Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 51

МУДРОСТЬ ЗНАКОВ

С. Л. Соболев

На свете существует очень много наук и все науки связаны друг с другом. Нельзя заниматься химией, не зная физики, биологией, не зная химии, геологией, не зная биологии и, в частности, палеонтологии, то есть не зная, каковы были живые существа на земле задолго до появления на свет человека.

Но есть одна наука, без которой невозможна никакая другая. Это — математика. Ее понятия, представления и символы служат тем языком, на котором говорят, пишут и думают другие науки. Она объясняет закономерности сложных явлений, сводя их к простым элементарным явлениям природы. Она предсказывает и предвычисляет далеко вперед с огромной точностью ход вещей.

Об этой науке я и хочу сегодня вам рассказать.

Начало математики относится к древнему Египту. Основы нашей элементарной математики восходят к античному миру. Великолепная геометрия Евклида, алгебра древних арабов, первое, с чем мы знакомимся сейчас еще в детском возрасте, — все это было когда-то научным откровением. Время в античный период текло медленно. Расцветали, шли вперед искусство, военное дело, но мало менялись основные производительные силы общества. Не было у человечества нужды в понимании стремительного бега переменных величин; статических, застывших соотношений хватало для описания того мира, который понимал тогда человек.

Еще неизменнее оставалось человечество на протяжении средних веков. Мысль и даже чувства людей были скованы канонизированными авторитетами. Поколение за поколением радовались люди одному и тому же, ненавидели одно и то же, одинаково веселились. Не испытывали существенных изменений ни точные науки, ни математика. И только с началом эпохи Возрождения наступает оживление. Корабли Васко да Гама, Христофора Колумба, Магеллана начинают открывать мир.

Начинает пробуждаться и долго лежавшая без движения математическая наука. Пока это еще очень небольшое движение. Нужно уметь прокладывать путь в морях по звездам и хронометру. Правда, дальше сферической тригонометрии дело не идет, но жизнь требует нового. Неверными оказываются аристотелевские законы механики, если их подвергнуть беспристрастной проверке, рушится геоцентрическая система мира. Непрерывное движение, которое начинает видеть вокруг себя пробуждающийся человек и в котором раньше замечались только парадоксы, требует, чтобы его поняли.

Печатается по имеющим статус рукописи материалам конференции «Математизация знания». Напечатано в г. Москве офсетным производством типографии № 3 издательства «Наука» г. Москва. Тираж 800 экз. Подписано к печати 21.04.1968.

И наконец, после бурь эпохи Возрождения, после реформации церкви, после отмирания феодального строя, на заре новой истории, в самом конце XVII века появляется гениальное создание человеческого разума «Исчисление бесконечно малых», возникшее одновременно в Англии и Германии в трудах Исаака Ньютона и Готфрида Вильгельма Лейбница. Анализ бесконечно малых сразу же проникает в механику, а затем и в остальные части физики, меняя до основания все исходные понятия. Он дает возможность изучать переменные величины, глубже понять сущность движения.

В истории науки и техники никогда не было столь драматического открытия, не было большего переворота, большей освежающей бури, чем та, которая разразилась перед самым началом XVIII века.

Мы мыслим всегда с помощью абстрактных понятий. В математике древних такими понятиями были числа и простейшие геометрические образы, точки, прямые, плоскости, углы, многоугольники, многогранники, конические сечения: круги, эллипсы, параболы, гиперболы. Древние мыслили конкретно. Они знали и другие кривые, но каждая новая кривая была вещью в себе и даже получала свое название. Спираль Архимеда, лемниската, локон Марии Аньези. Общей теории кривых в те времена не появлялось.

На смену этому статическому мировоззрению приходит новое, динамическое. Возникает представление о взаимосвязанных переменах, о независимой переменной и функции. С функцией неотъемлемо связаны ее производные: первая производная, то есть скорость ее изменения, вторая производная, или ускорение. Общее понятие о функции сделалось такой же безусловной частью восприятия мира, частью всего мироощущения ученого, как целое число является безусловной частью восприятия мира человеком, начиная с самых ранних ступеней его умственного развития. Уже в каменном веке люди начали мыслить числами и с тех пор видели целое число повсюду вокруг себя. Сейчас ученые мыслят функциями, они умеют обращаться с ними, считать их.

Кроме появления общего понятия о функциях, были рассмотрены еще многие конкретные функции, которые мыслятся часто как графики, иногда как формулы, а подчас как таблицы. Мир функций богат и разнообразен. Между ними, их производными и их интегралами, или так называемыми первообразными, от которых данная функция служит производной, существуют разные взаимоотношения, связи, уравнения. Понимание этого мира, знание его связей дает исследователю новый взгляд на вещи.

Положение планеты, вращающейся вокруг Солнца и притягиваемой с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, описывается, то есть моделируется, таким уравнением, из которого сразу следуют кеплеровские законы. Во всех таких примерах удается на основании бесконечно малой картины, подчиненной элементарным законам механики, восстановить движение в целом. Таков метод дифференциальных уравнений.

Этот метод влечет за собой множество физических открытий, появившихся сразу же при его возникновении. Первый, кто начал им пользоваться, был Исаак Ньютон, — я имею в виду научное открытие закона всемирного тяготения. Вовсе не удар яблоком по голове заставил догадаться о существовании тяготения тел друг к другу, а закономерности движения этих тел. Ньютон подсчитал ускорения всех планет и обнаружил, что все они направлены к Солнцу, самому массивному телу, и зависят только от расстояния до Солнца. Предметы, расположенные близко к Земле, тяготеют к ней. Вместе с открытым им законом механики о пропорциональности ускорения и силы это и доказывало наличие тяготения. В первом приближении влияние планет друг на друга незначительно. Однако при более точных расчетах его надо учитывать. Таким образом, кроме объяснения движения планет, теория дифференциальных уравнений дает методы точного **предвычисления** этих движений. Далее пошли бесчисленные другие приложения анализа. Возникла аналитическая механика, кинематика, динамика, которая потом уже на все века сделается по существу наукой о машинах и механизмах.

Очень скоро тот же аппарат теории переменных величин стали применять для математического описания величин, зависящих от многих независимых переменных. Примером таких величин может служить температура в некоторой точке тела. Эта температура в разных точках различна и, значит, зависит не только от времени, но и от координат данной точки. Дифференциальное и интегральное исчисление применяется и к переменным величинам, образующим так называемое поле.

С полем связаны новые математические понятия; градиент-вектор, показывающий, как быстро и в какую сторону происходит рост изучаемой переменной, расходимость векторного поля, вихрь этого поля. Пользуясь этими понятиями, можно записать элементарные законы, справедливые в физических полях. Законы эти имеют вид уравнений между частными производными от неизвестных функций. Решения таких уравнений, качественные следствия из них позволили объяснить и предсказать многие явления в таких физических полях.

Особенно хорошо были изучены модели некоторых элементарных явлений, происходящих в среде: распространения волн, передачи тепла и равновесного установившегося состояния электрического поля, поле тяготения и тому подобное. Возникла теория уравнений математической физики.

В истории механики XVIII и особенно XIX века роль, которую сыграли эти математические открытия, оказалась исключительно большой. События развивались далее, как и всегда, по любопытной, каждый раз повторяющейся схеме, которую мы будем прослеживать не только на первом, но и на последующих этапах математизации науки и техники.

Схема эта такова.

У истоков любого научно-технического открытия, любого качественного скачка лежит, как правило, некоторое открытие чисто математического характера. В математике создаются новые абстрактные понятия, образы и представления, новые теории, следствия из которых будут получены не сразу. Через большой период времени, иногда в полстолетие, эта математическая подготовительная стадия открытия дополняется конкретным содержанием из других наук. Оказывается, что созданные ранее математические образы и понятия представляют собой прекрасную абстрактную модель совсем новых, например, физических явлений. Поскольку эта модель хорошо исследована, она подсказывает сразу и физические следствия. Явление становится понятным, получается возможность новых предсказаний, предвычислений. Рождается физическая теория. (Конечно, и появление математических открытий не случайно. Они вытекают из многих требований жизни, но этот вопрос мы оставим сейчас в стороне.)

Следующий шаг от рождения физической теории до ее прямого использования в технике часто бывает трудным и долгим. Проходят иногда годы и десятки лет, пока новое научное открытие становится понятным более широкому кругу лиц и входит в человеческое сознание. Тогда вспыхивает инженерная мысль, включаются организованные большие массы людей. Начинается разработка новой области техники.

Конечно, то, что я обрисовал сейчас, не более чем схема. Жизнь бывает подчас много сложнее. Развитие техники, технический прогресс идет иногда долго своим собственным путем. Постепенные усовершенствования накапливаются и приводят к принципиально новым открытиям, в основе которых лежат хотя и новые технически, но старые в научном отношении идеи. Однако каждый решительный настоящий переворот в науке и технике готовится долго. Он происходит от глубоких коренных изменений в точных науках, эти изменения, в свою очередь, как правило, возникают из новых математических открытий, опираются на ряд новых математических образов и идей.

XIX век называют веком пара и электричества. Электрический ток стал сейчас неотъемлемой частью нашего быта. Понимание законов, управляющих электрическими и магнитными явлениями, зиждется на теории дифференциальных уравнений, теории, созданной задолго до того, как человечество начало пользоваться ими для решения задач электротехники, и на теории комплексных чисел.

Когда речь идет об электромагнитных явлениях, всюду упоминают вместе два имени — Фарадея и Максвелла.

Максвелл записал математическим языком найденные Фарадеем закономерности, эти закономерности и уравнения Максвелла заключают в себе, как оказалось, гораздо больше, чем простое описание опытов. К этим опытам Максвеллом была добавлена гипотеза о том, что изменение электрического поля в пустоте и в диэлектрике должно приводить к тому же магнитному эффекту, как и электрический ток. Уравнения Максвелла оказались типичными волновыми, или, как математики говорят, гиперболическими уравнениями в частных производных.

Теория таких уравнений, существовавшая до этого около столетия, привела к заключению о том, что электромагнитные возмущения представляют собой колебания волнового характера и должны распространяться со скоростью 300000 км/сек, то есть со скоростью света. Исследования Максвелла — пример открытий математической физики. Это по существу математические открытия.

Таким образом, радиоволны, которые сейчас окружают нас, были впервые открыты не в лаборатории в результате счастливой и маловероятной случайности или планомерного поиска. Их открыл математик Максвелл за письменным столом, анализируя полученную им систему уравнений в частных производных. Вслед за тем эти волны обнаружил Герц в своей лаборатории. Это было сделано великолепно, но уже не было неожиданным открытием. Первые в мире радиоприемники и радиопередатчики, построенные А. С. Поповым, выросли, таким образом, из теории уравнений в частных производных.

Общие физические представления, о которых мы говорили до сих пор, были представлениями о непрерывности среды, в которой разыгрываются явления. Само это представление — математический образ, выросший из анализа бесконечно малых, из трудов Ньютона, Лейбница и их учеников. Но на самом деле, как мы теперь хорошо знаем, вещества устроены иначе. Они состоят из атомов и молекул, находящихся в непрерывном движении. Мельчайшие движения этих частиц беспорядочны, и то, что мы видим и анализируем, это лишь результат суммарного воздействия на нас этих движений. Физические понятия, относящиеся к непрерывной среде, такие, как скорость ее движения в каждой точке, температура в каждой точке, давление, плотность и другие им подобные понятия, статистические. А они были созданы в математике задолго до их конкретного применения в механике и физике. Та часть математики, которая этим занимается, называется теорией вероятности; теория вероятности служит базой молекулярной физики, возникшей в конце XIX века. На этой базе современная молекулярная физика по-новому переосмысляла термодинамику и теорию непрерывных сред. Тому же Максвеллу, таким образом, принадлежит пионерская роль и в этом направлении.

На рубеже XX века физика претерпела крупнейший переворот. Этот переворот ознаменовал новый этап проникновения науки в жизнь и технику. Началось использование новой физики, физики теории относительности и атомных ядер, квантовой электроники. Этот переворот также имеет свою очень важную математическую предысторию.

В середине XIX века великий русский геометр Н. И. Лобачевский построил свою «воображаемую геометрию», в которой вместо постулата Евклида был положен в основу постулат о существовании бесчисленного множества прямых, не пересекающихся с данной, проходящих через данную точку. Так же строил свою систему немного позже и независимо от Лобачевского венгерский геометр Я. Бойяи.

Неевклидова геометрия Лобачевского оставалась довольно долго не понятой никем, кроме отдельных ученых таких, как великий немецкий математик Гаусс. Не ограничиваясь созданием новой геометрии, Лобачевский приступает к ее опытной проверке, цель которой обнаружить кривизну мирового пространства. Опыты не принесли утешения. В масштабах Солнечной системы геометрия не отличалась от евклидовой. Сейчас же мы знаем, что, обладай Лобачевский методикой более современной, он мог бы обнаружить кривизну нашего мира уже тогда.

Дальнейший шаг в направлении, начатом Лобачевским, был сделан Риманом в его замечательном произведении «О гипотезах, лежащих в основании геометрии».[1] Риман построил очень совершенную математическую теорию пространства, обладающего переменной внутренней кривизной, то есть имевшего различную кривизну в различных точках.

Великолепный математический аппарат, возникший из этих исследований, называемый тензорным анализом, послужил главной базой для теории относительности Пуанкаре и Эйнштейна, этой первой ласточки физики XX века.

Физика XX века — квантовая физика — основана на новых представлениях, новых образах, новых математических моделях квантовых явлений, модели заимствованы из других математических теорий, явившихся на свет на рубеже XIX–XX веков из функционального анализа. Это область математики, где вместо переменных — чисел рассматриваются переменные — функции и переменные — кривые. Роль функции играет функциональный оператор.

Опыт показал, что частицы материи, атомы, обладают двойственной природой, выступая то как частица, то как волна. Такой же двойственной природой обладают и электромагнитные волны, которые в некоторых отношениях подоб-

[1] Лекция Б. Римана "Über die Hypothesen, Welche der Geometrie zu Grunde Liegen" была прочитана 10 июля 1864 г. Имеется перевод: Риман Б. О гипотезах, лежащих в основании геометрии // Об основания геометрии. Под ред. А. Норден. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 309–341.

ны частицам. Если раньше координаты частиц выражались определенными числами, то теперь вместо этого все они изображаются операторами, которые способны отобразить их двойственную природу. Связи между этими величинами хорошо моделируются связями между соответствующими операторами. Квантовая физика умеет предсказывать и предвычислять явления, с которыми классическая физика ничего не могла поделать.

Применение новой квантовой физики разнообразно. Первоначально областью ее был микромир, ядро атома и его оболочки. Она изучает испускание и поглощение света. Дальше, однако, обнаружился большой класс явлений обычного масштаба, которые оказалось возможным понять лишь с помощью квантовых представлений: это сверхтекучесть гелия и сверхпроводимость разных веществ, теория металлов, теория полупроводников. Квантовая теория дозволила в последнее время создать новую область техники — квантовую электронику. Квантовые генераторы — великолепное достижение экспериментальной физики — выросли, таким образом, из абстрактных исследований.

К середине XX столетия математика обогатилась новыми техническими средствами. Появились быстродействующие электронные математические машины.

О том, что они собою представляют, я буду говорить позднее. Сейчас я остановлюсь на том, как опыт использования этих машин неожиданно раскрыл перед учеными совсем новые области математики и ее применений.

Быстродействующие вычислительные машины появились главным образом под влиянием требований из новых областей техники. Раньше, особенно в технически передовых и богатых странах, каждое новое изделие проходило длинную стадию моделирования и испытания. Прежде чем сделать окончательную конструкцию, нужно было перерабатывать много разных неудачных вариантов. Опытная доработка и доводка была главным способом создания хороших машин. В новой технике этот путь становился непригодным. Нельзя было бы вести пристрелку по Луне, выпуская сотни и тысячи ракет. Слишком это было бы дорого, как слишком дорого и долго было бы испытывать один неудачный реактор за другим. Поэтому стала невозможной детальная опытная отработка разных устройств. Ее заменил математический расчет. Этот расчет бывает иногда очень сложным. Он требует миллионов арифметических действий, которые нужно к тому же выполнить в короткий промежуток времени. Для того чтобы это осуществить, и были изобретены математические машины, работающие сейчас уже во много миллионов раз быстрее человека.

И вот примеры. Современная химическая промышленность широко использует различные катализаторы: вещества, которые участвуют в химических процессах, ускоряя их, но в конечном итоге сами не изменяются. Процессы катализа сложны. В современных химических производствах работают аппараты, где производительность и качество результата зависят от строгого соблюдения множества условий: температуры, количества подаваемых составляющих, скорости потока и многого другого. Раньше эти аппараты подбирались опытным путем. Нужно было исследовать сначала маленькую лабораторную модель, затем полупроизводственную и только потом можно было проектировать аппарат в натуральную величину. При этом на каждом шагу приходилось многое менять, улучшать. Математическое моделирование, основанное на точном понимании процесса, позволило заменить всю эту работу работой математической машины, которая непосредственно рассчитывает промышленную установку.

Несомненно, что появление новых возможностей расчета стимулировало широкое распространение математических идей в различных областях естествознания и особенно техники. Однако дело здесь не только в математических машинах. Эти машины — не единственная и даже не главная причина наблюдаемого нами во всем мире расширения применений математики. Постепенное проникновение математических идей в технику обусловлено, как мне кажется, объективными закономерностями развития науки. Этот процесс, начавшийся в XVIII веке, никогда не останавливался. Новые математические понятия, образы, представления при своем появлении становились известными узкому кругу математиков, которые иногда не понимали, да и не хотели понимать всего их значения. Очень часто исследование новых чисто математических объектов производилось математиками вначале при полном непонимании и даже насмешках над отвлеченностью этих занятий со стороны других специальностей. То же было, например, и с геометрией Лобачевского.

Однако ничего на свете действительно ценное не остается надолго достоянием кучки избранных. Система новых образов постепенно овладевает умами, и тогда с их помощью начинают мыслить и другие. Если это даже не приводит к новым гениальным открытиям, то всегда обогащает науку и практику. Более глубокое понимание вещей меняет мировоззрение ученых и инженеров, и в результате они продвигаются значительно вперед в своей области.

Часто математики и инженеры или математики и физики по-разному понимают и воспринимают математические открытия. Для математика особую важность имеет строгость и последовательность в выводе, точность в определениях и в заключениях. Физика или техника эта строгость не интересует. Наивно представляя себе, что все предыдущие математические исследования являются проявлением какого-то смешного педантизма, он берет готовый результат таким, как он есть. Часто он воображает при этом, что только он сумел понять и почувствовать этот результат по-настоящему, и думает даже, что он сам до него дошел. Дальше, когда этот результат им освоен, новая система образов, понятий и представлений стала для него как бы своей собственной, и он заново переосмысливает на новой стадии то физическое явление, которое он изучает.

Так рождались квантовая физика, теория относительности, так сейчас на наших глазах рождается новая теория элементарных частиц, основанная на математических понятиях из теории представлений групп. Теория представлений групп — это один из абстрактных разделов современной алгебры.

Теперь перехожу к третьему разделу, самому современному — к дискретной математике и ее непосредственному влиянию на технику. Я расскажу о новых прямых связях между техникой и математикой, о математизации техники вместе с математизацией науки.

Важным разделом современной дискретной математики является теория управляющих систем. Это главная часть кибернетики, о ней в последнее время много пишут и говорят. Так же, как и все остальные части математики, эта дисциплина имеет своим предметом некоторые абстрактные модели разного рода явлений окружающего мира. Так же, как и все остальные части математики, именно в силу абстрактности она универсальна. Образы, методы, идеи кибернетики одинаково приложимы к изучению работы мозга животных, к изучению алгоритмов нахождения оптимального размещения производственных предприятий или к саморегулированию симбиоза сложных биологических систем, состоявших из многих видов организмов. Те же образы и представления возникают и при изучении теории наследственности и в основе работы математических машин и их конструировании.

Возникновение этих новых идей относится к 20–30-м годам нашего века. Это было время, когда появилось понятие алгоритма, то есть последовательности элементарных логических, мыслительных действий. Их всегда можно представить себе как последовательное решение вопросов, имеющих только два ответа: да или нет.

В связи с этим процесс человеческого мышления можно схематически представить себе как получение некоторого ответа, да или нет, на какой-то вопрос, в зависимости от того, утвердительно или отрицательно решаются некоторые другие вопросы. Если условиться обозначать, например, цифрой 0 уль положительный ответ, а цифрой 1 отрицательный, то искомая величина представит собой логическое переменное, принимающее два значения. Это будет зависимая или логическая функция. Значения ее определяются значениями некоторых других независимых логических переменных.

Точно так же, как это случилось в конце XVII века и в начале XVIII, открытие новых идей, новых понятий совершило переворот во многих областях человеческой деятельности.

Первыми появились глубокие биологические открытия, важнейшее из которых — способ передачи потомству наследственных признаков. Сейчас трудно представить, как сумеет человечество использовать появившееся знание самого себя. По-видимому, это может повлечь за собой такие радикальные изменения в природе человека, которые могут совершенно изменить лицо всего человечества.

Другой пример управляющих систем — это некоторые технические процессы. В современном производстве большие конвейеры, через которые проходят собираемые детали сложных машин, прежде чем превратиться в окончательный продукт, связаны многими каналами с источниками подаваемых или отдельных собранных частей. Продукция каждой такой цепочки, в свою очередь, переходит на другую более высокую ступень. Наладка совместной работы всех звеньев сборки очень сложна, так как любые возмущения одного из них влияют на все остальные. Математическое моделирование работы такого конвейера и его статистическое исследование при помощи вычислительных машин позволяет найти способы управления им, устраняющие возможные неполадки.

Во всем мире идет постепенный рост производства, в котором и проявляется происходящий непрерывно технический прогресс. Рост этот управляется волей людей, которые должны принимать конкретные решения о том, куда вкладывать средства, в какую область техники, где строить предприятия, откуда, куда и какими средствами что перевозить и тому подобное.

Решение задач об оптимальном использовании ресурсов, об оптимальных планах развития и тому подобном часто является сложной математической задачей. Оно потребовало создания новых методов, новых алгоритмов.

Сложность экономических задач в разных странах все возрастает. Для их решения требуются все более совершенные и мощные методы. Сейчас математическая экономика уже превратилась в очень большую отрасль науки. Особенно велико ее значение в социалистических странах, которые по иронии судьбы унаследовали от прошлого отсталую техническую культуру.

Человечество движется вперед огромными шагами. На протяжении последнего периода скорость прогресса стремительно возрастает. За каждые полстолетия мы проходим путь, не меньший, чем за всю предшествующую историю.

Трудно делать сейчас прогнозы на далекое будущее, но все мы надеемся, что в скором времени человечество сумеет покончить со всеми непорядками, которые царят на нашей земле. Эту эпоху мы называем коммунизмом. Приближение этой эпохи чувствуется и по тому, насколько быстро прогрессирует наука и, в частности, наука о человеческом обществе. Она становится все более точной и действенной, поскольку она математизируется вслед за всеми остальными науками.

В этом светлом будущем человечества, в которое я твердо верю, самый несчастный из людей будет счастливым в нашем теперешнем понимании.