 0, \tag{3}$$

где A — самосопряженный положительно определенный оператор в H $(A \geq E$, E — тождественный оператор в $H)$, являющийся обратным для вполне непрерывного, $q(t)$ при каждом t — самосопряженный ограниченный оператор в H.

Предположим также, что операторная функция $q(t)$ слабо измерима, $\|q(t)\|$ как функция от t ограничена на $[0,\pi]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $q(t)$ имеет вторую слабую производную на отрезке $[0,\pi]$ и $q^{(l)}(t)$, $l = 0,1,2$, при каждом $t \in [0,\pi]$ являются ядерными самосопряженными операторами в H, т. е. $q^{(l)}(t) \in \sigma_1$, $[q^{(l)}(t)]^* = q^{(l)}(t)$;
2) функции $\|q^{(l)}(t)\|_1$, $l = 0,1,2$, ограничены на отрезке $[0,\pi]$;
3) $q'(0) = q'(\pi) = 0$;
4) $\int_0^\pi (q(t)f, f)\,dt = 0$ при любом $f \in H$.

При $q(t) = 0$ уравнение (1) запишется в виде

$$l_0[y] = -y'' + Ay = \lambda y. \tag{1'}$$

С задачами (1′), (2), (3) и (1)–(3) в пространстве L_2 можно связать самосопряженные операторы L_0 и $L = L_0 + Q$ соответственно, где

$$L_0 : \{y(t), y(\pi)\} \to \{l_0[y], y'(\pi)\}, \quad Q : \{y(t), y(\pi)\} \to \{q(t)y(t), 0\}. \tag{4}$$

Как показано в работе [1], операторы L_0 и L имеют дискретный спектр. Пусть $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ — собственные значения, $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ — соответствующие ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 и $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — собственные значения оператора L.

Обозначим через $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ собственные значения и через $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ортонормированные собственные элементы оператора A в H.

Известно [1], что если

$$\gamma_j \sim a j^{\alpha} \quad \text{при } j \to \infty \quad (0 < a,\ \alpha > 2), \tag{5}$$

то

$$\lambda_n(L) \sim \mu_n(L_0) \sim d n^{\delta}, \tag{6}$$

где $\delta = \frac{2\alpha}{2+\alpha}$.

Пользуясь этой асимптотикой, так же, как и в [2], можно доказать, что существует последовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, для которой справедливо неравенство

$$\mu_k - \mu_{n_m} \geq d\bigl(k^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}} - n_m^{\frac{2\alpha}{2+\alpha}}\bigr), \quad k = n_m, n_m + 1, \dots. \tag{7}$$

Пусть

$$\mu^{(j)} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \mu_k, \quad \lambda^{(j)} = \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \lambda_k, \quad j = 1, 2 \dots,$$

где $n_0 = 0$.

Цель этой работы — вычисление суммы ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)})$, который называется *регуляризованным следом оператора* L_0. Сумма этого ряда, как будет показано ниже, не зависит от того, каким образом выбрана последовательность $n_1, n_2, \dots$, при котором верно неравенство (7).

Вычислению регуляризованного следа для скалярных дифференциальных операторов, являющегося обобщенным понятия следа матрицы, посвящено много работ. Впервые И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном получена формула для суммы разностей собственных значений двух регулярных операторов Штурма — Лиувилля. Эта работа получила многочисленные продолжения. Здесь приведем ссылки на статьи [3–10], где в различных случаях вычислены регуляризованные следы для скалярных операторов.

Регуляризованные следы операторов в абстрактной постановке рассматривались в [11–15] и др. Для дифференциальных операторов с операторными коэффициентами формулы следов исследованы, например, в [2, 16]. Более подробную библиографию можно найти в обзоре [15].

В настоящей статье рассматривается задача, отличающаяся от задачи в [2] краевым условием, содержащим спектральный параметр.

Пусть R_λ^0 и R_λ — резольвенты операторов L_0 и L. Учитывая асимптотику (6) и неравенство (7) и пользуясь техникой работы [6], можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* $\|q(t)\|$ *ограничена на отрезке* $[0,\pi]$ *и выполняется условие* (5). *Тогда при больших* m *имеет место равенство*

$$\sum_{n=1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\operatorname{Sp}\big(QR_\lambda^0\big)\,d\lambda,$$

где $l_m=\frac{1}{2}(\mu_{n_m+1}+\mu_{n_m})$, μ_{n_m}, $m=1,2,3,\dots,$ — *подпоследовательность, которая удовлетворяет неравенству* (7).

Поскольку QR_λ^0 — ядерный оператор и собственные вектор-функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x),\dots$ оператора L_0 образуют ортонормированный базис в L_2, то при больших значениях m

$$\sum_{j=1}^{m}(\lambda^{(j)}-\mu^{(j)})=\sum_{n-1}^{n_m}(\lambda_n-\mu_n)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\operatorname{Sp}\big(QR_\lambda^0\big)\,d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\sum_{n=1}^{\infty}\big(QR_\lambda^0\psi_n,\psi_n\big)\,d\lambda$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\bigg[(Q\psi_n,\psi_n)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=l_m}\frac{d\lambda}{\lambda-\mu_n}\bigg]=\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n).$$

Скалярное произведение рассматривается в L_2.

Ортонормированные собственные вектор-функции оператора L_0 имеют вид

$$\sqrt{\frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi-\sin 2x_{j,k}\pi+4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi}}\{\sin(x_{j,k}t)\varphi_j,\sin(x_{j,k}\pi)\varphi_j\} \tag{8}$$

($k=\overline{0,\infty}$, $j=\overline{1,\infty}$), где $x_{j,k}$ — корни уравнения (см. [1])

$$\operatorname{ctg}x\pi=\frac{\gamma_j+x^2}{x},\quad x=\sqrt{\lambda-\gamma_j}. \tag{9}$$

Известно, что собственные числа оператора L_0 распадаются на две серии: $\mu_{j,0}\sim\sqrt{\gamma_i}$ при $j\to\infty$, соответствующие мнимым корням уравнения (9), и $\mu_{j,k}=\gamma_j+x_{j,k}^2=\gamma_j+\eta_k$, где $\eta_k\sim k^2$, соответствующие вещественным корням уравнения (9).

Из теоремы 1, учитывая (4) и (8), получаем

$$\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n)=\sum_{n=1}^{n_m}\int_0^\pi\frac{4x_{j_n,k_n}}{2x_{j_n,k_n}\pi-\sin 2x_{j_n,k_n}\pi+4x_{j_n,k_n}\sin^2 x_{j_n,k_n}\pi}$$
$$\times\sin^2 x_{j_n,k_n}t(q(t)\varphi_{j_n},\varphi_{j_n})\,dt.$$

Обозначим $f_j(t)=(q(t)\varphi_j,\varphi_j)$. Из условия $\int_0^\pi(q(t)\varphi_j,\varphi_j)\,dt=0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{n_m}(Q\psi_n,\psi_n)=-\sum_{n=1}^{n_m}\int_0^\pi\frac{4x_{j_n,k_n}}{2x_{j_n,k_n}\pi-\sin 2x_{j_n,k_n}\pi+4x_{j_n,k_n}\sin^2 x_{j_n,k_n}\pi}$$
$$\times\cos 2x_{j_n,k_n}t(q(t)\varphi_{j_n},\varphi_{j_n})\,dt.$$

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (5). *Если операторная функция* $q(t)$ *удовлетворяет условиям* 1–4 , *то справедлива формула*

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}(\lambda^{(j)}-\mu^{(j)})=-\frac{\operatorname{Sp}q(\pi)+\operatorname{Sp}q(0)}{4}.$$

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Если операторная функция $q(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1, *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{j.k}}{2x_{j.k}\pi-\sin 2x_{j.k}\pi+4x_{j.k}\sin^2 x_{j.k}\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt\right|<\infty. \quad (10)$$

Доказательство. Интегрируя дважды по частям и используя условие 3 для операторной функции $q(t)$, получаем

$$\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt=\frac{1}{2x_{j,k}}\sin(2x_{j,k}t)f_j(t)|_0^{\pi}-.\frac{1}{2x_{j,k}}\int_0^{\pi}\sin(2x_{j,k}t)f_j'(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2x_{j,k}}\sin(2x_{j,k}\pi)f_j(\pi)-\frac{1}{(2x_{j,k})^2}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f''(t)\,dt. \quad (10')$$

С учетом асимптотики $x_{j,k}\sim k+\frac{k}{\gamma_j+k^2}$ из последнего выражения вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{j.k}}{2x_{j.k}\pi-\sin 2x_{j.k}\pi+4x_{j.k}\sin^2 x_{j.k}\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt\right|$$

$$=\text{const}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right)\left(O\left(\frac{1}{k^2}\right)f_j(\pi)+\int_0^{\pi}\frac{1}{(2x_{j,k})^2}\cos(2x_{j,k}t)f_j''(t)\,dt\right)\right|$$

$$\le \text{const}\sum_{j=1}^{\infty}\left(|(q(\pi)\varphi_j,\varphi_j)|+\int_0^{\pi}|(q(t)\varphi_j,\varphi_j)|\,dt\right). \quad (11)$$

По условию 2 $\|q^{(l)}(t)\|_1<\text{const}$ $(l=0,1,2)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty}|(q(t)\varphi_j,\varphi_j)|\le\|q^{(l)}(t)\|_1<\text{const}\,.$$

По теореме Лебега знак суммы по j в неравенстве (11) можно внести под знак интеграла, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\frac{4x_{j.k}}{2x_{j.k}\pi-\sin 2x_{j.k}\pi+4x_{j.k}\sin^2 x_{j.k}\pi}\int_0^{\pi}\cos(2x_{j,k}t)f_j(t)\,dt\right|<\infty. \quad (12)$$

Рассмотрим внутренний ряд в (10) при $k=0$:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\frac{4x_{j,0}}{2x_{j,0}\pi-\sin 2x_{j,0}\pi+4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}\cos(2x_{j,0}t)f_j(t)\,dt, \quad (13)$$

соответствующий мнимому корню уравнения (9).

Из асимптотики $x_{j,0}\sim\sqrt{\gamma_j}-\frac{1}{2}$ $(j\to\infty)$ имеем (по условию (5) $\gamma_j\sim aj^{\alpha}$, $\alpha>2$)

$$\frac{4x_{j,0}}{2x_{j,0}\pi-\sin 2x_{j,0}\pi+4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}=\frac{2}{1-\frac{\sin 2x_{j,0}\pi}{2x_{j,0}}+2\sin^2 x_{j,0}\pi}$$

$$<\frac{2}{1-\frac{\sin 2x_{j,0}\pi}{2x_{j,0}}}=2+O\left(\frac{1}{x_{j,0}}\right). \quad (14)$$

Так как $q(t) \in \sigma_1$, пользуясь ($10'$) при $k = 0$ и оценками

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\frac{\alpha}{2}}} |f_j(\pi)| \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} |f_j(\pi)|^2\right)^{1/2},$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{\alpha}} \int_0^{\pi} |f_j(t)|\,dt \le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{N} \left(\int_0^{\pi} |f_j(t)|\,dt\right)^2\right)^{1/2}$$
$$\le \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left(\sum_{j=1}^{N} \int_0^{\pi} |f(t)|\,dt\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (15)$$

в (13) получим

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{2x_{j,0}\pi - \sin 2x_{j,0}\pi + 4x_{j,0}\sin^2 x_{j,0}\pi}{4x_{j,0}} \cos 2x_{j,0}t f_j(t)\,dt\right| < \infty. \qquad (16)$$

Из (12) и (16) вытекает справедливость (10).

Вернемся к доказательству теоремы 1. Ранее было получено, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{n_m} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j_n,.k_n}}{2x_{j_n,.k_n}\pi - \sin 2x_{j_n,.k_n}\pi + 4x_{j_n,.k_n}}$$
$$\times \sin^2 x_{j_n,.k_n}\pi \sin^2 x_{j_n,k_n} t (q(t)\varphi_{j_n}, \varphi_{j_n})\,dt$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \sin^2 x_{j,k} t f_j(t)\,dt. \qquad (17)$$

Вычислим сумму повторного ряда, стоящего в правой части равенства (17). Сначала вычислим значение суммы ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x_{j,k} t f_j(t)\,dt$$
$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{2x_{j,k}}{2x_{j,k}\pi - \sin 2x_{j,k}\pi + 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \int_0^{\pi} \cos 2x_{j,k} t f_j(t)\,dt. \qquad (18)$$

Для каждого фиксированного j при $N \to \infty$ исследуем асимптотическое поведение функции

$$T_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2x_{j,k}}{-2x_{j,k}\pi + \sin 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k}\sin^2 x_{j,k}\pi} \cos 2x_{j,k} t.$$

Чтобы вывести формулу для $T_N(t)$, выразим m-й член суммы $T_N(t)$ в виде вычета в точке $x_{j,k}$ некоторой функции комплексного переменного z, имеющей полюсы в точках $x_{j,0}, x_{j,1}, \ldots, x_{j,N}$. Рассмотрим следующую комплексную функцию:

$$g(z) = \frac{z \cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j) \sin^2 z\pi}. \qquad (19)$$

Она имеет простые полюсы в точках $x_{j,k}$ и k. Вычет в точке $x_{j,k}$ будет равен

$$\operatorname*{res}_{z=x_{j,k}} g(z) = \frac{x_{j,k}\cos 2x_{j,k}t}{\left(\operatorname{ctg} x_{j,k}\pi - \frac{x_{j,k}\pi}{\sin^2 x_{j,k}\pi} - 2x_{j,k}\right)\sin^2 x_{j,k}\pi}$$

$$= \frac{x_{j,k}\cos 2x_{j,k}t}{\frac{1}{2}\sin 2x_{j,k}\pi - x_{j,k}\pi - 2x_{j,k}\sin^2 2x_{j,k}\pi} = \frac{2x_{j,k}\cos 2x_{j,k}t}{\sin 2x_{j,k}\pi - 2x_{j,k}\pi - 4x_{j,k}\sin^2 2x_{j,k}\pi},$$

а в точке k

$$\operatorname*{res}_{z=k} g(z) = \frac{k\cos 2kt}{k(-1)^k\pi(-1)^k} = \frac{\cos 2kt}{\pi}.$$

В качестве контура интегрирования возьмем прямоугольник с вершинами в $\pm iB, A_N \pm iB$, который обходит точку $ix_{j,0}$ справа, а точки $-ix_{j,0}$ и 0 — слева. При каждом фиксированном j имеем $B > x_{j,0}$. Впоследствии B стремится в бесконечность, а $A_N = N + \frac{1}{2}$. При таком выборе A_N будет $x_{j,N} < A_N < x_{j,N+1}$.

Функция (18) является нечетной функцией от z, поэтому интеграл вдоль части контура, находящейся на мнимой оси, а также по полуокружностям с центрами в точках $\pm x_{j,0}$, обращается в нуль.

Если $z = u + iv$, то при больших v и при $u \geq 0$ (17) будет иметь порядок $O\left(\frac{1}{e^{2|v|(\pi - x)}|v|}\right)$, и для заданного значения A_N интегралы, взятые вдоль верхней и нижней сторон контура, стремятся к нулю при $B \to \infty$.

Таким образом, мы получаем следующую формулу:

$$T_N(t) = -S_N(t) + \frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\,dz$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 zt}\,dz,$$

где $S_N(t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\cos 2kt}{\pi}$.

При $N \to \infty$

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi} \sim \frac{1}{\pi i}\int\limits_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{\cos 2zt}{\sin 2z\pi - 2z\sin^2 z\pi}\,dz$$

$$= \frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2N+1)t\operatorname{ch} 2tv - i\sin(2N+1)t}{-i\operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)} i\,dv$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos(2N+1)t\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} 2tv}{-i\operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)}\,dv$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\sin(2N+1)t\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2tv}{\frac{1}{i}\operatorname{sh} 2v\pi - 2(A_N + iv)(1 + \operatorname{ch} 2v\pi)}\,dv.$$

Обозначим интегралы в правой части последнего соотношения через I_{1N}, I_{2N} соответственно. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N - iB}^{A_N + iB} \frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\,dz = I_{1N} + I_{2N} + \psi(A_N t), \tag{20}$$

где

$$\psi(A_N t) = O\left(\lim_{B\to\infty}\int\limits_{A_N-iB}^{A_N+iB}\frac{\cos 2zt}{z^3\sin^2 z\pi}\,dz\right). \tag{20$'$}$$

Оценим I_{1N}:

$$\begin{aligned}
|I_{1N}| &\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{A_N^2+v^2}}\left|\frac{\operatorname{ch}2tv}{\frac{\operatorname{sh}2v\pi}{2i(A_N+iv)}-(1+\operatorname{ch}2v\pi)}\right|dv\\
&\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{A_N^2+v^2}}\frac{\operatorname{ch}2tv}{\left|\left|\frac{\operatorname{sh}2v\pi}{2i(A_N+iv)}\right|-(1+\operatorname{ch}2v\pi)\right|}\,dv\\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{A_N^2+v^2}}\frac{\operatorname{ch}2tv}{\left|\left|\frac{\operatorname{sh}2v\pi}{2(A_N^2+v^2)}\right|-(1+\operatorname{ch}2v\pi)\right|}\,dv\\
&\le \frac{1}{2A_N\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}2tv}{\left|\frac{|\operatorname{sh}2v\pi|}{2}-(1+\operatorname{ch}2v\pi)\right|}\,dv\\
&\le \frac{1}{2A_N\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}2tv}{\left|\frac{1+\operatorname{ch}2v\pi}{2}-(1+\operatorname{ch}2v\pi)\right|}\,dv < \frac{1}{A_N\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}2tv}{1+\operatorname{ch}2v\pi}\,dv\\
&= \frac{2}{A_N\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\operatorname{ch}2tv}{1+\operatorname{ch}2v\pi}\,dv = \frac{\mathrm{const}}{A_N\cos\frac{x}{2}}.
\end{aligned} \tag{20$''$}$$

Подобная оценка получается и для I_{2N}. Можно также показать, что

$$\lim_{N\to\infty}\psi(A_N t) = 0. \tag{21}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^{\pi} T_N(t)f_j(t)\,dt &= -\int\limits_0^{\pi} S_N(t)f_j(t)\,dt\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{\pi} f_j(t)\int\limits_{A_N-i\infty}^{A_N+\infty}\frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg}z\pi - z^2-\mu_j)\sin^2 z\pi}\,dzdt\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{\pi} f_j(t)\int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}}\frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg}z\pi - z^2-\mu_j)\sin^2 z\pi}\,dzdt.
\end{aligned} \tag{22}$$

Пользуясь условием 4 для третьего члена правой части равенства (21), имеем

$$\int\limits_0^{\pi} f_j(t)\int\limits_{\substack{|z|=r\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}}\frac{z\cos 2zt}{(z\operatorname{ctg}z\pi - z^2-\mu_j)\sin^2 z\pi}\,dzdt$$

$$= \int_0^\pi f_j(t) \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{z(\cos 2zt - 1)}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt$$

$$= \int_0^\pi f_j(t) \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{-2z \sin^2 zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \mu_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt.$$

Отсюда при $r \to 0$

$$\int_0^\pi f_j(t) \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}} \frac{-2z \sin^2 zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt$$

$$\sim \int_0^\pi f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2re^{i\varphi}(re^{i\varphi}t)^2}{\gamma_j(re^{i\varphi}\pi)^2}\, d\varphi dt = \int_0^\pi -\frac{2t^2}{\gamma_j\pi^2} f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi}\, d\varphi dt, \quad (23)$$

$$\lim_{r\to 0} \int_0^\pi -\frac{2t^2}{\gamma_j\pi^2} f_j(t) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} re^{i\varphi}\, d\varphi dt = 0. \quad (24)$$

Из (22)–(24) получаем

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi T_N(t) f_j(t)\, dt = -\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi S_N(t) f_j(t)\, dt$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{N\to\infty} \int_0^\pi f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z\cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt. \quad (25)$$

Учитывая оценки для I_{1N} и I_{2N}, а также (20), приходим к неравенству

$$\lim_{N\to\infty} \left| \int_0^\pi f_j(t) \int_{A_N - i\infty}^{A_N + i\infty} \frac{z\cos 2zt}{(z \operatorname{ctg} z\pi - z^2 - \gamma_j)\sin^2 z\pi}\, dzdt \right|$$

$$\le \lim_{N\to\infty} \left| \int_0^\pi \frac{\mathrm{const}}{A_N} \frac{1}{\cos\frac{t}{2}} f_j(t)\, dt \right| + \lim_{N\to\infty} \left| \int_0^\pi \psi(A_N t) f_j(t)\, dt \right|. \quad (26)$$

При выполнении для $f_j(t)$ условия $\int_{\pi-\delta}^{\pi} \frac{f_j(t)}{\pi - t} < \infty$ $(\delta > 0)$ имеем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{const}}{A_N} \int_0^\pi \frac{f_j(t)}{\cos\frac{t}{2}}\, dt = 0. \quad (27)$$

Поэтому, используя (20), (26), (27) в (25), получим

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi T_N(t) f_j(t)\, dt = -\lim_{N\to\infty} \int_0^\pi S_N(t) f_j(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi f_j(t) \cos 2kt\, dt = -\frac{f_j(\pi) + f_j(0)}{4}. \quad (28)$$

Из (17) и (28) окончательно следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{(j)} - \mu^{(j)}) = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{f_j(\pi) + f_j(0)}{4} = -\frac{\operatorname{Sp} q(\pi) + \operatorname{Sp} q(0)}{4}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Укр. мат. журн. 1980. Т. 32, № 2. С. 248–252.
2. *Максудов Ф. Г., Байрамоглы М., Адыгезалов А. А.* О регуляризованном следе оператора Штурма — Лиувилля на конечном отрезке с неограниченным операторным коэффициентом // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 795–799.
3. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 593–596.
4. *Дикий Л. А.* Об одной формуле Гельфанда — Левитана // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 2. С. 119–123.
5. *Гасымов М. Г.* О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. 1963. Т. 150, № 6. С. 1201–1205.
6. *Лидский В. Б. Садовничий В. А.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 2. С. 259–262.
7. *Гусейнов Г. Ш., Левитан Б. М.* О формулах следов для оператора Штурма — Лиувилля // Вестн. МГУ. Сер. математика, механика. 1978. № 1. С. 40–49.
8. *Садовничий В. А.* О следах обыкновенных дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 179–188.
9. *Печенцов А. С.* Регуляризованные следы дифференциальных операторов. Метод Лидского — Садовничего // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 4. С. 490–497.
10. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Формула следа для операторов Штурма — Лиувилля с сингулярными потенциалами // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 427–442.
11. *Любшикин В. А., Подольский В. Е.* О суммируемости регуляризованных следов дифференциальных операторов // Мат. заметки. 1993. Т. 54, № 2. С. 33–38.
12. *Садовничий В. А., Любшикин В. А.* Формулы следов и теория возмущений // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 5. С. 1064–1066.
13. *Дубровский В. В.* Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптические гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Диференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2164–2166.
14. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 129–152.
15. *Садовничий В. А., Подольский В. Е.* Следы операторов // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 5. С. 89–156.
16. *Халилова Р. З.* Регуляризация следа операторного уравнения Штурма — Лиувилля // Функц. анализ, теория функций и их приложения. 1976. № 3. С. 154–161.

Статья поступила 19 мая 2007 г., окончательный вариант — 7 мая 2008 г.

Асланова Нигяр Махар кызы
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
ул. Ф. Агаева, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан
nigar.aslanova@yahoo.com