Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.51

ОБ АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. С. Романов

Аннотация. Исследуется вопрос об абсолютной непрерывности функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре на s-регулярных метрических пространствах.

Ключевые слова: абсолютная непрерывность, пространства Лоренца, неравенство Пуанкаре.

Памяти С. Л. Соболева

Пусть G — область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Функцию $f : G \to R$ называют *n-абсолютно непрерывной*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства непересекающихся шаров $B(x_k, r_k) \subset G$ из условия

$$\sum_k r_k^n < \delta$$

следует

$$\sum_k (\operatorname*{osc}_{B_k} f)^n < \varepsilon.$$

Согласно работе [1] всякая функция класса $W^1_{1,\,\mathrm{loc}}(G)$, градиент которой принадлежит пространству Лоренца $L_{n,1}(G)$, эквивалентна некоторой n-абсолютно непрерывной функции. Это более тонкий результат по сравнению с классической теоремой о вложении соболевских классов функций $W^1_p(G)$ в пространство непрерывных функций при $p > n$. С одной стороны, условие n-абсолютной непрерывности сильнее, чем обычное условие непрерывности функции, с другой стороны, для произвольной ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^n$ и любого $p > n$ выполняется вложение $L_p(G) \subset L_{n,1}(G) \subset L_n(G)$. Из результатов работы [1] следует, что n-абсолютно непрерывное отображение $F : G \to \mathbb{R}^n$ обладает N-свойством Лузина и является почти всюду дифференцируемым. Выполнение этих свойств часто оказывается полезным при изучении различных вопросов, связанных с заменой переменной.

В последние годы активно и вполне успешно развивается теория функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах с борелевской мерой. Содержательная теория таких классов функций возникает, когда свойства метрики и соответствующей меры оказываются должным образом

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00531–а), Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006 № 117.

согласованы между собой. В частности, когда мера удовлетворяет «условию удвоения», удается получить аналоги различных теорем вложения, известных для соболевских функций в евклидовом случае. При этом в доказательствах соответствующих теорем вложения, как правило, используются различные варианты неравенства Пуанкаре.

Нас интересует вопрос о непрерывности функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре на s-регулярных метрических пространствах. В довольно общей ситуации, рассматриваемой в работе и включающей в себя евклидов случай, удается получить прямое доказательство s-абсолютной непрерывности функций, у которых «метрический аналог градиента» принадлежит соответствующему пространству Лоренца. При этом в метрическом случае техника доказательств существенно отличается от методов, используемых в [1] для евклидова случая.

I. Пространства Лоренца

Пусть (X, d) — метрическое пространство, μ — борелевская мера на X и $\mu(X) < \infty$. Для произвольной измеримой функции $f : X \to R$ обозначим через $\omega(f, \lambda)$ функцию распределения, полагая при $\lambda \geq 0$

$$\omega(f, \lambda) = \mu(\{x \in X \mid |f(x)| > \lambda\}),$$

а через f^* обозначим невозрастающую перестановку функции f, полагая при $t > 0$

$$f^*(t) = \inf\{\tau \geq 0 \mid \omega(f, \tau) \leq t\}.$$

В силу равноизмеримости функций f и f^* для всякой функции $f \in L_p(X)$ при $1 \leq p < \infty$

$$\left(\int\limits_X |f(x)|^p d\,\mu\right)^{1/p} = \left(\int\limits_0^{\mu(X)} (f^*(t))^p d\,t\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Пространство Лоренца $L_{p,q}(X)$ определяется как множество всех измеримых функций, для которых конечна величина

$$\|f\|^*_{p,q} = \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^{\mu(X)} (t^{1/p} f^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}. \tag{2}$$

При фиксированном показателе p и $q_1 < q_2$ выполняется вложение $L_{p,q_1}(X) \subset L_{p,q_2}(X)$ и $\|f\|^*_{p,q_2} \leq \|f\|^*_{p,q_1}$, т. е. при увеличении показателя q пространство становится более широким. Пространство Лоренца $L_{p,p}(X)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mu)$.

Символом χ_E будем обозначать характеристическую функцию множества E. Легко заметить, что для всякого измеримого множества $E \subset X$

$$\|\chi_E\|^*_{p,q} = (\mu(E))^{1/p}.$$

Вообще говоря, $\|f\|^*_{p,q}$ не является нормой, поскольку в общем случае может не выполняться неравенство треугольника. Однако при $p > 1$ существует норма $\|f\|_{p,q}$, удовлетворяющая оценке

$$\|f\|^*_{p,q} \leq \|f\|_{p,q} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{p,q},$$

относительно которой пространство Лоренца $L_{p,q}(X)$ будет банаховым. Норма в пространствах Лоренца монотонна, т. е. из условия, что $0 \le f(x) \le g(x)$ почти всюду, следует неравенство $\|f\|_{p,q} \le \|g\|_{p,q}$.

Введение в теорию пространств Лоренца можно найти в книге [2].

Нас будут в первую очередь интересовать пространства Лоренца $L_{s,1}$ при $s > 1$. Нам потребуются две оценки, связанные с нормировкой этих классов функций.

Лемма 1. *Пусть* $\bigcup\limits_k E_k \subset X$, *множества* E_k *измеримы и* $E_k \cap E_m = \varnothing$ *при* $k \ne m$. *Тогда для всякой функции* $f \in L_{s,1}(X)$

$$\Lambda_s(f) = \Big(\sum_k \|f \cdot \chi_{E_k}\|_{s,1}^s\Big)^{1/s} \le C\|f\|_{s,1}, \tag{3}$$

где постоянная C *не зависит от выбора функции* f *и множеств* E_k.

Доказательство. Согласно лемме 3.5 из [2, с. 214] достаточно проверить выполнение неравенства (3) для простых функций f.

Для всякой простой функции f очевидно, что $0 \le \Lambda_s(f) < \infty$. При фиксированном наборе множеств E_k функционал $\Lambda_s(f)$ является однородным, а из неравенства треугольника для нормы $\|f\|_{s,1}$ и неравенства Минковского для сумм следует, что $\Lambda_s(f+g) \le \Lambda_s(f) + \Lambda_s(g)$. Значит, $\Lambda_s(f)$ является некоторой нормой на классе простых функций, и для характеристической функции произвольного измеримого множества $E \subset X$

$$\Lambda_s(\chi_E) \le C(\mu(E))^{1/s}. \tag{4}$$

Из неравенства (4) и [2, теорема 3.11] вытекает, что

$$\Lambda_s(f) \le C\|f\|_{s,1}^*.$$

Замечание. Если фиксировать функцию $f \in L_{s,1}(X)$, то из неравенства (3) следует, что функция множества $\Phi(E) = \|f \cdot \chi_E\|_{s,1}^s$ квазиаддитивна в духе определения работы [3].

Лемма 2. *Пусть* $s > 0$, h — *положительная невозрастающая функция на промежутке* $(0, M] \subset R$ *и*

$$\int\limits_0^M t^{1/s} h(t) \frac{dt}{t} < \infty.$$

Положим $0 < a < b < 1$ *и рассмотрим такую убывающую последовательность точек* $\{\tau_k\} \subset (0, M]$, *что* $\tau_0 = M$ *и* $a \cdot \tau_k < \tau_{k+1} < b \cdot \tau_k$. *Тогда при* $p \in [1, \infty)$

$$\sum_{k=0}^\infty \Bigg(\int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} (t^{1/s} h(t))^p \frac{dt}{t}\Bigg)^{1/p} \le C \int\limits_0^M t^{1/s} h(t) \frac{dt}{t}.$$

Доказательство. Введем обозначение

$$I_k = \int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} t^{1/s} h(t) \frac{dt}{t}.$$

Поскольку функция h не возрастает, то

$$I_{k+1} = \int\limits_{\tau_{k+2}}^{\tau_{k+1}} t^{1/s} h(t) \frac{dt}{t} \ge h(\tau_{k+1}) \int\limits_{\tau_{k+2}}^{\tau_{k+1}} t^{1/s} \frac{dt}{t}$$
$$= sh(\tau_{k+1})\big(\tau_{k+1}^{1/s} - \tau_{k+2}^{1/s}\big) \ge C_1 h(\tau_{k+1}) \tau_{k+1}^{1/s}.$$

Если $t \in [\tau_{k+1}, \tau_k]$, то

$$h(t) t^{1/s} \le h(\tau_{k+1}) a^{-1/s} \tau_{k+1}^{1/s} \le C_2 I_{k+1}.$$

Следовательно,

$$\left(\int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} (t^{1/s} h(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \le \max_{t \in [\tau_{k+1}, \tau_k]} (h(t) t^{1/s})^{1/p'} \left(\int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} t^{1/s} h(t) \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \le C I_k^{1/p} I_{k+1}^{1/p'}.$$

Остается применить неравенство Гёльдера:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} (t^{1/s} h(t))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \le C \sum_{k=0}^{\infty} I_k^{1/p} I_{k+1}^{1/p'}$$
$$\le C \left(\sum_{k=0}^{\infty} I_k \right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{\infty} I_{k+1} \right)^{1/p'} \le C \sum_{k=0}^{\infty} I_k = C \int\limits_0^M t^{1/s} h(t) \frac{dt}{t}.$$

II. Непрерывность функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре

Полное метрическое пространство (X, d) называют *s-регулярным* ($s > 0$), если существуют такие постоянные $0 < L_1 < L_2 < \infty$ и борелевская мера μ, что для всякого шара $B(x, r) \subset X$ при $r \le \operatorname{diam} X$ выполняется оценка

$$L_1 r^s \le \mu(B(x, r)) \le L_2 r^s.$$

Далее будем предполагать, что метрическое пространство (X, d) s-регулярно и $s > 1$.

Символом f_E будем обозначать среднее значение функции f на множестве E, т. е.

$$f_E = \fint_E f \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int\limits_E f \, d\mu.$$

Поскольку мера μ удовлетворяет условию удвоения, для всякой локально суммируемой функции f почти все точки ее области определения являются точками Лебега, в которых $f(x) = \lim\limits_{r \to 0} f_{B(x,r)}$.

Для произвольного шара $B = B(x, r) \subset X$ и $\sigma \ge 1$ символом σB будем обозначать шар с центром в точке x радиуса σr.

Будем говорить, что пара функций (f, g) *удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре на метрическом пространстве* (X, d), если функция f принадлежит $L_1(X)$, неотрицательная функция g принадлежит $L_p(X)$ и для всякого шара $B = B(x, r) \subset X$ выполняется оценка

$$\fint_B |f - f_B| \, d\mu \le L \cdot r \left(\fint_{\sigma B} g^p \, d\mu \right)^{1/p},$$

где постоянные L и σ не зависят от выбора шара.

Классы функций, удовлетворяющих неравенствам Пуанкаре на метрических пространствах с борелевской мерой, довольно подробно изучаются в работе [4].

Лемма 3. *Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f, g) удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре на s-регулярном метрическом пространстве (X, d), функция f принадлежит $L_1(X)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда для всякого шара $B \subset X$ и произвольной точки $z \in B$, являющейся точкой Лебега функции f, выполняется неравенство*

$$|f(z) - f_B| \le C\|g \cdot \chi_{3\sigma B}\|_{s,1}.$$

Доказательство. Рассмотрим шар $B = B(x, R) \subset X$, и пусть $z \in B$ — точка Лебега функции f. Фиксируем такое значение λ, что $(L_2 \cdot L_1^{-1})^{1/s} < \lambda < \infty$, и положим $r_k = 2R\cdot\lambda^{-k}$, $B_k = B(z, r_k)$. Очевидно, что $B(x, R) \subset B_0$, $B_{k+1} \subset B_k$ и $\mu(B_0) \le C_1\mu(B(x, R))$, $\mu(B_k) \le C_1\mu(B_{k+1})$, где $C_1 < \infty$. Воспользуемся неравенством

$$|f(z) - f_B| \le |f(z) - f_{B_0}| + |f_{B_0} - f_B|$$

и оценим каждое слагаемое по отдельности.

Используя неравенство Пуанкаре, получаем

$$|f_{B_0} - f_B| \le \frac{1}{\mu(B)}\int\limits_B |f(x) - f_{B_0}|\,d\mu \le C_1 ⨍_{B_0} |f - f_{B_0}|\,d\mu \le C_2R\Bigg(⨍_{\sigma B_0} g^p\,d\mu\Bigg)^{1/p}$$

$$\le C_3R^{1-\frac{s}{p}}\left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_0)} ((g\cdot\chi_{\sigma B_0})^*(t))^p\,dt\right)^{1/p} \le C_4\left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_0)} (t^{1/s}(g\cdot\chi_{\sigma B_0})^*(t))^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$

$$\le C_5\|g\cdot\chi_{\sigma B_0}\|_{s,p} \le C_5\|g\cdot\chi_{3\sigma B}\|_{s,p} \le C\|g\cdot\chi_{3\sigma B}\|_{s,1}. \quad (5)$$

Учитывая, что z является точкой Лебега, имеем

$$|f(z) - f_{B_0}| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(f_{B_k} - f_{B_{k+1}})\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left|f_{B_k} - \frac{1}{\mu(B_{k+1})}\int\limits_{B_{k+1}} f(x)\,d\mu\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu(B_{k+1})}\int\limits_{B_{k+1}} |f(x) - f_{B_k}|\,d\mu \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(B_k)}{\mu(B_{k+1})}\frac{1}{\mu(B_k)}\int\limits_{B_k}|f(x) - f_{B_k}|\,d\mu$$

$$\le C_1\sum_{k=0}^{\infty}⨍_{B_k}|f(x) - f_{B_k}|\,d\mu \le C_2\sum_{k=0}^{\infty}r_k\Bigg(⨍_{\sigma B_k} g^p(x)\,d\mu\Bigg)^{1/p}. \quad (6)$$

Положим $g_k(x) = (g\cdot\chi_{\sigma B_k})(x)$. Согласно неравенству $g_k^*(t) \le g^*(t)$ и равенству (1) из оценки (6) следует, что

$$|f(z) - f_{B_0}| \le C_2\sum_{k=0}^{\infty}r_k\Bigg(⨍_{\sigma B_k} g^p(x)\,d\mu\Bigg)^{1/p}$$

$$= C_2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r_k}{(\mu(\sigma B_k))^{1/p}}\left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_k)}(g_k^*(t))^p\,dt\right)^{1/p}$$

$$\le C_3\sum_{k=0}^{\infty}{r_k}^{1-\frac{s}{p}}\left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_k)}(g^*(t))^p\,dt\right)^{1/p}. \quad (7)$$

Пусть $a_k = \left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_k)} (g^*(t))^p\,dt\right)^{1/p}$ и $b_k = {r_k}^{1-\frac{s}{p}}$. Учитывая неравенство $p < s$ и оценку меры шара σB_k через r_k, имеем

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} b_k \le C_4 {r_m}^{1-\frac{s}{p}} \le C_5(\mu(\sigma B_m))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}}. \tag{8}$$

Поскольку $g \in L_{s,1} \subset L_{s,p}$, то

$$\lim_{m\to\infty} a_m b_m = \lim_{m\to\infty} (\mu(\sigma B_m))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_m)} (g^*(t))^p\,dt\right)^{1/p}$$
$$\le \lim_{m\to\infty} \left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_m)} (t^{1/s} g^*(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} = 0.$$

Воспользовавшись неравенствами (7), (8) и преобразованием Абеля для сумм, получаем

$$|f(z) - f_{B_0}| \le C_3 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_k = C_3 \sum_{m=0}^{\infty} S_m \cdot (a_m - a_{m+1})$$
$$\le C_6 \sum_{m=0}^{\infty} (\mu(\sigma B_m))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \left[\left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_m)} (g^*(t))^p\,dt\right)^{1/p} - \left(\int\limits_0^{\mu(\sigma B_{m+1})} (g^*(t))^p\,dt\right)^{1/p}\right]$$
$$\le C_6 \sum_{m=0}^{\infty} (\mu(\sigma B_m))^{\frac{1}{s}-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{\mu(\sigma B_{m+1})}^{\mu(\sigma B_m)} (g^*(t))^p\,dt\right)^{1/p}$$
$$\le C_6 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\mu(\sigma B_{m+1})}^{\mu(\sigma B_m)} (t^{1/s} g^*(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}.$$

Учитывая выбор значения λ и полагая $\tau_m = \mu(\sigma B_m)$, легко проверить, что выполнены условия леммы 2, из которой следует, что

$$|f(z) - f_{B_0}| \le C_6 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\int\limits_{\mu(\sigma B_{m+1})}^{\mu(\sigma B_m)} (t^{1/s} g^*(t))^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$
$$\le C_7 \int\limits_0^{\mu(\sigma B_0)} t^{1/s} g^*(t) \frac{dt}{t} \le C\|g \mid L_{s,1}(3\sigma B)\|.$$

Это основная оценка, которая нам нужна для доказательства непрерывности функции f.

Теорема 1. *Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f, g) удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре на s-регулярном метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ, функция f принадлежит $L_1(X)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда класс эквивалентности функции f содержит непрерывную функцию.*

Доказательство. Согласно лемме 3 для произвольного шара $B \subset X$ и точек $x, y \in B$, являющихся точками Лебега функции f, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_B| + |f(y) - f_B| \leq C \int\limits_0^{\mu(3\sigma B)} t^{1/s} g^*(t) \frac{dt}{t}.$$

Поскольку интеграл сходится, а мера произвольного шара $B(*, r)$ оценивается через r^s, функция f равномерно непрерывна на множестве всех своих точек Лебега и может быть доопределена по непрерывности во всех предельных точках этого множества. Получаемая в результате функция $\tilde{f}$ эквивалентна исходной и непрерывна на всем пространстве (X, d).

III. Абсолютная непрерывность функций, удовлетворяющих неравенству Пуанкаре

Для доказательства абсолютной непрерывности функции нам потребуется дополнительное предположение о структуре метрического пространства (X, d), позволяющее уточнить результат леммы 3.

Полное метрическое пространство (X, d) будем называть *локально s-регулярным*, если всякий шар $B \subset X$ сам является s-регулярным метрическим пространством и постоянные L_1, L_2 в условии s-регулярности не зависят от выбора шара.

Примеры локально s-регулярных метрических пространств.

1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ шары и произвольные параллелепипеды являются локально n-регулярными метрическими пространствами относительно стандартной метрики.

2. Пусть (X, d) — локально s-регулярное метрическое пространство и $0 < \gamma < 1$. На множестве X определим новую метрику, полагая $d_\gamma(x, y) = [d(x, y)]^\gamma$. Тогда метрическое пространство (X, d_γ) локально s/γ-регулярно.

3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ введем новую анизотропную метрику, полагая расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^2$ равным $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|^{1/2}\}$. Шар относительно новой метрики d обозначим символом $B_d(x, r)$ и заметим, что он является прямоугольником со сторонами длины $2r$ и $2r^2$ соответственно. Обозначая через μ стандартную меру Лебега на плоскости $\mathbb{R}^2$, получаем $\mu(B_d(x, r)) = 4r^3$. Относительно метрики d и меры Лебега плоскость является локально 3-регулярным метрическим пространством.

4. Несложно проверить, что локально s-регулярным будет всякое связное s-регулярное метрическое пространство, шары которого удовлетворяют условию Джона: существуют точка $x_0 \in B$ и постоянная $C > 0$ такие, что для всякой точки $x \in B$ найдется параметризованная длиной дуги кривая $\gamma : [0, l] \to B$ такая, что $\gamma(0) = x$, $\gamma(l) = x_0$ и

$$\operatorname{dist}(\gamma(t), X \setminus B) \geq Ct.$$

В частности, условию Джона удовлетворяют шары на группе Гейзенберга.

Для произвольного шара $B = B(x, R)$ ($R \leq \operatorname{diam} X$) и точки $z \in B$ введем обозначение $D(z, r) = B \cap B(z, r)$. Условие локальной s-регулярности обеспечивает при $r \leq 2R$ двухстороннюю оценку меры множества $D(z, r)$:

$$L_1 r^s \leq \mu(D(z, r)) \leq L_2 r^s,$$

т. е. мера пересечения двух шаров сравнима с мерой меньшего шара.

Для получения необходимых оценок нам потребуется специальный вариант неравенства Пуанкаре.

Лемма 4. *Пусть $p \in [1, s)$ и пара функций (f, g) удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре на локально s-регулярном метрическом пространстве (X, d). Предположим, что функция f принадлежит $L_1(X)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда существует такая функция $h \in L_{s,1}(X)$, что $\|h \mid L_{s,1}(X)\| \le C_1\|g \mid L_{s,1}(X)\|$ и для произвольных шара B и точки $z \in B$ выполняется неравенство*

$$\fint_{D(z,r)} |f - f_{D(z,r)}|\, d\mu \le Cr\Bigg(\fint_{D(z,r)} h^p\, d\mu\Bigg)^{1/p}. \tag{9}$$

Доказательство. Поскольку $s > 1$, $p < s$ и $L_{s,1}(X) \subset L_s(X)$, согласно теореме 3.1 работы [4] из p-неравенства Пуанкаре следует, что для произвольного шара B и точек $x, y \in B$, являющихся точками Лебега функции f, выполняется оценка

$$|f(x) - f(y)| \le C_p d(x, y)[(M(g^p))^{1/p}(x) + (M(g^p))^{1/p}(y)], \tag{10}$$

где M — максимальный оператор Харди — Литтлвуда.

Полагая $h = Tg = (M(g^p))^{1/p}$, дважды интегрируя неравенство (10) по множеству $D(z, r)$ и применяя неравенство Гёльдера, получаем неравенство (9).

Пусть $q > p$, тогда для всякой функции $v \in L_q(x)$ функция $|v|^p$ принадлежит пространству $L_{q/p}(X)$. В силу ограниченности максимального оператора в пространствах Лебега при показателях суммируемости, больших единицы, получаем $Tv = (M(|v|^p))^{1/p} \in L_q(X)$. Таким образом, сублинейный оператор T является ограниченным в пространствах Лебега $L_q(x)$ при $q > p$. С учетом совпадения пространства Лоренца $L_{q,q}(X)$ с пространством Лебега $L_q(X)$ принадлежность функции $h = Tg$ пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$ является следствием интерполяционной теоремы [2, 5].

Теперь мы можем несколько уточнить результат леммы 3 в том плане, что в оценке будет участвовать норма функции непосредственно по самому рассматриваемому шару B, а не по шару $3\sigma B$, как в лемме 3.

Лемма 5. *Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f, g) удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре на локально s-регулярном метрическом пространстве (X, d), функция f принадлежит $L_1(X)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда для всякого шара $B \subset X$ и произвольной точки $z \in B$, являющейся точкой Лебега функции f, выполняется неравенство*

$$|f(z) - f_B| \le C\|h \cdot \chi_B\|_{s,1},$$

где h — функция из леммы 4.

Доказательство этого утверждения практически повторяет доказательство леммы 3, только вместо шаров B_m следует рассмотреть множества $D_m = D(z, r_m)$, а вместо используемого ранее неравенства Пуанкаре — воспользоваться неравенством (9).

Для колебания функции f на шаре B будем использовать обозначение $\operatorname*{osc}_B f$.

Определение. Функцию $f : X \to R$ будем называть *s-абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое значение $\delta > 0$, что для всякого семейства непересекающихся шаров $B_k \subset X$ из неравенства

$$\sum_k \mu(B_k) < \delta$$

следует, что

$$\sum_k (\operatorname*{osc}_{B_k} f)^s < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть $p \in [1, s)$, пара функций (f, g) удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре на локально s-регулярном метрическом пространстве (X, d), функция f принадлежит $L_1(X)$, а неотрицательная функция g принадлежит пространству Лоренца $L_{s,1}(X)$. Тогда класс эквивалентности функции f содержит s-абсолютно непрерывную функцию.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует существование непрерывной функции $\tilde{f}$, эквивалентной функции f.

Рассмотрим произвольное семейство непересекающихся шаров $B_k \subset X$, и пусть $D = \bigcup\limits_k B_k$, $\mu(D) < \delta$. Используя лемму 5, получаем

$$\operatorname*{osc}_{B_k} \tilde{f} \leq C \|h \cdot \chi_{B_k}\|_{s,1}.$$

Остается воспользоваться леммой 1:

$$\sum_k (\operatorname*{osc}_{B_k} \tilde{f})^s \leq C^s \sum_k \|h \cdot \chi_{B_k}\|_{s,1}^s \leq C_1 \|h \cdot \chi_D\|_{s,1}^s \leq C_2 \left(\int\limits_0^\delta t^{1/s} h^*(t) \frac{dt}{t} \right)^s.$$

Поскольку интеграл стремится к нулю при $\delta \to 0$, это и означает s-абсолютную непрерывность функции f.

Для произвольной μ-измеримой функции $f : X \to \overline{R}$ функцию $g : X \to [0, \infty)$ будем называть *допустимой*, если существует такое измеримое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \tag{11}$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции f обозначим через $D(f)$.

По аналогии с введенными Хайлашем [6] классами функций соболевского типа определим функциональное пространство $M_{s,1}^1(X)$ условием

$$M_{s,1}^1(X) = \{f \in L_1(X) \mid g \in D(f) \cap L_{s,1}\}.$$

Следствие 1. *Пусть (X, d) — локально s-регулярное метрическое пространство. Тогда для всякой функции $f \in M_{s,1}^1(X)$ существует эквивалентная ей s-абсолютно непрерывная функция.*

Результат является непосредственным следствием теоремы 2, поскольку интегрируя дважды неравенство (11), получаем, что пара функций (f, g) удовлетворяет неравенству (9) при $p = 1$.

Хотя не всякая евклидова область является локально s-регулярным метрическим пространством, результат работы [1] может быть получен в качестве простого следствия леммы 5, поскольку в данном случае рассматриваются лишь шары, целиком лежащие внутри области.

Следствие 2. *Пусть G — ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(G)$, $|\nabla f| \in L_{n,1}(G)$. Тогда существует n-абсолютно непрерывная в области G функция $\tilde f$, эквивалентная функции f.*

Если $\overline{B} \subset G$, то $f \in L_1(B)$, $|\nabla f| \in L_{n,1}(B) \subset L_n(B) \subset L_p(B)$ при $p < n$ и пара функций $(f, |\nabla f|)$ удовлетворяет p-неравенству Пуанкаре при $p \in (1, n)$ на шаре B. Существование в классе эквивалентности функции f непрерывной функции $\tilde f$ является следствием теоремы 1. При этом

$$\operatorname*{osc}_B \tilde f \le C \| |\nabla f| \mid L_{n,1}(B)\|.$$

Для произвольного шара $B(x,R) \subset G$ в силу непрерывности функции $\tilde f$ и монотонности нормы в пространстве Лоренца

$$\operatorname*{osc}_{B(x,R)} \tilde f = \sup_{r<R} \operatorname*{osc}_{B(x,r)} \tilde f \le C \| |\nabla f| \mid L_{n,1}(B(x,R))\|.$$

Как и при доказательстве теоремы 2, остается воспользоваться леммой 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. 1999. V. 100, N 1. P. 87–101.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
3. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.
4. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev met Poincaré // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 145, N 688. P. 1–101.
5. *Hunt R. A.* An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70, N 6. P. 803–807.
6. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric space // Potential Anal. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.

Статья поступила 29 декабря 2007 г.

Романов Александр Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
asrom@math.nsc.ru