Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.958

О ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ И ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА

В. Г. Романов

Аннотация. Для линейной системы уравнений упругости, описывающей процесс распространения волн в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$, рассматривается задача об определении плотности и упругих параметров, являющихся кусочно постоянными функциями переменной x_3. При этом форма импульсного точечного источника, инициирующего упругие колебания полупространства, считается неизвестной. Показывается, что при определенных предположениях о форме источника и параметрах упругой среды задание смещений точек границы полупространства для некоторого конечного временного интервала $(0, T)$ однозначно определяет нормированную плотность (по отношению к плотности первого слоя) и упругие параметры Ламе для $x_3 \in [0, H]$, где $H = H(T)$. Дается алгоритмическая процедура построения искомых параметров.

Ключевые слова: система уравнений упругости, слоистая среда, обратная задача, алгоритм решения.

С. Л. Соболеву посвящаю

§ 1. Введение, основные результаты

Рассмотрим в полупространстве $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$ систему уравнений линейной упругости

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i, \quad u_i|_{t<0} \equiv 0, \quad \sigma_{i3}|_{x_3=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}(\nabla \cdot u) + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{1.2}$$

в которой $u = (u_1, u_2, u_3)$, $(\nabla \cdot u)$ — дивергенция вектора u, δ_{ij} — символ Кронекера. Предположим, что параметры λ, μ упругой среды и ее плотность ρ являются кусочно постоянными функциями переменной x_3, причем выполняются условия $\lambda(x_3) + \mu(x_3) > 0$, $\mu(x_3) > 0$. Предположим далее, что вектор $F = (F_1, F_2, F_3)$ определен формулой

$$F(x,t) = \bar{f}(t)\nabla\delta(x - x^0), \quad x^0 = \bigl(0, 0, x_3^0\bigr), \quad x_3^0 > 0. \tag{1.3}$$

Такое задание функции $F(x,t)$ определяет импульсный источник типа взрыва, широко используемый в технике геофизических работ.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00312) и Сибирского отделения РАН (проект-2006, № 16).

Задача (1.1)–(1.3) имеет осевую симметрию относительно оси x_3, в силу которой ее решение также обладает осевой симметрией. Поэтому удобно ввести цилиндрическую систему координат r, φ, z, определив соответствие между декартовыми и цилиндрическими переменными обычными формулами: $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$, и соответствующие этой системе компоненты $u_r = u_1\cos\varphi + u_2\sin\varphi$, $u_\varphi = u_1\sin\varphi - u_2\cos\varphi$, $u_z = u_3$ вектора u. При этом $u_\varphi \equiv 0$, а $u_r = u_r(r,z,t)$, $u_z = u_z(r,z,t)$.

В дальнейшем нас будет интересовать обратная задача об определении кусочно постоянных функций λ, μ и ρ по заданным при $z=0$ смещениям

$$u_z|_{z=0} = g_1(r,t), \quad u_r|_{z=0} = g_2(r,t), \quad r \in [0,\infty),\ t \in (0,T),\ T>0. \tag{1.4}$$

Пусть полубесконечный интервал $[0,\infty)$ разбит точками $z_0 = 0$, z_k, $k = 1,2,\dots$, на конечное или счетное число интервалов (в последнем случае с единственной точкой сгущения для множества $\{z_k\}$ на бесконечности). Пусть далее

$$\lambda = \lambda_k, \quad \mu = \mu_k, \quad \rho = \rho_k, \quad z \in [z_{k-1}, z_k], \quad k = 1,2,\dots, \tag{1.5}$$

причем $(\lambda_k,\mu_k,\rho_k) \neq (\lambda_{k+1},\mu_{k+1},\rho_{k+1})$.

В обратной задаче определению подлежат точки z_k и параметры λ_k, μ_k, ρ_k, $k = 1,2,\dots$.

Для скалярного волнового уравнения, когда скорость распространения волн является непрерывной функцией, подобная задача рассматривалась при известной функции $\bar f(t)$ в ряде работ (см., например, [1–6]), для системы уравнений упругости — в [7, 8]. В этих работах установлен ряд теорем единственности и устойчивости решения соответствующих обратных задач. При неизвестной функции $\bar f(t)$ обратные задачи для волнового уравнения рассматривались в [9–11]. Изучаемая в этой статье задача отличается от рассмотренных в [7, 8] видом источника, а также тем, что здесь функция $\bar f(t)$ считается неизвестной. Эти отличия приводят к принципиальному изменению вычислительного алгоритма.

Основные предположения, принятые в этой работе при исследовании обратной задачи, следующие.

1. Форма импульса в источнике имеет структуру

$$\bar f(t) = \bar a\delta(t) + \hat f(t)\theta_0(t), \quad a \neq 0, \tag{1.6}$$

где $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ при $t < 0$, функция $\hat f(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и у нее существует конечная производная в нуле $\hat f'(0)$.

2. В точках z_k, $k \geq 1$, импеданс $I(z) = \rho(\lambda + 2\mu)$ имеет конечный разрыв, т. е. $I_k = \rho_k(\lambda_k + 2\mu_k) \neq I_{k+1} = \rho_{k+1}(\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1})$.

Сформулируем полученные результаты. Для этого введем в рассмотрение скорости продольных c_1 и поперечных c_2 упругих волн равенствами

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad c_1 = c_{1k}, \quad c_2 = c_{2k}, \quad z \in [z_{k-1}, z_k],$$

и вспомогательную переменную $\zeta = \zeta(z)$, определив ее формулой

$$\zeta = \int\limits_0^z \frac{ds}{c_1(s)} = \zeta_{k-1} + \frac{z - z_{k-1}}{c_{1k}}, \quad z \in [z_{k-1}, z_k], \quad k = 1,2,\dots, \tag{1.7}$$

в которой

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{z_j - z_{j-1}}{c_{1j}}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Пусть $x_3^0 = z_*$, $\zeta_* = z_*/c_{11}$. Обратную к $\zeta(z)$ функцию обозначим через $z(\zeta)$. Введем преобразования Фурье — Бесселя функций $v_1 = u_z$, $v_2 = u_r$ формулами

$$\tilde v_1(\nu, z, t) = \int_0^\infty v_1(r, z, t) J_0(\nu r) r\, dr, \quad \tilde v_2(\nu, z, t) = \int_0^\infty v_2(r, z, t) J_1(\nu r) r\, dr \tag{1.8}$$

и положим $w_1(\nu, \zeta, t) = \tilde v_1(\nu, z(\zeta), t)$, $w_2(\nu, \zeta, t) = \tilde v_2(\nu, z(\zeta), t)/\nu$.

В § 5 показано, что функции $w_1(\nu, \zeta, t)$, $w_2(\nu, \zeta, t)$ удовлетворяют равенствам

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial \zeta^2} + \nu^2 (c_{1k}^2 - c_{2k}^2) \frac{1}{c_{1k}} \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - \nu^2 c_{2k}^2 w_1, \quad w_1|_{t<0} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \frac{c_{2k}^2}{c_{1k}^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial \zeta^2} - \nu^2 (c_{1k}^2 - c_{2k}^2) \frac{1}{c_{1k}} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} - \nu^2 c_{1k}^2 w_2, \quad w_2|_{t<0} = 0, \tag{1.10}$$

$$\zeta_0 < \zeta_* < \zeta_1 < \dots < \zeta_k < \zeta_{k+1} < \dots ,$$

граничным условиям

$$\left(c_{11} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + \nu^2 (c_{11}^2 - 2c_{21}^2) w_2 \right)_{\zeta=0} = 0, \quad \left(\frac{1}{c_{11}} \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - w_1 \right)_{\zeta=0} = 0, \tag{1.11}$$

условию в источнике

$$[w_1]_{\zeta=\zeta_*} = -2f(t), \quad \left[\frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=\zeta_*} = 0,$$

$$[w_2]_{\zeta=\zeta_*} = 0, \quad \left[\frac{\partial w_2}{\partial \zeta} \right]_{\zeta=\zeta_*} = 2c_{11} f(t), \quad f(t) = \frac{1}{4\pi c_{11}^2} \bar f(t), \tag{1.12}$$

условиям непрерывности смещений и напряжений на границах разрыва параметров среды

$$[w_1]_{\zeta=\zeta_k} = 0, \quad \left[\rho c_1 \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} + \nu^2 \rho (c_1^2 - 2c_2^2) w_2 \right]_{\zeta=\zeta_k} = 0,$$

$$[w_2]_{\zeta=\zeta_k} = 0, \quad \left[\rho c_2^2 \left(\frac{1}{c_1} \frac{\partial w_2}{\partial \zeta} - w_1 \right) \right]_{\zeta=\zeta_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots \tag{1.13}$$

В равенствах (1.12) символ $[w]_{\zeta=\zeta_*}$ означает разность предельных значений функции w в точках $\zeta = \zeta_* + 0$ и $\zeta = \zeta_* - 0$. Подобное обозначение принято и в формулах (1.13).

Информация о решении, используемая для решения обратной задачи, записывается в терминах функций w_1, w_2 в виде

$$w_1|_{\zeta=0} = \tilde g_1(\nu, t), \quad \tilde g_1(\nu, t) = \int_0^\infty g_1(r, t) J_0(\nu r) r\, dr,$$

$$w_2|_{\zeta=0} = \frac{\tilde g_2(\nu, t)}{\nu}, \quad \tilde g_2(\nu, t) = \int_0^\infty g_2(r, t) J_1(\nu r) r\, dr, \quad t \in (0, T). \tag{1.14}$$

Основой для решения обратной задачи является построение специального решения, которое аккумулирует в себе сингулярную часть решения прямой задачи, а также все разрывы этого решения и его частной производной по переменной t. Это специальное решение имеет вид суперпозиции плоских волн, распространяющихся от источника вправо и влево со скоростями продольных и поперечных волн, отражающихся от границы $\zeta = 0$ и испытывающих на границах $\zeta = \zeta_k$, $k = 1, 2, \dots$, преломление и отражение в соответствии с формулами, обеспечивающими непрерывность смещений и напряжений. Решение имеет вид

$$w_1^* = \sum_{s\geq 1} \left(\alpha_i^j \delta\big(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\big) + \beta_i^j(\nu,\zeta)\theta_0\big(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\big) + \gamma_i^j(\nu,\zeta)\theta_1\big(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\big)\right),$$
$$w_2^* = \sum_{s\geq 1} \big(\eta_i^j \theta_0\big(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\big) + \omega_i^j(\nu,\zeta)\theta_1\big(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\big)\big). \tag{1.15}$$

Здесь $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$, нижний i и верхний j индексы являются мультииндексами, $i = (i_1, \dots, i_s)$, $j = (j_1, \dots, j_s)$. Индекс i состоит из номеров границ, записанных в той последовательности, в которой плоская волна, выходящая от источника, их достигает. При этом всегда $i_1 = 0$ или $i_1 = 1$ и $i_s = i_{s-1} + 1$ или $i_s = i_{s-1} - 1$ при $s \geq 1$. Число s показывает, как много актов отражения или преломления совершила волна, дошедшая от источника до границы $\zeta = \zeta_{i_s}$. Суммирование осуществляется по всевозможным $s \geq 1$. Заметим, что в любой ограниченной области на плоскости переменных ζ, t суммируется только конечное число компонент. Верхний мультииндекс j состоит из последовательности чисел, элементами которой служат 1 и 2. При этом значению $j_s = 1$ соответствует продольная плоская волна, а значению $j_s = 2$ — поперечная волна. Мультииндекс j прослеживает «историю» преобразований продольных волн в поперечные и наоборот в полном соответствии с «историей» прохождения волн через границы слоев. Таким образом, фиксированное значение j_s относится к слою (ζ_{k-1}, ζ_k), где $k = \max(i_{s-1}, i_s)$ при $s \geq 2$ и $k = 1$ при $s = 1$.

Параметр χ_i^j принимает при $j_s = 1$ значения, равные -1 или $+1$ в зависимости от направления распространения волны, а при $j_s = 2$ — значения $\pm c_{1k}/c_{2k}$, где $k = 1$, если $s = 1$, и $k = \max(i_{s-1}, i_s)$, если $s \geq 2$. Знак $+$ соответствует волне, движущейся вдоль оси ζ влево, знак $-$ соответствует волне, движущейся вправо. Параметр τ_i^j выбирается так, чтобы отрезки прямых линий $t + \chi_i^j\zeta = \tau_i^j$ образовывали в области $\{(t,\zeta) \mid t \geq 0, \zeta \geq 0\}$ непрерывную (вообще говоря) ломаную линию. В частности, при $s = 1$

$$\chi_1^1 = -1, \quad \chi_1^2 = -\frac{c_{11}}{c_{21}}, \quad \chi_0^1 = 1, \quad \chi_0^2 = \frac{c_{11}}{c_{21}}, \quad \tau_i^j = \chi_i^j \zeta_*, \tag{1.16}$$

при $s = 2$

$$\chi_i^j = \begin{cases} -1, & i = (0,1),\ j = (1,1), \\ -c_{11}/c_{21}, & i = (0,1),\ j = (1,2), \\ 1, & i = (1,0),\ j = (1,1), \\ c_{11}/c_{21}, & i = (1,0),\ j = (1,2), \\ -1, & i = (1,2),\ j = (1,1), \\ -c_{12}/c_{22}, & i = (1,2),\ j = (1,2), \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\tau_i^j = \begin{cases} \tau_0^1, & i = (0,1),\ j = (1,1)\&(1,2), \\ \tau_1^1 + (\chi_i^j - \chi_1^1)\zeta_1, & i = (1,0)\&(1,2),\ j = (1,1)\&(1,2). \end{cases} \tag{1.18}$$

Амплитудные коэффициенты α_i^j, β_i^j, γ_i^j, η_i^j, ω_i^j полагаются при $s = 1$ тождественным нулем вне отрезка $[\zeta_0, \zeta_*]$, если $i = 0$, и вне отрезка $[\zeta_*, \zeta_1]$, если

$i = 1$. При $s \geq 2$ эти коэффициенты полагаются нулем вне отрезка $[\zeta_{k-1}, \zeta_k]$, где $k = \max(i_{s-1}, i_s)$. Процедура построения этих коэффициентов подробно описана в следующем параграфе. Функции w_1^*, w_2^* строятся так, что разности $w_1 - w_1^* = \overline{w}_1$, $w_2 - w_2^* = \overline{w}_2$ являются гладкимим функциями при $\zeta \neq \zeta_*$. А именно, имеет место

Теорема 1.1. *Пусть справедливо равенство* (1.6), *в котором функция* $\hat{f}(t)$ *принадлежит* $\mathbf{C}[0, T - \zeta_*)$ *и у нее существует в нуле конечная производная. Тогда функции* $\overline{w}_1(\nu, \zeta, t)$, $\overline{w}_2(\nu, \zeta, t)$ *тождественно равны нулю при* $t \leq |\zeta - \zeta_*|$ *и непрерывны в области* $D(T) = \{(\zeta, t) | \, |\zeta - \zeta_*| > 0, 0 \leq t < T - \zeta\}$ *вместе с первыми производными по переменной* t.

Эта теорема доказана в § 4. Из нее вытекает, что функция $\tilde{g}_1(\nu, t)$ является следом при $\zeta = 0$ суммы двух функций $w_1^*(\nu, 0, t)$ и $\overline{w}_1(\nu, 0, t)$, причем след второй из них представляет собой непрерывно дифференцируемую по t функцию, в то время как след первой состоит из сингулярной функции (суммы дельта-функций, сосредоточенных в отдельных точках) и кусочно линейной функции, имеющей конечные разрывы как самой функции, так и ее производной. Аналогично функция $\tilde{g}_2(\nu, t)$ является следом при $\zeta = 0$ суммы функции $w_2^*(\nu, 0, t)$ и непрерывно дифференцируемой по t функции $\overline{w}_2(\nu, 0, t)$. Функция $w_2^*(\nu, 0, t)$ является кусочно линейной функцией, содержащей конечные разрывы этой функции и ее производной. Из сказанного выше следует, что следы функций w_1^*, w_2^* при $\zeta = 0$ полностью определяются заданием $\tilde{g}_1(\nu, t)$, $\tilde{g}_2(\nu, t)$ и, следовательно, известны. Более того, формулы, полученные в § 2, показывают, что коэффициенты представления (1.15) α_i^j и η_i^j не зависят от ν, ζ, коэффициенты β_i^j, ω_i^j являются линейными функциями параметра ν^2 и переменной ζ, а коэффициент γ_i^j — квадратичная функция параметра ν^2 и переменной ζ. Поэтому задание функций $\tilde{g}_1(\nu, t)$, $\tilde{g}_2(\nu, t)$ для трех фиксированных различных значений $\nu > 0$ однозначно определяет функции $w_1^*(\nu, 0, t)$, $w_2^*(\nu, 0, t)$ для всех $\nu > 0$ и $t \in (0, T)$.

С другой стороны, коэффициенты α_i^j β_i^j, γ_i^j, ω_i^j, η_i^j выражаются явным образом через параметры среды. Из проведенного в настоящей работе анализа вытекает следующая

Теорема 1.2. *Пусть имеет место представление* (1.6), *в котором* $\bar{a} \neq 0$, *функция* $\hat{f}(t)$ *принадлежит* $\mathbf{C}[0, T - \zeta_*)$ *и у нее существует в нуле конечная производная* $\hat{f}'(0)$, *пусть, кроме того,* $I_k = \rho_k(\lambda_k + 2\mu_k) \neq I_{k+1} = \rho_{k+1}(\lambda_{k+1} + 2\mu_{k+1})$. *Тогда задание функций* $(g_1(\nu, t), g_2(\nu, t)) \not\equiv 0$ *для* $t \in (0, T)$ *и трех различных значений* $\nu > 0$ *однозначно определяет:*

1) *числа* $\bar{a}$, $\hat{f}(0)$, $\hat{f}'(0)$, ζ_*, *характеризующие параметры импульсного источника и точку его приложения,*

2) *скорость продольных* c_{11} *и поперечных* c_{21} *волн в первом слое и границу* $z = z_1$,

3) *отношение импедансов* I_{k+1}/I_k *и границы разрыва* $\zeta = \zeta_k$ *параметров среды для всех* $k \leq k^*$, *удовлетворяющих условию* $\zeta_{k^*} < (T - \zeta_*)/2$,

4) *величины* c_{1k}, z_k *для всех* $k \leq k^*$, *если* $k^* \geq 2$,

5) *числа* c_{2k} *для всех* $k \leq n^*$, $2 \leq n^* \leq k^*$, *если целое число* n^* *таково, что выполняется неравенство* $\zeta_{n^*-1} - \zeta^* + \sum\limits_{k=1}^{n^*-1} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) c_{1k}/c_{2k} < T$.

Теорема 1.2 доказана в § 3. Она дает конструктивный алгоритм последовательного построения всех параметров, указанных в теореме. Из теоремы следует, что относительная плотность ρ_{k+1}/ρ_1 однозначно определяется для

$1 \le k \le k^*$. Таким образом, искомые параметры среды ρ_k, λ_k, μ_k определяются для всех $k \le k^*$ с точностью до задания плотности ρ_1 первого слоя.

§ 2. Построение специального решения

Строго говоря, специальное решение не является решением какой-либо задачи. Оно является лишь составной частью решения задачи (1.9)–(1.13), содержащей в себе ее особенности: сингулярную часть решения, а также разрывы решения и его производной по t при каждом фиксированном значении ζ. При этом в точках ζ_k, $k = 1, 2, \dots$, речь идет о предельных значениях при $\zeta = \zeta_k - 0$ и $\zeta = \zeta_k + 0$. Фактически соотношения (1.9)–(1.13) удовлетворяются при этом лишь частично, а для оставшейся части, а именно для функций $\overline{w}_1(\nu, \zeta, t)$, $\overline{w}_2(\nu, \zeta, t)$, возникает новая задача, вполне аналогичная задаче (1.9)–(1.13), но с данными, которые обеспечивают непрерывность ее решения вместе с первой производной по t для всех $\zeta \ne \zeta_*$. Перейдем к построению функций w_1^*, w_2^*.

Опишем вначале процедуру построения плоских волн, выходящих из источника. Это отвечает случаю, когда $s = 1$, и, следовательно, нижний индекс i равен 1 для волны, бегущей вправо от источника к границе $\zeta = \zeta_1$, и равен 0 для волны, бегущей в сторону границы $\zeta = \zeta_0$. Выпишем дифференциальные уравнения для определения α_i^j, β_i^j, γ_i^j, η_i^j, ω_i^j. Для этого достаточно подставить представления (1.15) в уравнения (1.9), (1.10) и приравнять коэффициенты при особенностях $\delta'\bigl(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\bigr)$, $\delta\bigl(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\bigr)$, $\theta_0\bigl(t + \chi_i^j \zeta - \tau_i^j\bigr)$. Уравнение (1.9) приводит к соотношениям

$$
\begin{gathered}
\bigl(\alpha_1^1\bigr)' = 0, \quad 2\bigl(\beta_1^1\bigr)' + \nu^2\bigl(c_{11}^2 - c_{21}^2\bigr)\frac{1}{c_{11}}\eta_1^1 + \nu^2 c_{21}^2 \alpha_1^1 = 0,\\
2\bigl(\gamma_1^1\bigr)' + \nu^2\bigl(c_{11}^2 - c_{21}^2\bigr)\frac{1}{c_{11}}\omega_1^1 + \nu^2 c_{21}^2 \beta_1^1 - \bigl(\beta_1^1\bigr)'' = 0,\\
\bigl(\alpha_0^1\bigr)' = 0, \quad 2\bigl(\beta_0^1\bigr)' + \nu^2\bigl(c_{11}^2 - c_{21}^2\bigr)\frac{1}{c_{11}}\eta_0^1 - \nu^2 c_{21}^2 \alpha_0^1 = 0,\\
2\bigl(\gamma_0^1\bigr)' + \nu^2\bigl(c_{11}^2 - c_{21}^2\bigr)\frac{1}{c_{11}}\omega_0^1 - \nu^2 c_{21}^2 \beta_0^1 + \bigl(\beta_0^1\bigr)'' = 0,\\
\alpha_1^2 = 0,\ \beta_1^2 = 0,\ \gamma_1^2 - \nu^2 c_{21}\eta_1^2 = 0, \quad \alpha_0^2 = 0,\ \beta_0^2 = 0,\ \gamma_0^2 + \nu^2 c_{21}\eta_0^2 = 0.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

В этих равенствах штрих означает дифференцирование по переменной ζ. Аналогично из уравнения (1.10) с учетом последних равенств находим, что

$$
\begin{gathered}
\bigl(\eta_1^2\bigr)' = 0, \quad 2\frac{c_{21}}{c_{11}}\bigl(\omega_1^2\bigr)' - \bigl(c_{11}^2 - c_{21}^2\bigr)\frac{1}{c_{21}}\gamma_1^2 + \nu^2 c_{11}^2 \eta_1^2 = 0,\\
\bigl(\eta_0^2\bigr)' = 0, \quad 2\frac{c_{21}}{c_{11}}\bigl(\omega_0^2\bigr)' - \bigl(c_{11}^2 - c_{21}^2\bigr)\frac{1}{c_{21}}\gamma_0^2 - \nu^2 c_{11}^2 \eta_0^2 = 0,\\
\eta_1^1 - c_{11}\alpha_1^1 = 0, \quad \omega_1^1 - c_{11}\beta_1^1 = 0, \quad \eta_0^1 + c_{11}\alpha_0^1 = 0, \quad \omega_0^1 + c_{11}\beta_0^1 = 0.
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

Условия (1.12) приводят к равенствам

$$
\begin{gathered}
\alpha_1^1 - \alpha_0^1 + \alpha_1^2 - \alpha_0^2 = -2a, \quad \bigl(\alpha_1^1 + \alpha_0^1\bigr) + \frac{c_{11}}{c_{21}}\bigl(\alpha_1^2 + \alpha_0^2\bigr) = 0,\\
\bigl(\beta_1^1 - \beta_0^1 + \beta_1^2 - \beta_0^2\bigr)(\nu, z_*) = -2f_0, \quad \bigl(\beta_1^1 + \beta_0^1\bigr)(\nu, z_*) + \frac{c_{11}}{c_{21}}\bigl(\beta_1^2 + \beta_0^2\bigr)(\nu, z_*) = 0,\\
\bigl(\gamma_1^1 - \gamma_0^1 + \gamma_1^2 - \gamma_0^2\bigr)(\nu, z_*) = -2f_1,
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

$$\big(\gamma_1^1+\gamma_0^1\big)(\nu,z_*)+\frac{c_{11}}{c_{21}}\big(\gamma_1^2+\gamma_0^2\big)(\nu,z_*)-\big(\beta_1^1+\beta_1^2-\beta_0^1-\beta_0^2\big)'(\nu,z_*)=0,$$
$$\eta_1^1-\eta_0^1+\eta_1^2-\eta_0^2=0,\quad \big(\eta_1^1+\eta_0^1\big)+\frac{c_{11}}{c_{21}}\big(\eta_1^2+\eta_0^2\big)=-2ac_{11},$$
$$\omega_1^1-\omega_0^1+\omega_1^2-\omega_0^2=0,\quad \big(\omega_1^1+\omega_0^1\big)(\nu,z_*)+\frac{c_{11}}{c_{21}}\big(\omega_1^2+\omega_0^2\big)(\nu,z_*)=-2f_0c_{11},$$

в которых $a=\bar a/\big(4\pi c_{11}^2\big)$, $f_0=\hat f(0)/\big(4\pi c_{11}^2\big)$, $f_1=\hat f'(0)/\big(4\pi c_{11}^2\big)$. Из соотношений (2.1)–(2.3) находим, что

$$\begin{gathered}
\alpha_0^1=-\alpha_1^1=a,\quad \alpha_1^2=\alpha_0^2=\beta_1^2=\beta_0^2=\gamma_1^2=\gamma_0^2=0,\\
\eta_0^1=\eta_1^1=-c_{11}a,\quad \eta_1^2=\eta_0^2=\omega_1^2=\omega_0^2=0,\\
\beta_1^1(\nu,z)=-f_0+\frac{\nu^2ac_{11}^2}{2}(\zeta-\zeta_*),\quad \omega_1^1(\nu,\zeta)=c_{11}\beta_1^1(\nu,\zeta),\\
\beta_0^1(\nu,\zeta)=f_0+\frac{\nu^2ac_{11}^2}{2}(\zeta-\zeta_*),\quad \omega_0^1(\nu,\zeta)=-c_{11}\beta_0^1(\nu,\zeta),\\
\gamma_1^1(\nu,\zeta)=-f_1+\frac{\nu^2c_{11}^2}{2}\left(f_0(\zeta-\zeta_*)-\frac{\nu^2ac_{11}^2}{4}(\zeta-\zeta_*)^2\right),\\
\gamma_0^1(\nu,\zeta)=f_1+\frac{\nu^2c_{11}^2}{2}\left(f_0(\zeta-\zeta_*)+\frac{\nu^2ac_{11}^2}{4}(\zeta-\zeta_*)^2\right).
\end{gathered}\tag{2.4}$$

Из полученных формул следует, что источник колебаний, отвечающий формуле (1.3), возбуждает в однородной среде чисто продольные плоские волны. Наличие границ приводит к появлению и поперечных волн.

Перейдем теперь к построению в формуле (1.15) слагаемых, отвечающих значению $s=2$. Выше (см. формулу (1.17)) мы уже привели соответствующую таблицу значений параметров χ_i^j и τ_i^j.

Уравнения для нахождения α_i^j, β_i^j, γ_i^j, η_i^j, ω_i^j для значений $i=(0,1)$ и $j=(1,1)\&(1,2)$ имеют вид

$$\begin{gathered}
\big(\alpha_i^j\big)'=0,\quad 2\big(\beta_i^j\big)'+\nu^2\big(c_{11}^2-c_{21}^2\big)\frac{1}{c_{11}}\eta_i^j+\nu^2c_{21}^2\alpha_i^j=0,\quad j=(1,1),\\
2\big(\gamma_i^j\big)'+\nu^2\big(c_{11}^2-c_{21}^2\big)\frac{1}{c_{11}}\omega_i^j+\nu^2c_{21}^2\beta_i^j-\big(\beta_i^j\big)''=0,\quad j=(1,1),\\
\alpha_i^j=0,\quad \beta_i^j=0,\quad \gamma_i^j-\nu^2c_{21}\eta_i^j=0,\quad j=(1,2),\\
\big(\eta_i^j\big)'=0,\quad 2\frac{c_{21}}{c_{11}}\big(\omega_i^j\big)'-\big(c_{11}^2-c_{21}^2\big)\frac{1}{c_{21}}\gamma_i^j+\nu^2c_{11}^2\eta_i^j=0,\quad j=(1,2),\\
\eta_i^j-c_{11}\alpha_i^j=0,\quad \omega_i^j-c_{11}\beta_i^j=0,\quad j=(1,1).
\end{gathered}\tag{2.5}$$

Эти уравнения можно переписать в эквивалентном виде

$$\begin{gathered}
\alpha_i^j=\mathrm{const},\quad 2\big(\beta_i^j\big)'+\nu^2c_{11}^2\alpha_i^j=0,\quad j=(1,1),\\
\eta_i^j=c_{11}\alpha_i^j,\quad \omega_i^j=c_{11}\beta_i^j,\quad 2\big(\gamma_i^j\big)'+\nu^2c_{11}^2\beta_i^j=0,\quad j=(1,1),\\
\alpha_i^j=0,\quad \beta_i^j=0,\quad \gamma_i^j=\nu^2c_{21}\eta_i^j,\quad j=(1,2),\\
\eta_i^j=\mathrm{const},\quad 2\big(\omega_i^j\big)'+\nu^2c_{11}c_{21}\eta_i^j=0,\quad j=(1,2),\ i=(0,1).
\end{gathered}\tag{2.6}$$

Граничные условия (1.11) приводят к равенствам

$$\frac{1}{c_{11}}\big(\alpha_0^1-\alpha_i^{11}\big)-\frac{1}{c_{21}}\alpha_i^{12}=0,\quad \frac{1}{c_{11}}\big(\beta_0^1-\beta_i^{11}\big)(\nu,0)-\frac{1}{c_{21}}\beta_i^{12}(\nu,0)=0,$$

$$c_{11}^2\left(\frac{1}{c_{11}}\big(\gamma_0^1-\gamma_i^{11}\big)(\nu,0)-\frac{1}{c_{21}}\gamma_i^{12}(\nu,0)+\frac{1}{c_{11}}\big(\beta_i^{11}+\beta_i^{12}+\beta_0^1\big)'(\nu,0)\right)$$
$$+\nu^2\big(c_{11}^2-2c_{21}^2\big)\big(\eta_0^1+\eta_i^{11}+\eta_i^{12}\big)=0, \quad (2.7)$$
$$\frac{1}{c_{11}}\big(\eta_0^1-\eta_i^{11}\big)-\frac{1}{c_{21}}\eta_i^{12}-\big(\alpha_0^1+\alpha_i^{11}+\alpha_i^{12}\big)=0,$$
$$\frac{1}{c_{11}}\big(\omega_0^1-\omega_i^{11}\big)(\nu,0)-\frac{1}{c_{21}}\omega_i^{12}(\nu,0)-\big(\beta_0^1+\beta_i^{11}+\beta_i^{12}\big)(\nu,0)=0,$$

в которых $i=(0,1)$ и для удобства записи в верхних индексах опущены скобки и запятая. Из равенств (2.6), (2.7) находим, что

$$\alpha_i^{11}=\alpha_0^1=a, \quad \alpha_i^{12}=\beta_i^{12}=0, \quad \eta_i^{11}=c_{11}a, \quad \eta_i^{12}=-4c_{21}a,$$
$$\beta_i^{11}(\nu,\zeta)=\beta_0^1(\nu,0)-\frac{\nu^2ac_{11}^2}{2}\zeta, \quad \omega_i^{11}(\nu,\zeta)=c_{11}\beta_i^{11}(\nu,\zeta),$$
$$\gamma_i^{11}(\nu,z)=\gamma_i^{11}(\nu,0)-\frac{\nu^2c_{11}^2}{2}\left(\beta_0^1(\nu,0)\zeta-\frac{\nu^2ac_{11}^2}{4}\zeta^2\right), \quad (2.8)$$
$$\gamma_i^{11}(\nu,0)=\gamma_0^1(\nu,0)+4\nu^2ac_{11}c_{21},$$
$$\gamma_i^{12}(\nu,\zeta)=-4\nu^2c_{21}^2a, \quad \omega_i^{12}(\nu,\zeta)=-4c_{21}\beta_0^1(\nu,0)+2\nu^2ac_{21}^2c_{11}\zeta, \quad i=(0,1).$$

При $\zeta=\zeta_1$ имеются 5 волн: падающая $i=1$, $j=1$, две отраженных $i=(1,0)$, $j=(1,1)\&(1,2)$ и две преломленных $i=(1,2)$, $j=(1,1)\&(1,2)$. Уравнения для нахождения α_i^j, β_i^j, γ_i^j, η_i^j, ω_i^j для $i=(1,2)$ и $j=(1,1)\&(1,2)$ таковы:

$$\big(\alpha_i^j\big)'=0, \quad 2\big(\beta_i^j\big)'+\nu\big(c_{12}^2-c_{22}^2\big)\frac{1}{c_{12}}\eta_i^j+\nu^2c_{22}^2\alpha_i^j=0, \quad j=(1,1),$$
$$2\big(\gamma_i^j\big)'+\nu\big(c_{12}^2-c_{22}^2\big)\frac{1}{c_{12}}\omega_i^j+\nu^2c_{22}^2\beta_i^j-\big(\beta_i^j\big)''=0, \quad j=(1,1),$$
$$\alpha_i^j=0, \quad \beta_i^j=0, \quad \gamma_i^j-\nu^2c_{22}\eta_i^j=0, \quad j=(1,2), \quad (2.9)$$
$$\big(\eta_i^j\big)'=0, \quad 2\frac{c_{22}}{c_{12}}\big(\omega_i^j\big)'-\nu^2\big(c_{12}^2-c_{22}^2\big)\frac{1}{c_{22}}\gamma_i^j+\nu^2c_{12}^2\eta_i^j=0, \quad j=(1,2),$$
$$\eta_i^j-c_{12}\alpha_i^j=0, \quad \omega_i^j-c_{12}\beta_i^j=0, \quad j=(1,1),\ i=(1,2).$$

Удобнее их переписать в виде

$$\alpha_i^j=\mathrm{const}, \quad \eta_i^j=c_{12}\alpha_i^j, \quad 2\big(\beta_i^j\big)'+\nu^2c_{12}^2\alpha_i^j=0, \quad j=(1,1),$$
$$\omega_i^j=c_{12}\beta_i^j, \quad 2\big(\gamma_i^j\big)'+\nu^2c_{12}^2\beta_i^j=0, \quad j=(1,1),$$
$$\alpha_i^j=\beta_i^j=0, \quad \gamma_i^j=\nu^2c_{22}\eta_i^j, \quad j=(1,2), \quad (2.10)$$
$$\eta_i^j=\mathrm{const}, \quad 2(\omega_i^j)'+\nu^2c_{12}c_{22}\eta_i^j=0, \quad j=(1,2).$$

Уравнения для нахождения α_i^j, β_i^j, γ_i^j, η_i^j, ω_i^j для $i=(1,0)$ и $j=(1,1)\&(1,2)$ имеют вид

$$\big(\alpha_i^j\big)'=0, \quad 2\big(\beta_i^j\big)'+\nu^2\big(c_{11}^2-c_{21}^2\big)\frac{1}{c_{11}}\eta_i^j-\nu^2c_{21}^2\alpha_i^j=0, \quad j=(1,1),$$
$$2\big(\gamma_i^j\big)'+\nu^2\big(c_{11}^2-c_{21}^2\big)\frac{1}{c_{11}}\omega_i^j-\nu^2c_{21}^2\beta_i^j+\big(\beta_i^j\big)''=0, \quad j=(1,1),$$
$$\alpha_i^j=\beta_i^j=0, \quad \gamma_i^j+\nu^2c_{21}\eta_i^j=0, \quad j=(1,2), \quad (2.11)$$
$$\big(\eta_i^j\big)'=0, \quad 2\frac{c_{21}}{c_{11}}\big(\omega_i^j\big)'-\big(c_{11}^2-c_{21}^2\big)\frac{1}{c_{21}}\gamma_i^j-\nu^2c_{11}^2\eta_i^j=0, \quad j=(1,2),$$
$$\eta_i^j+c_{11}\alpha_i^j=0, \quad \omega_i^j+c_{11}\beta_i^j=0, \quad j=(1,1),$$

или, в более компактной форме, —

$$\begin{gathered}\alpha_i^j = \text{const}, \quad \eta_i^j = -c_{11}\alpha_i^j, \quad 2\big(\beta_i^j\big)' - \nu^2 c_{11}^2 \alpha_i^j = 0, \quad j = (1,1),\\ \omega_i^j = -c_{11}\beta_i^j, \quad 2\big(\gamma_i^j\big)' - \nu^2 c_{11}^2 \beta_i^j = 0, \quad j = (1,1),\\ \alpha_i^j = \beta_i^j = 0, \quad \gamma_i^j = -\nu^2 c_{21}\eta_i^j, \quad j = (1,2),\\ \eta_i^j = \text{const}, \quad 2\big(\omega_i^j\big)' - \nu^2 c_{11}c_{21}\eta_i^j = 0, \quad j = (1,2).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Условия непрерывности смещений приводят к равенствам

$$\begin{gathered}\alpha_1^1 + \alpha_{10}^{11} + \alpha_{10}^{12} - \alpha_{12}^{11} - \alpha_{12}^{12} = 0,\\ \beta_1^1 + \beta_{10}^{11} + \beta_{10}^{12} - \beta_{12}^{11} - \beta_{12}^{12} = 0, \quad \zeta = \zeta_1,\\ \gamma_1^1 + \gamma_{10}^{11} + \gamma_{10}^{12} - \gamma_{12}^{11} - \gamma_{12}^{12} = 0, \quad \zeta = \zeta_1,\\ \eta_1^1 + \eta_{10}^{11} + \eta_{10}^{12} - \eta_{12}^{11} - \eta_{12}^{12} = 0,\\ \omega_1^1 + \omega_{10}^{11} + \omega_{10}^{12} - \omega_{12}^{11} - \omega_{12}^{12} = 0, \quad \zeta = \zeta_1.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Условия непрерывности напряжений при $\zeta = \zeta_1$ имеют вид

$$\begin{gathered}\rho_1\left(c_{11}(\alpha_{10}^{11} - \alpha_1^1) + \frac{c_{11}^2}{c_{21}}\alpha_{10}^{12}\right) + \rho_2\left(c_{12}\alpha_{12}^{11} + \frac{c_{12}^2}{c_{22}}\alpha_{12}^{12}\right) = 0,\\ \rho_1\left(c_{11}(\beta_{10}^{11} - \beta_1^1) + \frac{c_{11}^2}{c_{21}}\beta_{10}^{12}\right) + \rho_2\left(c_{12}\beta_{12}^{11} + \frac{c_{12}^2}{c_{22}}\beta_{12}^{12}\right) = 0,\\ \rho_1\left(c_{11}\big(\gamma_{10}^{11} - \gamma_1^1\big) + \frac{c_{11}^2}{c_{21}}\gamma_{10}^{12} + c_{11}\big(\beta_1^1 + \beta_{10}^{11} + \beta_{10}^{12}\big)' + \nu^2\big(c_{11}^2 - 2c_{21}^2\big)\big(\eta_1^1 + \eta_{10}^{11} + \eta_{10}^{12}\big)\right)\\ +\rho_2\left(c_{12}\gamma_{12}^{11} + \frac{c_{12}^2}{c_{22}}\gamma_{12}^{12} - c_{12}\big(\beta_{12}^{11} + \beta_{12}^{12}\big)' - \nu^2\big(c_{12}^2 - 2c_{22}^2\big)\big(\eta_{12}^{11} + \eta_{12}^{12}\big)\right) = 0,\\ \rho_1\left(c_{21}\eta_{10}^{12} + \frac{c_{21}^2}{c_{11}}\big(\eta_{10}^{11} - \eta_1^1\big) - c_{21}^2\big(\alpha_1^1 + \alpha_{10}^{11} + \alpha_{10}^{12}\big)\right)\\ +\rho_2\left(c_{22}\eta_{12}^{12} + \frac{c_{22}^2}{c_{12}}\eta_{12}^{11} + c_{22}^2\big(\alpha_{12}^{11} + \alpha_{12}^{12}\big)\right) = 0,\\ \rho_1\left(c_{21}\omega_{10}^{12} + \frac{c_{21}^2}{c_{11}}\big(\omega_{10}^{11} - \omega_1^1\big) - c_{21}^2\big(\beta_1^1 + \beta_{10}^{11} + \beta_{10}^{12}\big)\right)\\ +\rho_2\left(c_{22}\omega_{12}^{12} + \frac{c_{22}^2}{c_{12}}\omega_{12}^{11} + c_{22}^2\big(\beta_{12}^{11} + \beta_{12}^{12}\big)\right) = 0.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Из равенств (2.10)–(2.14) находим, что

$$\alpha_{10}^{11} = \alpha_1^1 r_{1,2}^{(1)}, \quad \alpha_{12}^{11} = \alpha_1^1\big(1 + r_{1,2}^{(1)}\big), \quad \alpha_{10}^{12} = \beta_{10}^{12} = \alpha_{12}^{12} = \beta_{12}^{12} = 0,$$

$$\beta_{10}^{11}(\nu,\zeta) = r_{1,2}^{(1)}\left(\beta_1^1(\nu,\zeta_1) + \frac{\nu^2 c_{11}^2}{2}\alpha_1^1(\zeta - \zeta_1)\right),$$

$$\beta_{12}^{11}(\nu,\zeta) = \big(1 + r_{1,2}^{(1)}\big)\left(\beta_1^1(\nu,\zeta_1) - \frac{\nu^2 c_{12}^2}{2}\alpha_1^1(\zeta - \zeta_1)\right),$$

$$\eta_{10}^{11} = -\alpha_1^1 c_{11} r_{1,2}^{(1)}, \quad \eta_{12}^{11} = \alpha_1^1 c_{12}\big(1 + r_{1,2}^{(1)}\big),$$

$$\omega_{10}^{11}(\nu,\zeta) = -c_{11}\beta_{10}^{11}(\nu,\zeta), \quad \omega_{12}^{11}(\nu,\zeta) = c_{12}\beta_{12}^{11}(\nu,\zeta),$$

$$\eta_{10}^{12} = -\frac{\alpha_1^1\big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)}{\rho_1 c_{21}+\rho_2 c_{22}}\left[2\big(\rho_2 c_{22}^2-\rho_1 c_{21}^2\big)-c_{12}c_{22}\rho_2\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right],$$

$$\eta_{12}^{12} = -\frac{\alpha_1^1\big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)}{\rho_1 c_{21}+\rho_2 c_{22}}\left[2\big(\rho_2 c_{22}^2-\rho_1 c_{21}^2\big)+c_{12}c_{21}\rho_1\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right], \tag{2.15}$$

$$\omega_{10}^{12}(\nu,\zeta) = \frac{\eta_{10}^{12}}{\alpha_1^1}\left(\beta_1^1(\nu,\zeta_1)+\frac{\nu^2 c_{21}c_{11}}{2}\alpha_1^1(\zeta-\zeta_1)\right), \quad \gamma_{10}^{12}(\nu,\zeta) = -\nu^2 c_{21}\eta_{10}^{12},$$

$$\omega_{12}^{12}(\nu,\zeta) = \frac{\eta_{12}^{12}}{\alpha_1^1}\left(\beta_1^1(\nu,\zeta_1)-\frac{\nu^2 c_{22}c_{12}}{2}\alpha_1^1(\zeta-\zeta_1)\right), \quad \gamma_{12}^{12}(\nu,\zeta) = \nu^2 c_{22}\eta_{12}^{12},$$

$$\gamma_{10}^{11}(\nu,\zeta) = \gamma_{10}^{11}(\nu,\zeta_1)+\frac{\nu^2 c_{11}^2 r_{1,2}^{(1)}}{2}\left(\beta_1^1(\nu,\zeta_1)(\zeta-\zeta_1)+\frac{\nu^2 c_{11}^2}{4}\alpha_1^1(\zeta-\zeta_1)^2\right),$$

$$\gamma_{12}^{11}(\nu,\zeta) = \gamma_{12}^{11}(\nu,\zeta_1)-\frac{\nu^2 c_{12}^2\big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)}{2}\left(\beta_1^1(\nu,\zeta_1)(\zeta-\zeta_1)-\frac{\nu^2 c_{12}^2}{4}\alpha_1^1(\zeta-\zeta_1)^2\right),$$

$$\gamma_{10}^{11}(\nu,\zeta_1) = r_{1,2}^{(1)}\gamma_1^1(\nu,\zeta_1)+\frac{\nu^2}{\rho_1 c_{11}+\rho_2 c_{12}}\Big\{\eta_{10}^{12}\big[2\big(\rho_1 c_{21}^2-\rho_2 c_{22}^2\big)+\rho_2 c_{12}(c_{21}+c_{22})\big]$$
$$-\alpha_1^1 c_{12}\rho_2\big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)\left[c_{12}c_{22}\left(1-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)+\frac{1}{2}\big(c_{11}^2-c_{12}^2\big)-2\left(c_{21}^2-c_{22}^2\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]\Big\},$$

$$\gamma_{12}^{11}(\nu,\zeta_1) = \big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)\gamma_1^1(\nu,\zeta_1)+\frac{\nu^2}{\rho_1 c_{11}+\rho_2 c_{12}}\Big\{\eta_{10}^{12}\big[2\big(\rho_1 c_{21}^2-\rho_2 c_{22}^2\big)-\rho_1 c_{11}(c_{21}+c_{22})\big]$$
$$-\alpha_1^1 c_{12}\big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)\left[\rho_1 c_{11}c_{22}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)+\frac{1}{2}\rho_2\big(c_{11}^2-c_{12}^2\big)-2\rho_2\left(c_{21}^2-c_{22}^2\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]\Big\}.$$

В этих формулах $\alpha_1^1 = -a$, а число $r_{1,2}^{(1)}$ вычисляется по формуле

$$r_{1,2}^{(1)} = \frac{\rho_1 c_{11}-\rho_2 c_{12}}{\rho_1 c_{11}+\rho_2 c_{12}} = \frac{I_1-I_2}{I_1+I_2}, \quad r_{1,2}^{(1)} \in (-1,1). \tag{2.16}$$

Формулы (2.15) описывают распад плоской волны, отвечающей индексам $i=1$ и $j=1$, на границе $\zeta=\zeta_1$ разрыва импеданса $I(\zeta)$. Число $r_{1,2}^{(1)}$ называется *коэффициентом отражения* соответствующей плоской волны, а $\big(1+r_{1,2}^{(1)}\big)$ — *коэффициентом прохождения* волны. Очевидно, что $r_{1,2}^{(1)} \neq 0$ при $I_1 \neq I_2$. Заметим, что коэффициент $r_{1,2}^{(1)}$ зависит только от отношения импедансов I_2/I_1.

Выпишем теперь формулы распада произвольной плоской волны на границе $\zeta=\zeta_{i_s}$. Рассмотрим вначале случай, когда $i_{s-1} < i_s$ и $j_s = 1$. Обозначим для удобства записи $i_s = k$. В этом случае продольная волна, характеризуемая индексами i и j, проходит k-й слой $\zeta_{k-1} < \zeta < \zeta_k$ и распадается на две отраженные и две преломленные волны с индексами (i, i_{s+1}), (j, j_{s+1}), причем для отраженных волн $i_{s+1} = i_{s-1}$, а для преломленных — $i_{s+1} = i_s + 1$, индекс j_{s+1} равен 1 для продольных и 2 для поперечных волн. При этом параметр $\tau_{i,i_{s+1}}^{j,j_{s+1}}$, отвечающий этим волнам, определяется равенствами

$$\tau_{i,i_s+1}^{j,1} = \tau_i^j, \quad \tau_{i,i_s+1}^{j,2} = \tau_i^j + \left(1-\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}}\right)\zeta_k,$$

$$\tau_{i,i_{s-1}}^{j,1} = \tau_i^j + 2\zeta_k, \quad \tau_{i,i_{s-1}}^{j,2} = \tau_i^j + \left(1+\frac{c_{1k}}{c_{2k}}\right)\zeta_k.$$

Формулы для вычисления коэффициентов отраженных и преломленных волн вполне идентичны формулам (2.15) (при этом следует в них заменить α_1^1 на α_i^j и произвести естественную перенумерацию нижних и верхних индексов):

$$\alpha^{j,1}_{i,i_{s-1}} = \alpha^j_i r^{(1)}_{k,k+1}, \quad \alpha^{j,1}_{i,i_s+1} = \alpha^j_i \bigl(1 + r^{(1)}_{k,k+1}\bigr),$$

$$\alpha^{j,2}_{i,i_{s-1}} = \beta^{j,2}_{i,i_{s-1}} = \alpha^{j,2}_{i,i_s+1} = \beta^{j,2}_{i,i_s+1} = 0,$$

$$\beta^{j,1}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta) = r^{(1)}_{k,k+1}\left(\beta^j_i(\nu,\zeta_k) + \frac{\nu^2 c^2_{1k}}{2}\alpha^j_i(\zeta-\zeta_k)\right),$$

$$\beta^{j,1}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta) = \bigl(1 + r^1_{k,k+1}\bigr)\left(\beta^j_i(\nu,\zeta_k) - \frac{\nu^2 c^2_{1(k+1)}}{2}\alpha^j_i(\zeta-\zeta_k)\right),$$

$$\eta^{j,1}_{i,i_{s-1}} = -\alpha^j_i c_{1k} r^{(1)}_{k,k+1}, \quad \eta^{j,1}_{i,i_s+1} = \alpha^j_i c_{1(k+1)}\bigl(1 + r^{(1)}_{k,k+1}\bigr),$$

$$\omega^{j,1}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta) = -c_{1k}\beta^{11}_{10}(\nu,\zeta), \quad \omega^{j,1}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta) = c_{1(k+1)}\beta^{11}_{12}(\nu,\zeta),$$

$$\eta^{j,2}_{i,i_{s-1}} = -\frac{\alpha^j_i(1 + r^{(1)}_{k,k+1})}{\rho_k c_{2k} + \rho_{k+1}c_{2(k+1)}}\Bigl[2\bigl(\rho_{k+1}c^2_{2(k+1)} - \rho_k c^2_{2k}\bigr) - c_{1(k+1)}c_{2(k+1)}\rho_{k+1}\left(1 - \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)\Bigr],$$

$$\eta^{j,2}_{i,i_s+1} = -\frac{\alpha^j_i\bigl(1 + r^{(1)}_{k,k+1}\bigr)}{\rho_k c_{2k} + \rho_{k+1}c_{2(k+1)}}\left[2\bigl(\rho_{k+1}c^2_{2(k+1)} - \rho_k c^2_{2k}\bigr) + c_{1(k+1)}c_{2k}\rho_k\left(1 - \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)\right],$$

$$\omega^{j,2}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta) = -\frac{\eta^{j,2}_{i,i_{s-1}}}{\alpha^j_i}\left(\beta^j_i(\nu,\zeta_k) + \frac{\nu^2 c_{2k}c_{1k}}{2}\alpha^j_i(\zeta-\zeta_k)\right),$$

$$\gamma^{j,2}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta) = -\nu^2 c_{2k}\eta^{j,2}_{i,i_{s-1}},$$

$$\omega^{j,2}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta) = \frac{\eta^{j,2}_{i,i_s+1}}{\alpha^j_i}\left(\beta^j_i(\nu,\zeta_k) - \frac{\nu^2 c_{2(k+1)}c_{1(k+1)}}{2}\alpha^j_i(\zeta-\zeta_k)\right),$$

$$\gamma^{j,2}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta) = \nu^2 c_{2(k+1)}\eta^{j,2}_{i,i_s+1},$$

$$\gamma^{j,1}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta) = \gamma^{11}_{10}(\nu,\zeta_k) + \frac{\nu^2 c^2_{1k} r^{(1)}_{k,k+1}}{2}\left(\beta^j_i(\nu,\zeta_k)(\zeta-\zeta_k) + \frac{\nu^2 c^2_{1k}}{4}\alpha^j_i(\zeta-\zeta_k)^2\right),$$

$$\gamma^{j,1}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta) = \gamma^{11}_{12}(\nu,\zeta_k) - \frac{\nu^2 c^2_{1(k+1)}\bigl(1 + r^{(1)}_{k,k+1}\bigr)}{2} \times\left(\beta^j_i(\nu,\zeta_k)(\zeta-\zeta_k) - \frac{\nu^2 c^2_{1(k+1)}}{4}\alpha^j_i(\zeta-\zeta_k)^2\right), \quad (2.17)$$

$$\gamma^{j,1}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta_k) = r^{(1)}_{k,k+1}\gamma^j_i(\nu,\zeta_k) + \frac{\nu^2}{\rho_k c_{1k} + \rho_{k+1}c_{1(k+1)}}\Bigl\{\eta^{j,2}_{i,i_{s-1}}\bigl[2\bigl(\rho_k c^2_{2k} - \rho_{k+1}c^2_{2(k+1)}\bigr) + \rho_{k+1}c_{1(k+1)}\bigl(c_{2k} + c_{2(k+1)}\bigr)\bigr] - \alpha^j_i c_{1(k+1)}\rho_{k+1}\bigl(1 + r^{(1)}_{k,k+1}\bigr) \times\left[c_{1(k+1)}c_{2(k+1)}\left(1 - \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right) + \frac{1}{2}\bigl(c^2_{1k} - c^2_{1(k+1)}\bigr) - 2\left(c^2_{2k} - c^2_{2(k+1)}\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)\right]\Bigr\},$$

$$\gamma^{j,1}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta_k)=\big(1+r^{(1)}_{k,k+1}\big)\gamma^j_i(\nu,\zeta_k)+\frac{\nu^2}{\rho_k c_{1k}+\rho_{k+1}c_{1(k+1)}}$$
$$\times\bigg\{\eta^{j,2}_{i,i_{s-1}}\big[2\big(\rho_k c^2_{2k}-\rho_{k+1}c^2_{2(k+1)}\big)-\rho_k c_{1k}(c_{2k}+c_{2(k+1)})\big]-\alpha^j_i c_{1(k+1)}\big(1+r^{(1)}_{k,k+1}\big)$$
$$\times\bigg[\rho_k c_{1k}c_{2(k+1)}\bigg(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}-1\bigg)+\frac12\rho_{k+1}(c^2_{1k}-c^2_{1(k+1)})-2\rho_{k+1}\bigg(c^2_{2k}-c^2_{2(k+1)}\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\bigg)\bigg]\bigg\}.$$

В этих формулах число $r^{(1)}_{k,k+1}$ вычисляется по формуле

$$r^{(1)}_{k,k+1}=\frac{\rho_k c_{1k}-\rho_{k+1}c_{1(k+1)}}{\rho_k c_{1k}+\rho_{k+1}c_{1(k+1)}}=\frac{I_k-I_{k+1}}{I_k+I_{k+1}},\quad r^{(1)}_{k,k+1}\in(-1,1). \tag{2.18}$$

Аналогично обстоит дело в случае, когда $i_{s-1}>i_s\ge 1$ и $j_s=1$. Положим, как и ранее, $i_s=k$. В этом случае продольная волна с индексами i и j падает на границу $\zeta=\zeta_k$ из $(k+1)$-го слоя и также распадается на две отраженные и две преломленные волны с индексами (i,i_{s+1}), (j,j_{s+1}), причем для отраженных волн по-прежнему $i_{s+1}=i_{s-1}$, а для преломленных — $i_{s+1}=i_s-1$, индекс j_{s+1} сохраняет свой смысл. При этом параметр $\tau^{j,j_{s+1}}_{i,i_{s+1}}$ определяется равенствами

$$\begin{gathered}\tau^{j,1}_{i,i_s-1}=\tau^j_i,\quad \tau^{j,2}_{i,i_s-1}=\tau^j_i-\bigg(1-\frac{c_{1k}}{c_{2k}}\bigg)\zeta_k,\\ \tau^{j,1}_{i,i_{s-1}}=\tau^j_i-2\zeta_k,\quad \tau^{j,2}_{i,i_{s-1}}=\tau^j_i-\bigg(1+\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}}\bigg)\zeta_k.\end{gathered} \tag{2.19}$$

Формулы для вычисления коэффициентов получаются из формул (2.17), если в них заменить i_s+1 на i_s-1 и поменять местами индексы k и $k+1$. При этом возникает новый коэффициент $r^{(1)}_{k+1,k}$ отражения продольной волны от границы $\zeta=\zeta_k$ в $(k+1)$-й слой. Этот коэффициент вычисляется по формуле $r^{(1)}_{k+1,k}=(I_{k+1}-I_k)/(I_k+I_{k+1})=-r^{(1)}_{k,k+1}$.

В случае, когда $i_{s-1}=1$ и $i_s=0$, мы имеем дело с отражением волны от границы $\zeta=0$. При этом порождаются две отраженные волны (продольная и поперечная) с нижним мультииндексом, равным $(i,1)$. В этом случае $\tau^{j,1}_{i,1}=\tau^{j,2}_{i,1}=\tau^j_i$. Если $j_s=1$, то для вычисления амплитудных коэффициентов можно воспользоваться формулами (2.8), положив в них $a=\alpha^j_i$, $\beta^1_0(\nu,0)=\beta^j_i(\nu,0)$, $\gamma^1_0(\nu,0)=\gamma^j_i(\nu,0)$. Тогда эти формулы принимают вид

$$\begin{gathered}\alpha^{j,1}_{i,1}=\alpha^j_i,\quad \alpha^{j,2}_{i,1}=\beta^{12}_{i,1}=0,\quad \eta^{j,1}_{i,1}=c_{11}\alpha^j_i,\quad \eta^{j,2}_{i,1}=-4c_{21}\alpha^j_i,\\ \beta^{j,1}_{i,1}(\nu,\zeta)=\beta^j_i(\nu,0)-\frac{\nu^2\alpha^j_i c^2_{11}}{2}\zeta,\quad \omega^{j,1}_{i,1}(\nu,\zeta)=c_{11}\beta^{j,1}_{i,1}(\nu,\zeta),\\ \gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,\zeta)=\gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,0)-\frac{\nu^2c^2_{11}}{2}\bigg(\beta^j_i(\nu,0)\zeta-\frac{\nu^2\alpha^j_i c^2_{11}}{4}\zeta^2\bigg),\\ \gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,0)=\gamma^j_i(\nu,0)+4\nu^2\alpha^j_i c_{11}c_{21},\\ \gamma^{j,2}_{i,1}(\nu,\zeta)=-4\nu^2c^2_{21}\alpha^j_i,\quad \omega^{j,2}_{i,1}(\nu,\zeta)=-4c_{21}\beta^j_i(\nu,0)+2\nu^2\alpha^j_i c^2_{21}c_{11}\zeta.\end{gathered} \tag{2.20}$$

Нам остается выписать формулы для распада поперечных волн. Подобные формулы до этого в тексте не встречались, так как мы рассматривали формулы, связанные с отражением и преломлением только продольных волн, инициируемых источником. Полученные выше формулы (2.8), (2.15), (2.17), (2.20) показывают, что при падении продольных волн на границы $\zeta = \zeta_k$ возникают и поперечные волны. Отметим характерную особенность, проявляющуюся в отмеченных формулах: для возникающих поперечных волн равны нулю амплитудные коэффициенты α_i^j, β_i^j. Это приводит к тому, что при падении поперечных волн подобные коэффициенты равны нулю также для всех отраженных и преломленных волн (в силу однородности соответствующих условий непрерывности смещений и напряжений). Таким образом, $\alpha_i^j = \beta_i^j = 0$, если хотя бы одна компонента индекса j равна 2. Для остальных коэффициентов γ_i^j, α_i^j, β_i^j, ω_i^j необходимо выписать соответствующие им формулы.

Рассмотрим вначале случай, когда $i_{s-1} < i_s$ и $j_s = 2$. Пусть $i_s = k$. Поперечная волна на границе k-го и $(k+1)$-го слоев распадается на две отраженные и две преломленные волны с индексами (i, i_{s+1}), (j, j_{s+1}), причем для отраженных волн $i_{s+1} = i_{s-1}$, а для преломленные $i_{s+1} = i_s + 1$, индекс j_{s+1} равен 1 для продольных и 2 для поперечных волн. Параметр $\tau_{i,i_{s+1}}^{j,j_{s+1}}$, отвечающий этим волнам, определяется равенствами

$$\tau_{i,i_s+1}^{j,1} = \tau_i^j - \left(1 - \frac{c_{1k)}}{c_{2k}}\right)\zeta_k, \quad \tau_{i,i_s+1}^{j,2} = \tau_i^j - \left(\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}} - \frac{c_{1k}}{c_{2k}}\right)\zeta_k,$$
$$\tau_{i,i_{s-1}}^{j,1} = \tau_i^j + \left(1 + \frac{c_{1k}}{c_{2k}}\right)\zeta_k, \quad \tau_{i,i_{s-1}}^{j,2} = \tau_i^j + 2\frac{c_{1k}}{c_{2k}}\zeta_k.$$

Уравнения для вычисления коэффициентов γ, η, ω, отвечающих отраженным и преломленным волнам, вполне аналогичны соотношениям (2.10), (2.12). С учетом сказанного выше об обращении в нуль коэффициентов α_i^j и β_i^j эти уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}
\eta_{i,i_{s+1}}^{j,1} = \omega_{i,i_s+1}^{j,1} = 0, \quad \big(\gamma_{i,i_s+1}^{j,1}\big)' = 0, \quad \gamma_{i,i_s+1}^{j,2} = \nu^2 c_{2(k+1)}\eta_{i,i_s+1}^{j,2}, \\
\eta_{i,i_s+1}^{j,2} = \text{const}, \quad 2\big(\omega_{i,i_s+1}^{j,2}\big)' + \nu^2 c_{1(k+1)}c_{2(k+1)}\eta_{i,i_s+1}^{j,2} = 0, \\
\eta_{i,i_{s-1}}^{j,1} = \omega_{i,i_{s-1}}^{j,1} = 0, \quad \big(\gamma_{i,i_{s-1}}^{j,1}\big)' = 0, \quad \gamma_{i,i_{s-1}}^{j,2} = -\nu^2 c_{2k}\eta_{i,i_{s-1}}^{j,2}, \\
\eta_{i,i_{s-1}}^{j,2} = \text{const}, \quad 2\big(\omega_{i,i_{s-1}}^{j,2}\big)' - \nu^2 c_{1k}c_{2k}\eta_{i,i_{s-1}}^{j,2} = 0.
\end{gathered} \tag{2.21}$$

Для отыскания постоянных $\eta_{i,i_s+1}^{j,2}$, $\eta_{i,i_{s-1}}^{j,2}$ и значений $\gamma_{i,i_s+1}^{j,1}(\nu,\zeta_k)$, $\gamma_{i,i_{s-1}}^{j,1}(\nu,\zeta_k)$, $\omega_{i,i_s+1}^{j,2}(\nu,\zeta_k)$, $\omega_{i,i_{s-1}}^{j,2}(\nu,\zeta_k)$ следует воспользоваться условиями непрерывности смещений и напряжений при $\zeta = \zeta_k$. Условия непрерывности смещений приводят к равенствам

$$\begin{gathered}
\gamma_i^j + \gamma_{i,i_{s-1}}^{j,1} + \gamma_{i,i_{s-1}}^{j,2} - \gamma_{i,i_s+1}^{j,1} - \gamma_{i,i_s+1}^{j,2} = 0, \quad \zeta = \zeta_k, \\
\eta_i^j + \eta_{i,i_{s-1}}^{j,1} + \eta_{i,i_{s-1}}^{j,2} - \eta_{i,i_s+1}^{j,1} - \eta_{i,i_s+1}^{j,2} = 0, \\
\omega_i^j + \omega_{i,i_{s-1}}^{j,1} + \omega_{i,i_{s-1}}^{j,2} - \omega_{i,i_s+1}^{j,1} - \omega_{i,i_s+1}^{j,2} = 0, \quad \zeta = \zeta_k.
\end{gathered} \tag{2.22}$$

Условия непрерывности напряжений при $\zeta = \zeta_k$ имеют вид

$$\begin{gathered}
\rho_k\left(c_{1k}\gamma_{i,i_{s-1}}^{j,1} + \frac{c_{1k}^2}{c_{2k}}\big(\gamma_{i,i_{s-1}}^{j,2} - \gamma_i^j\big) + \nu^2\big(c_{1k}^2 - 2c_{2k}^2\big)\big(\eta_i^j + \eta_{i,i_{s-1}}^{j,1} + \eta_{i,i_{s-1}}^{j,2}\big)\right) \\
+\rho_{k+1}\left(c_{1(k+1)}\gamma_{i,i_s+1}^{j,1} + \frac{c_{1(k+1)}^2}{c_{2(k+1)}}\gamma_{i,i_s+1}^{j,2} - \nu^2\big(c_{1(k+1)}^2 - 2c_{2(k+1)}^2\big)\big(\eta_{i,i_s+1}^{j,1} + \eta_{i,i_s+1}^{j,2}\big)\right) = 0,
\end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\rho_k\left(c_{2k}\big(\eta_{i,i_{s-1}}^{j,2} - \eta_i^j\big) + \frac{c_{2k}^2}{c_{1k}}\eta_{i,i_{s-1}}^{j,1}\right) + \rho_{k+1}\left(c_{2(k+1)}\eta_{i,i_s+1}^{j,2} + \frac{c_{22}^2}{c_{1(k+1)}}\eta_{i,i_s+1}^{j,1}\right) = 0,$$

$$\rho_k\biggl(c_{2k}\bigl(\omega^{j,2}_{i,i_{s-1}}-\omega^j_i\bigr)+\frac{c^2_{2k}}{c_{1k}}\omega^{j,1}_{i,i_{s-1}}\biggr)+\rho_{k+1}\biggl(c_{2(k+1)}\omega^{j,2}_{i,i_s+1}+\frac{c^2_{2(k+1)}}{c_{1(k+1)}}\omega^{j,1}_{i,i_s+1}\biggr)=0.$$

Из соотношений (2.21)–(2.23) следуют равенства

$$\eta^{j,1}_{i,i_{s+1}}=\omega^{j,1}_{i,i_s+1}=0,\quad \eta^{j,1}_{i,i_{s-1}}=\omega^{j,1}_{i,i_{s-1}}=0,\quad \eta^{j,2}_{i,i_{s-1}}=r^{(2)}_{k,k+1}\eta^j_i,$$

$$\eta^{j,2}_{i,i_s+1}=\bigl(1+r^{(2)}_{k,k+1}\bigr)\eta^j_i,\quad r^{(2)}_{k,k+1}=\frac{\rho_kc_{2k}-\rho_{k+1}c_{2(k+1)}}{\rho_kc_{2k}+\rho_{k+1}c_{2(k+1)}}\in(-1,1),$$

$$\omega^{j,2}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta)=r^{(2)}_{k,k+1}\biggl(\omega^j_i(\nu,\zeta_k)+\frac{\nu^2c_{1k}c_{2k}}{2}\eta^j_i(\zeta-\zeta_k)\biggr),$$

$$\omega^{j,2}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta)=\bigl(1+r^{(2)}_{k,k+1}\bigr)\biggl(\omega^j_i(\nu,\zeta_k)-\frac{\nu^2c_{1(k+1)}c_{2(k+1)}}{2}\eta^j_i(\zeta-\zeta_k)\biggr),\tag{2.24}$$

$$\gamma^{j,2}_{i,i_{s-1}}(\nu,\zeta)=\frac{\rho_kc^2_{1k}-\rho_{k+1}c_{1(k+1)}c_{2k}}{c_{2k}\bigl(\rho_kc_{1k}-\rho_{k+1}c_{1(k+1)}\bigr)}\gamma^j_i(\nu,\zeta_k)+\nu^2\eta^j_i\Bigl\{\bigl(1+r^{(2)}_{k,k+1}\bigr)\bigl[2\bigl(\rho_kc^2_{2k}-\rho_{k+1}c^2_{2(k+1)}\bigr)+\rho_{k+1}c_{1(k+1)}c_{2(k+1)}\bigr]+r^{(2)}_{k,k+1}\bigl(\rho_{k+1}c_{1(k+1)}c_{2k}-\rho_kc^2_{1k}\bigr)\Bigr\},$$

$$\gamma^{j,2}_{i,i_s+1}(\nu,\zeta)=\frac{\rho_kc_{1k}(c_{1k}+c_{2k})}{c_{2k}\bigl(\rho_kc_{1k}-\rho_{k+1}c_{1(k+1)}\bigr)}\gamma^j_i(\nu,\zeta_k)+\nu^2\eta^j_i\Bigl\{\bigl(1+r^{(2)}_{k,k+1}\bigr)\bigl[2\bigl(\rho_kc^2_{2k}-\rho_{k+1}c^2_{2(k+1)}\bigr)+\rho_kc_{1k}c_{2(k+1)}\bigr]-r^{(2)}_{k,k+1}\rho_kc_{1k}(c_{2k}+c_{1k})\Bigr\}.$$

В случае, когда $i_{s-1}>i_s\ge1$ и $j_s=2$, ситуация полностью аналогична разобранному выше случаю для падения продольной волны ($j_s=1$). Пусть, как и ранее, $i_s=k$. Поперечная волна с индексами i и j, падающая на границу $\zeta=\zeta_k$ из $(k+1)$-го слоя, распадается на две отраженные и две преломленные волны с нижними индексами (i,i_{s+1}), (j,j_{s+1}), причем для отраженных волн $i_{s+1}=i_{s-1}$, а для преломленных $i_{s+1}=i_s-1$. При этом параметр $\tau^{j,j_{s+1}}_{i,i_{s+1}}$ определяется равенствами

$$\tau^{j,1}_{i,i_s-1}=\tau^j_i+\biggl(1-\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}}\biggr)\zeta_k,\quad \tau^{j,2}_{i,i_s-1}=\tau^j_i+\biggl(\frac{c_{1k}}{c_{2k}}-\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}}\biggr)\zeta_k,$$

$$\tau^{j,1}_{i,i_{s-1}}=\tau^j_i-\biggl(1+\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}}\biggr)\zeta_k,\quad \tau^{j,2}_{i,i_{s-1}}=\tau^j_i-2\frac{c_{1(k+1)}}{c_{2(k+1)}}\zeta_k.$$

Формулы для вычисления коэффициентов получаются из формул (2.24), если в них заменить i_s+1 на i_s-1 и поменять местами индексы k и $k+1$. При этом $r^{(2)}_{k+1,k}=-r^{(2)}_{k,k+1}$.

В случае, когда $i_{s-1}=1$ и $i_s=0$, $j_s=2$, мы имеем дело с отражением поперечной волны от границы $\zeta=0$. Возникают две отраженные волны (продольная и поперечная) с нижним мультииндексом, равным $(i_s,1)$. При этом $\tau^{j,1}_{i,1}=\tau^{j,2}_{i,1}=\tau^j_i$. Так как по-прежнему $\alpha^j_i=\beta^j_i=0$, то $\alpha^{j,1}_{i,1}=\alpha^{j,2}_{i,1}=\beta^{j,1}_{i,1}=\beta^{j,2}_{i,1}=0$. Для вычисления коэффициентов $\gamma^{j,1}_{i,1}$, $\gamma^{j,2}_{i,1}$, $\eta^{j,1}_{i,1}$, $\eta^{j,2}_{i,1}$, $\omega^{j,1}_{i,1}$, $\omega^{j,2}_{i,1}$ следует использовать соотношения, аналогичные (2.6):

$$\begin{gathered}\eta^{j,1}_{i,1}=\omega^{j,1}_{i,1}=0,\quad \bigl(\gamma^{j,1}_{i,1}\bigr)'=0,\quad \gamma^{j,2}_{i,1}=\nu^2c_{21}\eta^{j,2}_{i,1},\\ \eta^{j,2}_{i,1}=\mathrm{const},\quad 2\bigl(\omega^{j,2}_{i,1}\bigr)'+\nu^2c_{11}c_{21}\eta^{j,2}_{i,1}=0.\end{gathered}\tag{2.25}$$

Для отыскания постоянных $\eta^{j,2}_{i,1}$, $\gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,0)$, $\omega^{j,2}_{i,1}(\nu,0)$ надо воспользоваться граничными условиями при $\zeta=0$. В данном случае они имеют вид

$$\begin{gathered}\left(c_{11}\gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,0)+\frac{c_{11}^2}{c_{21}}\big(\gamma^{j,2}_{i,1}-\gamma^{j}_{i}\big)(\nu,0)\right)-\nu^2\big(c_{11}^2-2c_{21}^2\big)\big(\eta^{j}_{i}+\eta^{j,1}_{i,1}+\eta^{j,2}_{i,1}\big)=0,\\ \frac{1}{c_{11}}\eta^{j,1}_{i,1}+\frac{1}{c_{21}}\big(\eta^{j,2}_{i,1}-\eta^{j}_{i}\big)=0,\qquad \frac{1}{c_{11}}\omega^{j,1}_{i,1}(\nu,0)+\frac{1}{c_{21}}\big(\omega^{j,2}_{i,1}-\omega^{j}_{i}\big)(\nu,0)=0.\end{gathered}\tag{2.26}$$

Из равенств (2.25), (2.26) находим, что

$$\begin{gathered}\eta^{j,1}_{i,1}=\omega^{j,1}_{i,1}=0,\quad \eta^{j,2}_{i,1}=\eta^{j}_{i},\quad \gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,\zeta)=\frac{c_{11}}{c_{21}}\gamma^{j}_{i}(\nu,0)-4\nu^2\frac{c_{21}^2}{c_{11}}\eta^{j}_{i},\\ \gamma^{j,2}_{i,1}(\nu,\zeta)=\nu^2c_{21}\eta^{j}_{i},\quad \omega^{j,2}_{i,1}(\nu,\zeta)=\omega^{j}_{i}(\nu,0)-\frac{\nu^2c_{11}c_{21}}{2}\eta^{j}_{i}\zeta.\end{gathered}\tag{2.27}$$

Выписанные выше соотношения позволяют вычислить амплитудные коэффициенты формулы (1.15) при любых значениях мультииндексов i и j. В частности, коэффициент α^{j}_{i}, $j=(1,1,\dots,1)$, при $s\ge 3$ определяется формулой

$$\alpha^{j}_{i}=\alpha^{(1,1)}_{(i_1,i_2)}\prod_{m=2}^{s-1}\kappa_{(i_{m-1},i_m,i_{m+1})},\tag{2.28}$$

в которой

$$\kappa_{(i_{m-1},i_m,i_{m+1})}=\begin{cases}\big(1+r^{(1)}_{i_m,i_m+1}\big), & i_{m-1}=i_m-1,\ i_{m+1}=i_m+1,\ i_m\ge 1,\\ r^{(1)}_{i_m,i_m+1}, & i_{m-1}=i_m-1,\ i_{m+1}=i_{m-1},\ i_m\ge 1,\\ \big(1-r^{(1)}_{i_m,i_m+1}\big), & i_{m-1}=i_m+1,\ i_{m+1}=i_m-1,\ i_m\ge 1,\\ -r^{(1)}_{i_m,i_m+1}, & i_{m-1}=i_m+1,\ i_{m+1}=i_{m-1},\ i_m\ge 1,\\ 1, & i_m=0,\end{cases}\tag{2.29}$$

и $\alpha^{(1,1)}_{(i_1,i_2)}$ вычисляются по формуле (2.8) при $(i_1,i_2)=(0,1)$ и по формуле (2.15) при $(i_1,i_2)=(1,0)\&(1,2)$. Напомним, что $\alpha^{j}_{i}=0$, если хотя бы одна компонента верхнего индекса равна 2. Формулы для других амплитудных коэффициентов также могут быть выписаны в самом общем виде, но достаточно громоздки и поэтому не приводятся.

§ 3. Доказательство теоремы 1.2. Алгоритм отыскания параметров

Как сказано в § 1, задание функций $g_1(\nu,t)$, $g_2(\nu,t)$ для трех различных значений параметра $\nu>0$ на интервале $(0,T)$ однозначно определяет функции $w_1^*(\nu,0,t)=:g_1^*(\nu,t)$, $w_2^*(\nu,0,t)=:g_2^*(\nu,t)$ при любых $\nu>0$ на том же самом временном интервале. Покажем, как, используя эти функции, найти параметры источника и упругой среды, указанные в теореме.

Из формулы (1.15) следует, что функции $g_1^*(\nu,t)$, $g_2^*(\nu,t)$ равны нулю при $t<\zeta_*$ и не равны тождественному нулю на интервале $(0,T)$, если $T>\zeta_*$. Естественно, что этим же свойством обладают и функции $g_1(\nu,t)$, $g_2(\nu,t)$. Поэтому из выполнения условия теоремы 1.2, что $(g_1(\nu,t),g_2(\nu,t))\not\equiv 0$ на $(0,T)$, следует, что точка ζ_* содержится внутри $(0,T)$. Согласно (1.15) в достаточно малой окрестности точки $t=\zeta_*$ справедливы равенства

$$g_1^*(\nu,t)=\big(\alpha_0^1+\alpha_{01}^{11}\big)\delta(t-\zeta_*)+\big(\beta_0^1(\nu,0)+\beta_{01}^{11}(\nu,0)\big)\theta_0(t-\zeta_*)$$
$$+\big(\gamma_0^1(\nu,0)+\gamma_{01}^{11}(\nu,0)+\gamma_{01}^{12}(\nu,0)\big)\theta_1(t-\zeta_*),\qquad(3.1)$$
$$g_2^*(\nu,t)=\big(\eta_0^1+\eta_{01}^{11}+\eta_{01}^{12}\big)\theta_0(t-\zeta_*)+\big(\omega_2^1(\nu,0)+\omega_{01}^{11}(\nu,0)+\omega_{01}^{12}(\nu,0)\big)\theta_1(t-\zeta_*).$$

Используя формулы (2.4), (2.8), находим, что эти равенства принимают вид

$$g_1^*(\nu,t)=2a\delta(t-\zeta_*)+\big(2f_0-\nu^2ac_{11}^2\zeta_*\big)\theta_0(t-\zeta_*)$$
$$+\big(2f_1-\nu^2(c_{11}^2f_0\zeta_*+4ac_{21}^2)+\frac{\nu^4ac_{11}^4}{4}(\zeta_*)^2\big)\theta_1(t-\zeta_*)\equiv g_{10}^*(\nu,t),\qquad(3.2)$$
$$g_2^*(\nu,t)=-4ac_{21}\theta_0(t-\zeta_*)-2c_{21}\big(2f_0-\nu^2ac_{11}^2\zeta_*\big)\theta_1(t-\zeta_*)\equiv g_{20}^*(\nu,t).$$

Равенства (3.2) позволяют определить число ζ_* формулой $\zeta_*=\sup\limits_{\tau\in(0,T)}\{\tau\mid g_1^*(\nu,t)\equiv 0,\ t\in(0,\tau)\}$. Далее, полагая в этих равенствах $\nu=0$, находим постоянные a, f_0, f_1, c_{21}. Заметим теперь, что конечный скачок функции $g_1^*(\nu,t)$ в точке $t=\zeta_*$ равен коэффициенту, стоящему при $\theta_0(t-\zeta_*)$. Выбирая любое $\nu>0$, находим отсюда величину c_{11}. Тем самым сделан первый шаг вычислительного алгоритма: найдены скорости продольных и поперечных волн в первом слое и определены основные параметры источника, от которых зависят амплитудные коэффициенты разложения (1.15). Очевидно, что найденные параметры однозначно определяют числа $\bar a$, $\hat f(0)$, $\hat f'(0)$, z_*.

Выясним теперь условие, при выполнении которого возможно определение отражающих границ $\zeta=\zeta_k$, $k\ge 1$. Рассмотрим для этого разности $g_1^*(\nu,t)-g_{10}^*(\nu,t)=\bar g_{10}^*(\nu,t)$, $g_2^*(\nu,t)-g_{20}^*(\nu,t)=\bar g_{20}^*(\nu,t)$. Если они тождественно равны нулю на интервале $(0,T)$, то это означает, что интервал наблюдения слишком мал и никаких отраженных волн от границ $\zeta=\zeta_k$, $k\ge 1$, в данном временном интервале не приходит. Тогда найти их, как и параметры среды, невозможно. Процедура восстановления на этом заканчивается. Таким образом, необходимым условием определения отражающих границ является выполнение условия $(\bar g_{10}^*(\nu,t),\bar g_{20}^*(\nu,t))\not\equiv 0$ на интервале $(0,T)$. Покажем, что его выполнение позволяет найти по крайней мере границу $\zeta=\zeta_1$ и коэффициент отражения $r_{1,2}^{(1)}$, который, в свою очередь, определяет отношение I_2/I_1.

В самом деле, рассмотрим на $(0,T)$ вспомогательную функцию

$$h(t)=\sum_{s\ge 1}\alpha_i^j\delta\big(t-\tau_i^j\big),\qquad(3.3)$$

которая является сингулярной частью функции $g_1^*(\nu,t)$ и, следовательно, известна. Заметим, что $\alpha_i^j\ne 0$ в том и только в том случае, когда все компоненты индекса j равны 1. Поэтому в формуле (3.3) суммируются слагаемые, отвечающие только продольным волнам.

Рассмотрим продольную волну, отраженную от границы $\zeta=\zeta_1$. Этой волне отвечают индексы $i=(1,0)$, $j=(1,1)$. Очевидно, что эта волна раньше всех достигает границы $\zeta=\zeta_0=0$, а именно она приходит на эту границу в момент времени $t=t_1=2\zeta_1-\zeta_*$. Для $t<t_1$, очевидно, выполняется тождество $h(t)\equiv 0$. В достаточно малой окрестности точки $t=t_1$ справедливо равенство

$$h(t)=\big(\alpha_{(1,0)}^{(1,1)}+\alpha_{(1,0,1)}^{(1,1,1)}\big)\delta(t-t_1)=2\alpha_{(1,0)}^{(1,1)}\delta(t-t_1)=-2ar_{1,2}^{(1)}\delta(t-t_1).\qquad(3.4)$$

Так как по условию теоремы $I_2 \neq I_1$, то $r_{1,2}^{(1)} \neq 0$. Следовательно, искомый коэффициент не равен нулю. Поэтому $h(t) \not\equiv 0$ на $(0,T)$, если $T > t_1$. Это обстоятельство позволяет найти t_1, используя формулу $t_1 = \sup\limits_{\tau\in(0,T)} \{\tau \mid h(t) \equiv 0, t \in (0,\tau)\}$. Величина t_1 определяет $\zeta_1 = (t_1 + \zeta_*)/2$. Далее, по коэффициенту $\alpha_{(1,0)}^{(1,1)}$ находится $r_{1,2}^{(1)}$.

Рассмотрим сумму всевозможных слагаемых, входящих в правую часть формулы (3.3), для которых нижний индекс i состоит только из 0 и 1, и обозначим ее через $h_1(t)$. Это отвечает сумме волн, вышедших из источника и отраженных (многократно) от границ $\zeta = \zeta_0$ и $\zeta = \zeta_1$. Параметры τ_i^j задаются геометрией отраженных волн, а амплитудные коэффициенты α_i^j определяются выписанными в § 2 формулами, в которых участвуют только числа a и $r_{1,2}^{(1)}$. Рассмотрим теперь разность $h(t) - h_1(t) = \bar{h}_1(t)$. Определим t_2 формулой $t_2 = 2\zeta_2 - \zeta_*$ и вычислим у функции $\bar{h}_1(t)$ коэффициент при $\delta(t-t_2)$. Он равен $\alpha_{(1,2,1,0)}^{j} + \alpha_{(1,2,1,0,1)}^{(j,1)} = 2\alpha_{(1,2,1,0)}^{j} = -2a\big(1-(r_{1,2}^{(1)})^2\big)r_{2,3}^{(1)}$, причем $j = (1,1,1,1)$. Так как $r_{1,2}^{(1)} \in (-1,1)$ и $r_{2,3}^{(1)} \neq 0$, этот коэффициент не равен нулю. Отсюда вытекают формула, справедливая в некоторой окрестности точки $t = t_2$:

$$\bar{h}_1(t) \equiv 0, \quad t < t_2; \quad \bar{h}_1(t) = -2a\big(1-(r_{1,2}^{(1)})^2\big)r_{2,3}^{(1)}\delta(t-t_2), \tag{3.5}$$

и альтернатива: либо $\bar{h}_1(t) \equiv 0$ на $(0,T)$ и тогда $t_2 > T$, либо $\bar{h}_1(t) \not\equiv 0$ на $(0,T)$ и тогда $t_2 \in (0,T)$. В первом из этих случаев момент времени t_2 не может быть найден, так как интервал наблюдения недостаточен для определения границы $\zeta = \zeta_2$. Во втором случае параметр t_2 вычисляется по формуле $t_2 = \sup\limits_{\tau\in(0,T)} \{\tau \mid \bar{h}_1(t) \equiv 0,\ t \in (0,\tau)\}$. После этого находится $\zeta_2 = (t_2 + \zeta_*)/2$. Кроме того, равенство (3.5) определяет амплитудный коэффициент у $\delta(t-t_2)$, а значит, и коэффициент отражения $r_{2,3}^{(1)}$.

Перейдем к общем случаю. Допустим, что все границы $\zeta = \zeta_k$ и коэффициенты $r_{k,k+1}^{(1)}$ найдены для значений $k \leq n-1$. Выясним вопрос, при каких условиях можно найти эти величины для $k = n$. С этой целью рассмотрим на $(0,T)$ функцию

$$h_{n-1}(t) = \sum_{s\geq 1} \alpha_i^j \delta\big(t-\tau_i^j\big), \tag{3.6}$$

в которой суммирование распространяется на всевозможные допустимые индексы i, состоящие из номеров границ от 0 до $n-1$. Таким образом, эта функция учитывает все сингулярные составляющие функции $g_1^*(\nu,t)$, порожденные источником и многократно отраженными волнами в первых $n-1$ слоях. В связи с этим разность $h(t) - h_{n-1}(t) = \bar{h}_{n-1}(t)$ содержит в себе только сингулярные составляющие, вызванные волнами, отраженными от границ $\zeta = \zeta_k$ для $k \geq n$. Среди этих волн самой ранней, достигающей границы $\zeta = 0$, является волна с индексом, имеющим вид $i = (1,2,\dots,n-1,n,n-1,\dots,2,1,0)$. Она достигает границы $\zeta = 0$ в момент времени $t = t_n = 2\zeta_n - \zeta_*$. При падении ее на эту границу возникает отраженная продольная волна с той же самой амплитудой $\alpha_i^j = -ar_{n,n+1}^{(1)}\big(1-\big(r_{1,2}^{(1)}\big)^2\big)\big(1-\big(r_{2,3}^{(1)}\big)^2\big)\dots\big(1-\big(r_{n-1,n}^{(1)}\big)^2\big)$. Поэтому в некоторой окрестности точки $t = t_n$ имеет место представление

$$\bar{h}_{n-1}(t) \equiv 0, \quad t < t_n; \quad \bar{h}_{n-1}(t) = -2ar_{n,n+1}^{(1)}\prod_{k=1}^{n-1}\big(1-\big(r_{k,k+1}^{1}\big)^2\big)\delta(t-t_n). \tag{3.7}$$

Из этой формулы видно, что $\bar{h}_{n-1}(t) \equiv 0$ для $t \in (0,T)$, если $t_n \geq T$, и $\bar{h}_{n-1}(t) \not\equiv 0$ для $t \in (0,T)$, если $t_n < T$. В первом из этих случаев найти границу $\zeta = \zeta_n$ невозможно, во втором случае сначала находится $t_n = \sup\limits_{\tau\in(0,T)} \{\tau \mid \bar{h}_{n-1}(t) \equiv 0,\ t \in (0,\tau)\}$, затем $\zeta_n = (t_n + \zeta_*)/2$. Амплитудный множитель, стоящий перед $\delta(t-t_n)$, определяет коэффициент отражения $r^{(1)}_{n,n+1}$ и, следовательно, отношение I_{n+1}/I_n.

Продолжая вычисления по приведенному выше алгоритму, придем к ситуации, когда все границы с номерами, меньшими, чем некоторое целое число k^*, найдены, а следующая граница уже не может быть определена. Для этого k^*, очевидно, выполнены неравенства $\zeta_{k^*} < (T+\zeta_*)/2$, $\zeta_{k^*+1} \geq (T+\zeta_*)/2$.

Нам осталось разобрать процедуру построения параметров c_{1k}, c_{2k} для $k \geq 2$. Это удается сделать, если $k^* \geq 2$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать условие $k^* \geq 2$ выполненным. Покажем вначале, как вычислить искомые параметры при $k = 2$. Для определения c_{12} воспользуемся формулой (1.15) для функции $g_1^*(\nu,t) = w_1^*(\nu,0,t)$ и рассмотрим только ее составляющую, отвечающую конечным скачкам функции $g_1^*(\nu,t)$. Обозначим

$$g'(\nu,t) = \sum_{s\geq 1} \beta_i^j(\nu,0)\theta_0\bigl(t-\tau_i^j\bigr), \quad t \in (0,T). \tag{3.8}$$

Эта функция известна для всех $\nu \geq 0$. Сумму всех слагаемых, стоящих в правой части этой формулы и соответствующих значениям индексов i, составленным только из 0 и 1, обозначим через $g_1'(\nu,t)$. Введем в рассмотрение разность $g'(\nu,t) - g_1'(\nu,t) = \bar{g}_1'(\nu,t)$. Для этой разности в некоторой окрестности точки $t = t_2 = 2\zeta_2 - \zeta_*$ справедливо представление

$$\bar{g}_1'(\nu,t) = 2\beta^{(1,1,1,1)}_{(1,2,1,0)}(\nu,0)\theta_0(t-t_2). \tag{3.9}$$

Амплитудный коэффициент этой формулы нетрудно вычислить, используя формулы из § 2. Непосредственные вычисления приводят к формуле

$$2\beta^{(1,1,1,1)}_{(1,2,1,0)}(\nu,0) = 2\bigl(1-(r^{(1)}_{1,2})^2\bigr)r^{(1)}_{2,3}\left(-f_0+\nu^2ac_{12}^2(\zeta_2-\zeta_1)+\frac{\nu^2ac_{11}^2}{2}(2\zeta_1-\zeta_*)\right). \tag{3.10}$$

В ней участвует интересующая нас величина $c_{12} > 0$, которая и находится отсюда однозначно.

Аналогично обстоит дело в общем случае. Допустим, что величины c_{1k} уже найдены для всех $k \leq n-1 < k^*-1$. Рассмотрим функцию $g_{n-1}'(\nu,t)$, определенную формулой

$$g_{n-1}'(\nu,t) = \sum_{s\geq 1} \beta_i^j(\nu,0)\theta_0\bigl(t-\tau_i^j\bigr), \quad t \in (0,T), \tag{3.11}$$

в которой суммирование распространяется только на все допустимые значения индекса i, состоящего из чисел от 0 до $n-1$. Тогда в некоторой окрестности точки $t = t_n = 2\zeta_n - \zeta_*$ справедливо представление

$$g'(\nu,t) - g_1'(\nu,t) = \bar{g}_1'(\nu,t) = 2\beta_i^j(\nu,0)\theta_0(t-t_n), \tag{3.12}$$

в котором $i = (1,2,\dots,n-1,n,n-1,\dots,2,1,0)$ и амплитудный множитель вычисляется по формуле

$$2\beta_i^j(\nu,0) = 2r^{(1)}_{n,n+1}\left(-f_0+\nu^2a\sum_{k=2}^{n}c_{1k}^2(\zeta_k-\zeta_{k-1})+\frac{\nu^2ac_{11}^2}{2}(2\zeta_1-\zeta_*)\right) \times \prod_{k=1}^{n-1}\Bigl(1-\bigl(r^{(1)}_{k,k+1}\bigr)^2\Bigr). \tag{3.13}$$

Отсюда однозначно находится величина $c_{1n} > 0$. Применяя эту процедуру, находим c_{1k} для всех $k \leq k^*$. Заметим, что при этом отношения плотностей ρ_k/ρ_{k-1} (а значит, и ρ_k/ρ_1) становятся известными для тех же значений k, так как известны I_k/I_{k-1}. Найденные значения ζ_k и c_{1k} определяют z_k для $k \leq k^*$.

Для определения величин c_{2k} воспользуемся функцией $g_2^*(\nu, t)$ и только той ее частью, которая содержит амплитудные факторы η_i^j, а именно рассмотрим функцию $g''(t)$, определенную равенством

$$g''(t) = \sum_{s\geq 1} \eta_i^j \theta_0\bigl(t - \tau_i^j\bigr), \quad t \in (0, T). \tag{3.14}$$

Обозначим через $g_1''(t)$ ту ее часть, которая соответствует значениям индексов i, составленных только из 0 и 1, и значениям индекса j, составленного только из 1. Тогда разность $g''(t) - g_1''(t) = \bar{g}_1''(t)$ в окрестности точки $t_1' = \zeta_1 - \zeta_* + \zeta_1 c_{11}/c_{21}$ имеет представление

$$\bar{g}_1''(t) = \bigl(\eta_{(1,0)}^{(1,2)} + \eta_{(1,0,1)}^{(1,2,1)} + \eta_{(1,0,1)}^{(1,2,2)}\bigr)\theta_0(t - t_1'). \tag{3.15}$$

Если $t_1' \in (0, T)$, то равенство (3.15) позволяет найти амплитудный фактор, стоящий перед $\theta_0(t - t_1')$. В этом случае оказывается возможным вычислить c_{22}.

Используя формулы (2.15), (2.27), находим, что

$$\begin{aligned} \eta_{(1,0)}^{(1,2)} + \eta_{(1,0,1)}^{(1,2,1)} + \eta_{(1,0,1)}^{(1,2,2)} &= 2\eta_{(1,0)}^{(1,2)} \\ &= \frac{2a\bigl(1 + r_{1,2}^{(1)}\bigr)}{(\rho_1 c_{21} + \rho_2 c_{22})}\left[2\bigl(\rho_2 c_{22}^2 - \rho_1 c_{21}^2\bigr) - c_{12}c_{22}\rho_2\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Обозначим

$$\frac{2\bigl(\rho_2 c_{22}^2 - \rho_1 c_{21}^2\bigr) - c_{12}c_{22}\rho_2(1 - \rho_2/\rho_1)}{(\rho_1 c_{21} + \rho_2 c_{22})} = A_1 = \frac{\eta_{(1,0)}^{(1,2)}}{a\bigl(1 + r_{1,2}^{(1)}\bigr)}. \tag{3.17}$$

В силу (3.16) величина A_1 вычисляется по данным задачи. С другой стороны, при известной A_1 для c_{22} получаем квадратное уравнение

$$2\rho_1\rho_2 c_{22}^2 - \rho_2(A_1\rho_1 + c_{12}(\rho_1 - \rho_2))c_{22} - \rho_1^2 c_{21}(A_1 + 2c_{21}) = 0, \tag{3.18}$$

корни которого даются формулой

$$c_{22} = \frac{1}{4}\left\{\left(A_1 + c_{12}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right) \pm \sqrt{\left(A_1 + c_{12}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right)^2 + 8c_{21}\frac{\rho_1}{\rho_2}(A_1 + 2c_{21})}\right\}. \tag{3.19}$$

Если $\rho_2/\rho_1 \geq 1$, то из формулы (3.17) следует, что для A_1 справедлива оценка $A_1 > -2c_{21}$. В этом случае один из корней этого уравнения (3.18) положительный (отвечает знаку + в формуле), а второй отрицательный. Поскольку по физическому смыслу скорость c_{22} должна быть величиной положительной, в этом случае нет проблемы выбора корня. Однако в случае, когда $\rho_2/\rho_1 < 1$, существует при определенных условиях на параметры среды достаточно узкий диапазон допустимых значений A_1, для которых оба корня (3.19) положительны. Из уравнения (3.18) и теоремы Виета следует, что оба корня могут быть положительны тогда и только тогда, когда $A_1 \in (-c_{12}(1 - \rho_2/\rho_1), -2c_{21})$. Это возможно, только если выполнено неравенство

$$c_{12}(1 - \rho_2/\rho_1) > 2c_{21}, \tag{3.20}$$

Пусть A_1^-, A_1^+ — те значения A_1, при которых подкоренное выражение в формуле (3.19) обращается в нуль. Они даются формулой

$$A_1^{\pm} = -c_{12}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - 4c_{21}\frac{\rho_1}{\rho_2} \pm \sqrt{8c_{21}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right)\left(c_{12} + 2c_{21}\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}, \qquad (3.21)$$

в которой знаки + и − верхнего индекса и квадратного корня соответствуют друг другу. При этом подкоренное выражение в (3.19) можно представить в виде $(A_1 - A_1^-)(A_1 - A_1^+)$. Оно неотрицательно, если $A_1 \le A_1^-$ или $A_1 \ge A_1^+$. Очевидно, что число A_1^- лежит вне интервала $(-c_{12}(1-\rho_2/\rho_1), -2c_{21})$. В то же время нетрудно проверить, что при выполнении неравенства (3.20) число A_1^+ принадлежит $(-c_{12}(1-\rho_2/\rho_1), -2c_{21})$. Поэтому при $A_1 \in [A_1^+, -2c_{21})$ оба корня вещественны и положительны. В этом случае возникает проблема выбора корня. Для ее решения приходится привлекать (и только в этом случае!) значения скачков производной функции $g_1^*(\nu, t)$.

Рассмотрим на $(0, T)$ функцию

$$h'(\nu, t) = \sum_{s \ge 1} \gamma_i^j(\nu, t)\theta_1\big(t - \tau_i^j\big), \qquad (3.22)$$

которая является составной частью функции $g_1^*(\nu, t)$ и, следовательно, известна для всех $\nu \ge 0$. В окрестности точки $t_1 = 2\zeta_1 - \zeta^*$ она имеет представление

$$h'(\nu, t) = \big(\gamma_{(1,0)}^{(1,2)}(\nu, 0) + \gamma_{(1,0,1)}^{(1,2,1)}(\nu, 0) + \gamma_{(1,0,1)}^{(1,2,2)}(\nu, 0)\big)\theta_1(t - t_1). \qquad (3.23)$$

Вычисляя амплитудную часть этого представления, находим

$$\gamma_{(1,0)}^{(1,1)}(\nu, 0) + \gamma_{(1,0,1)}^{(1,1,1)}(\nu, 0) + \gamma_{(1,0,1)}^{(1,1,2)}(\nu, 0) = 2\gamma_{(1,0)}^{(1,1)}(\nu, 0) + 4\nu^2 c_{21}^2 a r_{1,2}^{(1)}. \qquad (3.24)$$

Так как a, c_{21} и $r_{1,2}^1$ известны, представление (3.24) позволяет найти величину $\gamma_{(1,0)}^{(1,1)}(\nu, 0)$. Используя формулы (2.15), (3.17), получаем, что

$$\begin{aligned}\gamma_{(1,0)}^{(1,1)}(\nu, 0) &= r_{1,2}^{(1)}\gamma_1^1(\nu, \zeta_1) - \frac{\nu^2 c_{11}^2 r_{1,2}^{(1)}}{2}\left(\beta_1^1(\nu, \zeta_1)\zeta_1 + \frac{\nu^2 a c_{11}^2}{4}\zeta_1^2\right) \\ &\quad + \frac{\nu^2 a\big(1 + r_{1,2}^{(1)}\big)}{\big(\frac{\rho_1}{\rho_2}c_{11} + c_{12}\big)}\left\{A_1\left[2\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}c_{21}^2 - c_{22}^2\right) + c_{12}(c_{21} + c_{22})\right]\right. \\ &\quad \left. + c_{12}\left[c_{12}c_{22}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) + \frac{1}{2}\big(c_{11}^2 - c_{12}^2\big) - 2\left(c_{21}^2 - c_{22}^2\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right]\right\}. \qquad (3.25)\end{aligned}$$

Отсюда находим уравнение для определения c_{22}:

$$2\left(c_{12}\frac{\rho_1}{\rho_2} - A_1\right)c_{22}^2 + c_{12}\left(A_1 + c_{12}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\right)c_{22} + B_1 = 0, \qquad (3.26)$$

в котором коэффициент B_1 известен и вычисляется при любом $\nu > 0$ по формуле

$$\begin{aligned}B_1 &= r_{1,2}^{(1)}\left[\gamma_1^1(\nu, \zeta_1) - \frac{\nu^2 c_{11}^2}{2}\left(\beta_1^1(\nu, \zeta_1)\zeta_1 + \frac{\nu^2 a c_{11}^2}{4}\zeta_1^2\right) - \gamma_{(1,0)}^{(1,1)}(\nu, 0)\right]\frac{\big(\frac{\rho_1}{\rho_2}c_{11} + c_{12}\big)}{\nu^2 a\big(1 + r_{1,2}^{(1)}\big)} \\ &\quad + A_1 c_{21}\left[2\frac{\rho_1}{\rho_2}c_{21} + c_{12}\right] + c_{12}\left[\frac{1}{2}\big(c_{11}^2 - c_{12}^2\big) - 2c_{21}^2\right]. \qquad (3.27)\end{aligned}$$

В рассматриваемом нами случае коэффициенты уравнения (3.26), стоящие при c_{22}^2 и c_{22}, положительны. Это означает, что один из корней этого уравнения (больший по абсолютной величине) отрицателен. Второй корень должен быть положителен и совпадать с одним из корней уравнения (3.18). Это и решает проблему выбора нужного корня уравнения (3.18) в случае, когда $\rho_2/\rho_1 < 1$, выполнено неравенство (3.20) и $A_1 \in [A_1^+, -2c_{21})$.

Аналогично решается задача отыскания c_{2k} в общем случае. Допустим, что для всех $2 \le k \le n$, $n < k^*$, значения c_{2k} уже найдены. Рассмотрим вопрос о нахождении $c_{2(n+1)}$. Определим функцию $g_n''(t)$ равенством

$$g_n''(t) = \sum_{s\ge 1} \eta_i^j \theta_0\bigl(t - \tau_i^j\bigr), \quad t \in (0,T), \tag{3.28}$$

в котором суммирование распространяется на все индексы i, составленные из номеров границ от 0 до n. При этом на верхний индекс j накладывается единственное ограничение: если при каком-либо p нижний подиндекс $i_p = n$, то соответствующий ему верхний подиндекс j_p равен 1. При этом все η_i^j определяются уже найденными параметрами $c_{11}, \dots, c_{1(n+1)}$, $c_{21}, \dots, c_{2n}$, $\rho_2/\rho_1, \dots, \rho_{n+1}/\rho_1$. Определим t_n' формулой

$$t_n' = \zeta_n - \zeta^* + \sum_{k=1}^{n} (\zeta_k - \zeta_{k-1}) \frac{c_{1k}}{c_{2k}}.$$

Это время пробега волны, отвечающей значениям нижнего индекса $i = (1, 2, \dots, n-1, n, n-1, \dots, 2, 1, 0)$ и верхнего индекса $j = (1, 1, \dots, 1, 1, 2, \dots, 2, 2, 2)$, другими словами, волны, которая последовательно проходит путь от источника до границы $\zeta = \zeta_n$ как продольная, отражается на этой границе и далее проходит как поперечная от границы $\zeta = \zeta_n$ до границы $\zeta = \zeta_0$. Тогда функция $g''(t) - g_n''(t) = \bar g_n''(t)$ в окрестности точки t_n' имеет представление

$$\bar g_n''(t) = \bigl(\eta_i^j + \eta_{i,1}^{j,1} + \eta_{i,1}^{j,2}\bigr)\theta_0(t - t_n') = \bigl(\eta_i^j + (c_{11} - 4c_{21})\alpha_i^j\bigr)\theta_0(t - t_n') = \eta_i^j \theta_0(t - t_n'). \tag{3.29}$$

Мы использовали здесь формулы (2.20) и тот факт, что коэффициент α_i^j равен 0, так как в его верхнем индексе присутствует 2. Если $t_n' \in (0,T)$, то равенство (3.29) позволяет найти число η_i^j, стоящее перед $\theta_0(t - t_1')$. В этом случае оказывается возможным вычислить $c_{2(n+1)}$.

Обозначим $i' = (1, 2, \dots, n-1, n)$, $j' = (1, 1, \dots, 1, 1)$. Из формул § 2 находим, что

$$\eta_i^j = \alpha_{i'}^{j'} \eta_{(i',n-1)}^{(j',2)} \prod_{k=1}^{n-1} \bigl(1 - r_{k,k+1}^{(2)}\bigr), \tag{3.30}$$

$$\eta_{(i',n-1)}^{(j',2)} = -\bigl(1 + r_{n,n+1}^{(1)}\bigr)\alpha_{i'}^{j'} \frac{1}{\rho_n c_{2n} + \rho_{n+1} c_{2(n+1)}} \times \left[2\bigl(\rho_{n+1} c_{2(n+1)}^2 - \rho_n c_{2n}^2\bigr) - c_{1(n+1)} c_{2(n+1)} \rho_{n+1} \left(1 - \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)\right]. \tag{3.31}$$

Вводя обозначение, аналогичное (3.17):

$$\frac{2\bigl(\rho_{n+1} c_{2(n+1)}^2 - \rho_n c_{2n}^2\bigr) - c_{1(n+1)} c_{2(n+1)} \rho_{n+1} \bigl(1 - \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\bigr)}{\bigl(\rho_n c_{2n} + \rho_{n+1} c_{2(n+1)}\bigr)} = A_n, \tag{3.32}$$

в котором

$$A_n = -\frac{\eta^{(j',2)}_{(i',n-1)}}{(1+r^{(1)}_{n,n+1})\alpha^{j'}_{i'}} = -\eta^j_i\left[\alpha^{j'}_{i'}\prod_{k=1}^{n-1}(1-r^{(2)}_{k,k+1})\right]^{-1}, \qquad (3.33)$$

получаем для $c_{2(n+1)}$ квадратное уравнение

$$2\rho_n\rho_{n+1}c^2_{2(n+1)} - \rho_{n+1}(A_n\rho_n + c_{1(n+1)}(\rho_n-\rho_{n+1}))c_{2(n+1)} - \rho_n^2 c_{2n}(A_n+2c_{2n}) = 0, \qquad (3.34)$$

корни которого даются формулой

$$c_{2(n+1)} = \frac{1}{4}\left\{\left(A_n + c_{1(n+1)}\left(1-\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)\right) \pm\sqrt{\left(A_n + c_{1(n+1)}\left(1-\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right)\right)^2 + 8c_{2n}\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}(A_n+2c_{2n})}\right\}. \qquad (3.35)$$

Если $\rho_{n+1}/\rho_n \geq 1$, то из формулы (3.33) следует, что для A_n справедлива оценка $A_n > -2c_{2n}$. В этом случае один из корней этого уравнения (3.34) положительный (отвечает знаку + в формуле), а второй отрицательный. Тогда следует взять тот из корней, который соответствует знаку +. В случае, когда $\rho_{n+1}/\rho_n < 1$, существует диапазон допустимых значений A_n, для которых оба корня (3.34) положительны. Это возможно, если выполнено неравенство

$$c_{1(n+1)}(1-\rho_{n+1}/\rho_n) > 2c_{2n}. \qquad (3.36)$$

Обозначим через A_n^-, A_n^+ те значения A_n, при которых подкоренное выражение в формуле (3.35) обращается в нуль:

$$A_n^{\pm} = -c_{1(n+1)}\left(1-\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\right) - 4c_{2n}\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}} \pm\sqrt{8c_{2n}\left(\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}-1\right)\left(c_{1(n+1)}+2c_{2n}\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}\right)}. \qquad (3.37)$$

Число A_n^+ принадлежит $(-c_{1(n+1)}(1-\rho_{n+1}/\rho_n), -2c_{2n})$. Поэтому при $A_n \in [A_n^+, -2c_{2n})$ оба корня вещественны и положительны. В этом случае опять возникает проблема выбора корня. Она решается, как и ранее, с помощью функции $h'(\nu,t)$, определенной формулой (3.22). Уберем из нее слагаемые, отвечающие слоям с первого до $(n-1)$-го. Для этого обозначим через $h'_{n-1}(\nu,t)$ сумму всех слагаемых формулы (3.22), отвечающих индексам i, у которых подиндексы пробегают всевозможные допустимые значения от 0 до $n-1$. На допустимые значения индекса j никаких ограничений при этом не накладывается. Тогда разность $h'(\nu,t) - h'_{n-1}(\nu,t) = \bar h'_{n-1}(\nu,t)$ имеет в окрестности точки $t_n = 2\zeta_n - \zeta_*$ представление

$$\bar h'_{n-1}(\nu,t) = \big(\gamma^j_i(\nu,0) + \gamma^{j,1}_{i,1}(\nu,0) + \gamma^{j,2}_{i,1}(\nu,0)\big)\theta_1(t-t_n) = \big(2\gamma^j_i(\nu,0) - 4\nu^2c^2_{21}\alpha^j_i\big)\theta_1(t-t_n), \qquad (3.38)$$

в котором $i = (1,2,\dots,n-1,n,n-1,\dots,2,1,0)$, $j = (1,1,\dots,1,1,1,\dots,1,1,1)$. Так как число α^j_i при этом известно, формула (3.38) позволяет по скачку производной функции $\bar h'_{n-1}(\nu,t)$ вычислить величину $\gamma^j_i(\nu,0)$ для всех $\nu > 0$. Тогда, используя дифференциальные соотношения для $\gamma^j_i(\nu,\zeta)$ и двигаясь вспять от границы $\zeta = 0$ к границе $\zeta = \zeta_n$, найдем $\gamma^{(j',1)}_{(i',n-1)}(\nu,\zeta_n)$ для $i' = (1,2,\dots,n-1,n)$,

$j' = (1, 1, \ldots, 1, 1)$. Воспользуемся теперь формулой (2.17) для вычисления $\gamma^{(j',1)}_{(i',n-1)}(\nu, \zeta_n)$. Полагая в (2.17) $i = i'$, $i_{s-1} = n-1$, $j = j'$, $j_{s-1} = 1$, $k = n$, находим, что

$$\begin{aligned}
\gamma^{(j',1)}_{(i',n-1)}(\nu,\zeta_n) &= r^{(1)}_{n,n+1}\gamma^{j'}_{i'}(\nu,\zeta_n) \\
+\frac{\nu^2}{\rho_n c_{1n}+\rho_{n+1}c_{1(n+1)}}&\Bigl\{\eta^{(j',2)}_{(i',n-1)}\bigl[2\bigl(\rho_n c^2_{2n}-\rho_{n+1}c^2_{2(n+1)}\bigr)+\rho_{n+1}c_{1(n+1)}\bigl(c_{2n}+c_{2(n+1)}\bigr)\bigr] \\
&-\alpha^{j'}_{i'}c_{1(n+1)}\rho_{n+1}\bigl(1+r^{(1)}_{n,n+1}\bigr)\biggl[c_{1(n+1)}c_{2(n+1)}\biggl(1-\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\biggr)+\frac12\bigl(c^2_{1n}-c^2_{1(n+1)}\bigr) \\
&-2\biggl(c^2_{2n}-c^2_{2(n+1)}\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\biggr)\biggr]\Bigr\}. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Отсюда приходим к уравнению для определения $c_{2(n+1)}$:

$$2\biggl(c_{1(n+1)}\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}-A_n\biggr)c^2_{2(n+1)}+c_{1(n+1)}\biggl(A_n+c_{1(n+1)}\biggl(1-\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}\biggr)\biggr)c_{2(n+1)}+B_n=0, \qquad (3.40)$$

в котором коэффициент B_n известен и вычисляется при любом $\nu > 0$ по формуле

$$\begin{aligned}
B_n = -\Bigl[r^{(1)}_{n,n+1}\gamma^1_1(\nu,\zeta_n)-\gamma^{(j',1)}_{(i',n-1)}(\nu,\zeta_n)\Bigr]&\frac{\bigl(\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}c_{1n}+c_{1(n+1)}\bigr)}{\nu^2\alpha^{j'}_{i'}\bigl(1+r^{(1)}_{n,n+1}\bigr)} \\
+A_n c_{2n}\biggl[2\frac{\rho_n}{\rho_{n+1}}c_{2n}+c_{1(n+1)}\biggr]&+c_{1(n+1)}\biggl[\frac12\bigl(c^2_{1n}-c^2_{1(n+1)}\bigr)-2c^2_{2n}\biggr]. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

В рассматриваемом нами случае коэффициенты уравнения (3.40), стоящие при $c^2_{2(n+1)}$ и $c_{2(n+1)}$, положительны. Это означает, что один из корней этого уравнения (больший по абсолютной величине) отрицателен. Второй корень должен быть положителен и совпадать с одним из корней уравнения (3.34). Это и решает проблему выбора нужного корня уравнения (3.34) в случае, когда $\rho_{n+1}/\rho_n < 1$, выполнено неравенство (3.36) и $A_n \in [A^+_n, -2c_{2n})$.

§ 4. Доказательство теоремы 1.1

Выпишем дифференциальные уравнения для функций $w_1 - w^*_1 = \overline{w}_1$, $w_2 - w^*_2 = \overline{w}_2$. Для этого подставим функции $w_1 = w^*_1 + \overline{w}_1$, $w_2 = w^*_2 + \overline{w}_2$ в дифференциальные уравнения (1.9), (1.10) и учтем сделанный в § 2 выбор коэффициентов α^j_i, β^j_i, γ^j_i, η^j_i, ω^j_i. Тогда для $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ получим уравнения

$$\frac{\partial^2\overline{w}_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\overline{w}_1}{\partial\zeta^2}+\nu^2\bigl(c^2_{1k}-c^2_{2k}\bigr)\frac{1}{c_{1k}}\frac{\partial\overline{w}_2}{\partial\zeta}-\nu^2c^2_{2k}\overline{w}_1+\varphi_1, \quad \overline{w}_1|_{t<0}=0, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2\overline{w}_2}{\partial t^2}=\frac{c^2_{2k}}{c^2_{1k}}\frac{\partial^2\overline{w}_2}{\partial\zeta^2}-\nu^2\bigl(c^2_{1k}-c^2_{2k}\bigr)\frac{1}{c_{1k}}\frac{\partial\overline{w}_1}{\partial\zeta}-\nu^2c^2_{1k}\overline{w}_2+\varphi_2, \quad \overline{w}_2|_{t<0}=0, \qquad (4.2)$$

$$\zeta_0<\zeta_*<\zeta_1<\cdots<\zeta_k<\zeta_{k+1}<\ldots,$$

в которых функции φ_1, φ_2 определены формулами

$$\varphi_1(\nu,\zeta)=\sum_{s\ge1}\biggl(\bigl(\gamma^j_i\bigr)''+\nu^2\bigl(c^2_{1k}-c^2_{2k}\bigr)\frac{1}{c_{1k}}\bigl(\omega^j_i\bigr)'-\nu^2c^2_{2k}\gamma^j_i\biggr)(\nu,\zeta)\theta_1\bigl(t+\chi^j_i\zeta-\tau^j_i\bigr),$$

$$\varphi_2(\nu,\zeta) = -\nu^2 \sum_{s\ge 1}\bigg(\Big(c_{1k}^2 - c_{2k}^2\Big)\frac{1}{c_{1k}}\big(\gamma_i^j\big)' + c_{1k}^2\omega_i^j\bigg)(\nu,\zeta)\theta_1\big(t+\chi_i^j\zeta-\tau_i^j\big).$$

Здесь $k=\max(i_{s-1},i_s)$, если $s>1$, и $k=1$, если $s=1$.

Аналогично поступим с соотношениями, описывающими граничные условия и условия сопряжения в источнике и на внутренних границах разрыва параметров среды. Граничные условия для функций $\overline{w}_1$, $\overline{w}_2$ принимают вид

$$\left(c_{11}\frac{\partial\overline{w}_1}{\partial\zeta} + \nu^2\big(c_{11}^2 - 2c_{21}^2\big)\overline{w}_2 + \psi_1\right)_{\zeta=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial\overline{w}_2}{\partial\zeta} - c_{11}\overline{w}_1 + \psi_2\right)_{\zeta=0} = 0, \quad (4.3)$$

где

$$\psi_1(\nu,\zeta) = \sum_{s\ge1}\big(c_{11}(\gamma_i^j)' + \nu^2\big(c_{11}^2 - 2c_{21}^2\big)\omega_i^j\big)(\nu,\zeta)\theta_1\big(t+\chi_i^j\zeta-\tau_i^j\big),$$

$$\psi_2(\nu,\zeta) = \sum_{s\ge1}\big((\omega_i^j)' - c_{11}\gamma_i^j\big)(\nu,\zeta)\theta_1\big(t+\chi_i^j\zeta-\tau_i^j\big).$$

Условия в источнике даются равенствами

$$[\overline{w}_1]_{\zeta=\zeta_*} = -2\tilde f(t),\ \left[\frac{\partial\overline{w}_1}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\zeta_*} + \phi_1 = 0,\ [\overline{w}_2]_{\zeta=\zeta_*} = 0,\ \left[\frac{\partial\overline{w}_2}{\partial\zeta}\right]_{\zeta=\zeta_*} + \phi_2 = 2c_{11}\tilde f(t), \quad (4.4)$$

в которых $\tilde f(t) = \frac{1}{4\pi c_{11}^2}(\hat f(t) - \hat f(0) - \hat f'(0)t)\theta_0(t)$, $\phi_1(\nu,t) = \big(\big(\gamma_1^1\big)' - \big(\gamma_0^1\big)'\big)(\nu,\zeta_*)\theta_1(t) = 0$, $\phi_2(\nu,t) = \big(\big(\omega_1^1\big)' - \big(\omega_0^1\big)'\big)(\nu,\zeta_*)\theta_1(t) = \nu^2 a c_{11}^3\theta_1(t)$. Условия непрерывности смещений и напряжений на границах разрыва $\zeta=\zeta_k$ записываются в виде

$$\begin{aligned} &[\overline{w}_1]_{\zeta=\zeta_k} = 0, \quad \left[\rho c_1\frac{\partial\overline{w}_1}{\partial\zeta} + \nu^2\rho\big(c_1^2 - 2c_2^2\big)\overline{w}_2 + \sigma_1\right]_{\zeta=\zeta_k} = 0,\\ &[\overline{w}_2]_{\zeta=\zeta_k} = 0, \quad \left[\rho c_2^2\left(\frac{1}{c_1}\frac{\partial\overline{w}_2}{\partial\zeta} - \overline{w}_1 + \sigma_2\right)\right]_{\zeta=\zeta_k} = 0, \quad k=1,2,\dots. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь

$$\sigma_1(\nu,\zeta,t) = \sum_{s\ge1}\big(\rho c_1\big(\gamma_i^j\big)' + \nu^2\rho\big(c_1^2 - 2c_2^2\big)\omega_i^j\big)\theta_1\big(t+\chi_i^j\zeta-\tau_i^j\big),$$

$$\sigma_2(\nu,\zeta,t) = \sum_{s\ge1}\left(\frac{1}{c_1}\big(\omega_i^j\big)' - \gamma_i^j\right)\theta_1\big(t+\chi_i^j\zeta-\tau_i^j\big).$$

Теория задач, подобных (4.4), (4.5), хорошо известна. Рассмотрим решение этой задачи в области $D(T) = \{(\zeta,t)\mid |\zeta-\zeta_*|>0,\ 0\le t<T-\zeta\}$. Очевидно, что $\overline{w}_1 = \overline{w}_2 \equiv 0$ для $t\le|\zeta-\zeta_*|$. Функции φ_1, φ_2 являются кусочно непрерывными в области $D(T)$. В то же время все неоднородности в граничных условиях и условиях сопряжения решения в точках ζ^*, ζ_k выражаются через непрерывные функции переменной t. Это обстоятельство обеспечивает принадлежность функций $\overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$ и их частных производных первого порядка по переменной t функциональному классу $\mathbf{C}(D(T))$. Тем самым установлена теорема 1.1.

§ 5. Приложение: вывод дифференциальных уравнений, граничных условий и условий сопряжения

Обозначим $v_1 = u_z$, $v_2 = u_r$. Формулы для подсчета частных производных этих функций по переменным x_i имеют вид

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial r}\cos^2\varphi + \frac{v_2}{r}\sin^2\varphi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial z}\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial r}\sin^2\varphi + \frac{v_2}{r}\cos^2\varphi, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial z}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial r}\cos\varphi, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_1}{\partial r}\sin\varphi, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

Из этих равенств следуют формулы для вычисления компонент тензора напряжений:

$$\sigma_{11} = \lambda\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial r}\cos^2\varphi + \frac{v_2}{r}\sin^2\varphi\right),$$

$$\sigma_{12} = 2\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{v_2}{r}\right)\sin\varphi\cos\varphi, \quad \sigma_{13} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right)\cos\varphi,$$

$$\sigma_{23} = \mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right)\sin\varphi, \quad \sigma_{33} = \lambda\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial z}.$$

С помощью этих формул дифференциальные и начальные условия уравнения для функций v_1, v_2, отвечающие соотношениям (1.1)–(1.3), преобразуются к виду

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right)\right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial z}\right] + \frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta'(z - z_*)\bar{f}(t), \quad v_1|_{t<0} = 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r}\right) + \lambda\frac{\partial^2 v_1}{\partial r \partial z} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\delta(r)}{2\pi r}\right)\delta(z - z_*)\bar{f}(t), \quad v_2|_{t<0} = 0.\end{aligned}$$

Граничные условия даются формулами

$$\left(\lambda\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r}\right) + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right)_{z=0} = 0. \tag{5.2}$$

На границах $z = z_k$, $k = 1, 2, \ldots$, разрыва параметров среды должны выполняться условия непрерывности компонент вектора смещений и напряжений σ_{3j}, $j = 1, 2, 3$. Эти условия записываются в терминах функций v_1, v_2 в виде

$$\begin{aligned} [v_1]_{z=z_k} = 0, \quad \left[(\lambda + 2\mu)\frac{\partial v_1}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{v_2}{r}\right)\right]_{z=z_k} = 0, \\ [v_2]_{z=z_k} = 0, \quad \left[\mu\left(\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial r}\right)\right]_{z=z_k} = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь символ $[v]_{z=z_k}$ означает разность предельных значений функции v в точках $z = z_k + 0$ и $z = z_k - 0$. Определим преобразования Фурье — Бесселя функций v_1, v_2 формулами

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(\nu, z, t) = \int_0^\infty v_1(r, z, t) J_0(\nu r) r\, dr, \quad \tilde{v}_2(\nu, z, t) = \int_0^\infty v_2(r, z, t) J_1(\nu r) r\, dr, \\ v_1(r, z, t) = \int_0^\infty \tilde{v}_1(\nu, z, t) J_0(\nu r) \nu\, d\nu, \quad v_2(r, z, t) = \int_0^\infty \tilde{v}_2(\nu, z, t) J_1(\nu r) \nu\, d\nu. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Используя равенства

$$J_n''(r)+\frac{1}{r}J_n'(r)-\frac{n^2}{r^2}J_n(r)=-J_n(r),\ n=0,1,\ J_0'(r)=-J_1(r),\ J_1'(r)+\frac{1}{r}J_1(r)=J_0(r),$$

находим для функций $\tilde v_1$, $\tilde v_2$ дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2\tilde v_1}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\biggl\{\nu\mu\biggl(\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}-\nu\tilde v_1\biggr) + \frac{\partial}{\partial z}\biggl(\nu\lambda\tilde v_2+(\lambda+2\mu)\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}\biggr)\biggr\}+\frac{1}{2\pi}\delta'(z-z_*)\bar f(t),\quad \tilde v_1|_{t<0}=0,\quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2\tilde v_2}{\partial t^2}=\frac{1}{\rho}\biggl\{\frac{\partial}{\partial z}\biggl(\mu\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}\biggr)-\nu^2(\lambda+2\mu)\tilde v_2 - \nu\biggl[\lambda\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}(\mu\tilde v_1)\biggr]\biggr\}-\frac{\nu}{2\pi}\delta(z-z_*)\bar f(t),\quad \tilde v_2|_{t<0}=0.$$

Граничные условия при этом записываются в виде

$$\biggl((\lambda+2\mu)\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}+\nu\lambda\tilde v_2\biggr)_{z=0}=0,\quad \biggl(\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}-\nu\tilde v_1\biggr)_{z=0}=0,\quad (5.6)$$

а условия непрерывности смещений и напряжений принимают вид

$$[v_1]_{z=z_k}=0,\quad \biggl[(\lambda+2\mu)\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}+\nu\lambda\tilde v_2\biggr]_{z=z_k}=0,$$
$$[v_2]_{z=z_k}=0,\quad \biggl[\mu\biggl(\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}-\nu\tilde v_1\biggr)\biggr]_{z=z_k}=0,\quad k=1,2,\dots.\quad (5.7)$$

С учетом того, что параметры среды постоянны внутри слоев, уравнения (5.5) можно заменить в каждом слое однородными уравнениями, коэффициенты которых зависят от скоростей продольных и поперечных волн:

$$\frac{\partial^2\tilde v_1}{\partial t^2}=c_{1k}^2\frac{\partial^2\tilde v_1}{\partial z^2}+\nu\bigl(c_{1k}^2-c_{2k}^2\bigr)\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}-\nu^2c_{2k}^2\tilde v_1,\quad \tilde v_1|_{t<0}=0,\quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2\tilde v_2}{\partial t^2}=c_{2k}^2\frac{\partial^2\tilde v_2}{\partial z^2}-\nu\bigl(c_{1k}^2-c_{2k}^2\bigr)\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}-\nu^2c_{1k}^2\tilde v_2,\quad \tilde v_2|_{t<0}=0,\quad (5.9)$$
$$z_0<z_*<z_1<\dots<z_k<z_{k+1}<\dots.$$

При этом влияние точечного источника, сосредоточенного в точке $z_*\in(0,z_1)$, может быть учтено условиями сопряжения

$$c_{11}^2[\tilde v_1]_{z=z_*}=-\frac{1}{2\pi}\bar f(t),\quad \biggl[c_{11}^2\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}+\nu\bigl(c_{11}^2-c_{21}^2\bigr)\tilde v_2\biggr]_{z=z_*}=0,$$
$$[\tilde v_2]_{z=z_*}=0,\quad \biggl[c_{21}^2\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}-\nu\bigl(c_{11}^2-c_{21}^2\bigr)\tilde v_1\biggr]_{z=z_*}=\frac{\nu}{2\pi}\bar f(t),\quad (5.10)$$

которые могут быть записаны в эквивалентном виде

$$[\tilde v_1]_{z=z_*}=-2f(t),\quad \biggl[\frac{\partial\tilde v_1}{\partial z}\biggr]_{z=z_*}=0,$$
$$[\tilde v_2]_{z=z_*}=0,\quad \biggl[\frac{\partial\tilde v_2}{\partial z}\biggr]_{z=z_*}=2\nu f(t),\quad f(t)=\frac{1}{4\pi c_{11}^2}\bar f(t).\quad (5.11)$$

Полагая $w_1(\nu,\zeta,t)=\tilde v_1(\nu,z(\zeta),t)$, $w_2(\nu,\zeta,t)=\tilde v_2(\nu,z(\zeta),t)/\nu$, где переменная ζ определена формулой (1.7), приходим для функций $w_1(\nu,\zeta,t)$, $w_1(\nu,\zeta,t)$ к равенствам (1.9)–(1.13).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Благовещенский А. С.* Одномерная обратная краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка // Математические вопросы теории распространения волн. Л.: Изд-во ЛОМИ, 1969. Т. 2. С. 85–90.

2. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.

3. *Романов В. Г.* Вопросы корректности задачи определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 125–134.

4. *Белишев М. И., Благовещенский А. С.* Динамические обратные задачи теории волн. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999.

5. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.

6. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.

7. *Благовещенский А. С.* Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Проблемы математической физики. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1966. Вып. 1. С. 68–81.

8. *Romanov V. G., Weng C. I., Chen T. C.* An inverse problem for a layered elastic plate // Appl. Math. Comput. 2003. V. 137, N 2–3. P. 349–369.

9. *Гервер М. Л.* Обратная задача для одномерного волнового уравнения с неизвестным источником колебаний. М.: Наука, 1974.

10. *Романов В. Г.* О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 867–881.

11. *Романов В. Г.* Определение параметров слоистой кусочно постоянной среды при неизвестной форме импульсного источника // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1338–1350.

Статья поступила 17 августа 2007 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru