Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.54+532.5

ВАРИАЦИИ ЕМКОСТЕЙ РОБЕНА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

С. Р. Насыров

Аннотация. Получены оценки искажения модулей четырехсторонников, приведенных модулей и емкостей Робена в зависимости от изменения границы области. Показано, что при достаточно гладких вариациях границы соответствующие вариации модулей и емкостей пропорциональны площади варьируемого участка области в некоторой экстремальной метрике. Полученные результаты применены к исследованию обобщенной задачи М. А. Лаврентьева о нахождении формы дужки заданной длины максимальной подъемной силы при ограничении на ее кривизну.

Ключевые слова: емкость Робена, модули четырехсторонников, экстремальная длина семейства кривых, подъемная сила.

1. Введение

В [1] автором дано решение обобщенной задачи М. А. Лаврентьева [2] о форме дужки заданной длины, которая обеспечивает максимальную подъемную силу при некотором ограничении на кривизну дужки.

М. А. Лаврентьев ставил задачу следующим образом. Пусть гладкая дуга γ заданной длины l обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости, а точки разветвления и схода потока совпадают с началом и концом этой дуги. Предположим, что кривизна γ в любой точке не превосходит константы K_0, причем

$$K_0 l \leq c_0. \tag{1}$$

При какой форме γ подъемная сила, действующая на γ, будет максимальной? В [2] фактически доказана

Теорема 1. *Если в* (1) $c_0 = 1/21$, *то максимальную подъемную силу имеет дуга окружности кривизны* c_0/l.

Предложенный в [1] подход отличен от подхода М. А. Лаврентьева. Он, в частности, позволяет рассмотреть случай непостоянных мажорант для кривизны, дать более короткое доказательство теоремы 1 и увеличить значение константы c_0 до значения $c_0 = 0,1373205\dots$. Этот подход основан на использовании аппарата емкостей Робена (см., например, [3–5]). Основным фактом, позволяющим связать подъемную силу с емкостями Робена, является установленная в [1] теорема, которую мы приведем здесь для случая произвольного аэродинамического профиля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00381 и 06–01–81019-Бел).

Теорема 2. *Пусть γ^+ и γ^- — верхняя и нижняя поверхности аэродинамического профиля γ, $\sigma(\gamma^+)$ и $\sigma(\gamma^-)$ — их емкости Робена относительно внешности профиля. Тогда*

$$\sigma(\gamma^+) + \sigma(\gamma^-) = d, \quad \sigma(\gamma^+) - \sigma(\gamma^-) = P, \tag{2}$$

где P — подъемная сила (безразмерная) профиля, d — трансфинитный диаметр γ.

Исследование в [1] основано на вариации формы дуги на некотором малом участке и оценке вариации подъемной силы при таком изменении. При этом возникает задача об изучении изменения емкости Робена при достаточно гладких вариациях границы. В [1] замечено, что вариация емкости Робена может быть оценена через площадь варьируемого участка области. Возникает естественный вопрос: можно ли утверждать, что в случае достаточно гладких вариаций границы области вариация емкости Робена пропорциональна этой площади? В настоящей работе доказывается, что это действительно имеет место (теоремы 5 и 6).

С использованием формул для вариаций емкостей Робена как варьируемого, так и дополнительного участка границы удается улучшить константу по сравнению с [1] до значения

$$c_0 = 0,30284265\dots. \tag{3}$$

Это более чем в 6 раз улучшает константу, полученную М. А. Лаврентьевым в [2].

Опишем структуру работы. В п. 2 устанавливается необходимое нам обобщение классической теоремы Радо о равномерной сходимости в замкнутой области последовательности конформных отображений. А именно, найдены условия, при которых в замкнутой области равномерно сходятся производные конформных отображений.

В п. 3 рассматриваются вариации модулей четырехсторонников и двусвязных областей при гладком изменении границы области. Используемая методика, основанная на использовании аппарата экстремальных длин и результатах п. 2, позволяет также исследовать вариации емкостей Робена.

В п. 4 устанавливаются оценки модуля конформного отображения внешности единичного круга на внешность выпуклой дуги, необходимые для оценки вариации емкости Робена.

Наконец, в п. 5 оценивается вариация подъемной силы дужки при изменении кривизны на некотором участке. Доказана

Теорема 3. *Среди всех гладких дужек длины l, кривизна которых удовлетворяет ограничению*

$$K(s) \overset{\text{п.в.}}{\leq} \psi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \tag{4}$$

где s — дуговая абсцисса, ψ — непрерывная неотрицательная функция, удовлетворяющая неравенству (1), в котором $K_0 = \max\limits_{0\leq s\leq l} \psi(s)$, c_0 имеет вид (3), наибольшую подъемную силу имеет дужка с кривизной $K(s) \equiv \psi(s)$, $s \in [0, l]$.

2. Равномерная сходимость производных конформных отображений

Начнем с обобщения известной теоремы Радо, дающей необходимое и достаточное геометрическое условие равномерной сходимости в замкнутом единичном круге последовательности конформных отображений (см. [6]). Нас будет интересовать равномерная сходимость последовательности производных этих отображений. Заметим, что подобные вопросы исследовались многими авторами (см., например, [7, 8]). В отличие от предшествующих работ, где, как правило, изучалась сходимость граничных кривых в пространствах $C^{m,\alpha}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < 1$, мы рассматриваем случай сходимости в классе C^1 при условии, что модули непрерывности углов наклона касательных равномерно ограничены некоторой мажорантой, удовлетворяющей условию Дини.

Пусть дана последовательность жордановых областей $D_n \ni 0$ с гладкими границами Γ_n, заданными уравнениями

$$z = z_n(s) = z_n^{(0)} + \int\limits_0^s \exp[i\varphi_n(\sigma)]\,d\sigma, \quad 0 \le s \le l_n, \tag{5}$$

где неубывающие функции $\varphi_n(s)$ удовлетворяют условию

$$|\varphi_n(s_1) - \varphi_n(s_2)| \le \omega(|s_1 - s_2|), \quad 0 \le s_1, s_2 \le l_n, \tag{6}$$

а неубывающая функция $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ не зависит от n и удовлетворяет условию Дини

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(t)dt}{t} < \infty. \tag{7}$$

Обозначим через f_n конформное отображение единичного круга E на D_n с нормировкой $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$. Пусть последовательность D_n сходится как к ядру к области D с гладкой границей Γ, заданной уравнением

$$z = z(s) = z^{(0)} + \int\limits_0^s \exp[i\varphi(\sigma)]\,d\sigma, \quad 0 \le s \le l. \tag{8}$$

Теорема 4. *Для того чтобы последовательность производных функций f_n' сходилась равномерно в замкнутом единичном круге $\overline{E}$ к производной f' конформного отображения f круга E на область D, удовлетворяющего условиям $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

(**R**) *для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что для любого $n \ge N$ между точками кривых Γ_n и Γ можно установить гомеоморфное соответствие ψ_n, при котором расстояние между соответственными точками меньше ε и углы наклона касательных к оси абсцисс в этих точках отличаются на величину, меньшую ε.*

Доказательство. Необходимость условия (**R**) очевидна. Докажем достаточность.

По теореме Каратеодори [6, гл. 2, § 3] функции f_n и f продолжаются до непрерывных отображений на $\overline{E}$. По теореме Радо [6, гл. 2, § 5] последовательность f_n сходится равномерно к f в $\overline{E}$. Покажем, что последовательность функций $\ln f_n'(e^{i\theta})$, $0 \le \theta \le 2\pi$, образует равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство в $C[0, 2\pi]$. Без ограничения общности можно считать, что $z_n^{(0)} \longrightarrow z^{(0)}$, $n \to \infty$.

Повторяя почти дословно доказательство теоремы Келлога из [6, гл. 10, с. 411], получаем, что функции $s = \sigma_n(\theta)$, определяющие зависимость дуговой абсциссы контура Γ_n от граничной точки единичного круга $e^{i\theta}$, индуцированную конформным отображением f_n, удовлетворяют условию Гёльдера

$$|\sigma_n(\theta_1) - \sigma_n(\theta_2)| \le k_n|\theta_1 - \theta_2|^{1/2}, \tag{9}$$

где
$$k_n = \left(\int_0^{2\pi} |f_n'(e^{i\theta})|^2 \, d\theta \right)^{1/2} < \infty, \tag{10}$$
а функции $\arg f_n'(e^{i\theta})$ — условию
$$\begin{aligned} |\arg f_n'(e^{i\theta_1}) - \arg f_n'(e^{i\theta_2})| &\le |\varphi_n(\sigma_n(\theta_1)) - \varphi_n(\sigma_n(\theta_2))| + |\theta_1 - \theta_2| \\ &\le \omega(|\sigma_n(\theta_1) - \sigma_n(\theta_2)|) + |\theta_1 - \theta_2| \le \omega(k_n|\theta_1 - \theta_2|^{1/2}) + |\theta_1 - \theta_2|. \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь докажем, что последовательность k_n ограничена.

Предварительно установим, что последовательность длин l_n сходится к длине предельной кривой l, $n \to \infty$. Сначала докажем ограниченность l_n. Предположим противное. Тогда найдется $l_{n_k} \to \infty$, $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность φ_{n_k} на $[0, l]$. Ввиду (6) и на основании теоремы Арцела — Асколи без ограничения общности можно считать, что φ_{n_k} сходится равномерно к некоторой функции $\tilde\varphi$ на $[0, 2l]$. Тогда
$$z_{n_k}(s) \rightrightarrows \tilde z(s) \doteqdot z^{(0)} + \int_0^s \exp(i\tilde\varphi(\sigma))\, d\sigma, \quad 0 \le s \le l.$$
Из условия ($\mathbf{R}$) теоремы немедленно следует, что $\tilde z(s) \equiv z(s)$, $0 \le s \le l$. Но тогда $\tilde z(0) = \tilde z(l)$ и последовательность Γ_{n_k} сходится к нежордановой кривой $\widetilde\Gamma$, содержащей Γ как собственное подмножество. Это противоречит условию ($\mathbf{R}$).

Следовательно, последовательность l_n ограничена. Тогда она сходится, и пусть $l_{n_k} \to \tilde l$. Те же рассуждения, что и выше, показывают, что $\tilde l = l$. Отсюда следует, что $l_n \to l$, $n \to \infty$. Кроме того, последовательность $z_n(l_n s)$ сходится равномерно к $z(ls)$ на [0,1].

Пусть $e^{i\gamma_n(\theta)} = f^{-1} \circ \psi_n \circ f_n(e^{i\varphi})$. В силу условия ($\mathbf{R}$) для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для любого $n \ge N$ выполняется неравенство
$$|f_n(e^{i\theta}) - f(e^{i\gamma_n(\theta)})| < \varepsilon/2.$$
Так как по теореме Радо $f_n(e^{i\theta}) \rightrightarrows f(e^{i\theta})$, для любого $\varepsilon > 0$ найдется M такое, что для всех $n \ge M$ выполняется неравенство
$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{i\gamma_n(\theta)})| < \varepsilon.$$
По теореме Каратеодори функция, обратная к f, непрерывна в $\overline{D}$, поэтому
$$\gamma_n(\theta) \rightrightarrows \theta, \quad n \to \infty, \ \theta \in [0, 2\pi]. \tag{12}$$
По условию ($\mathbf{R}$) для любого $\varepsilon > 0$ найдется N_1 такое, что для любых $n \ge N_1$ и $\theta \in [0, 2\pi]$
$$|\arg f_n'(e^{i\theta}) - \arg f'(e^{i\gamma_n(\theta)}) + (\theta - \gamma_n(\theta))| < \varepsilon/2.$$
Тогда с учетом непрерывности $\arg f'(e^{i\theta})$ и (12) отсюда следует, что
$$u_n(\theta) \doteqdot \arg f_n'(e^{i\theta}) \rightrightarrows u(\theta) \doteqdot \arg f'(e^{i\theta}), \quad n \to \infty.$$

Как и при доказательстве теоремы 7 из [6, гл. 9, с. 401], выберем некоторый тригонометрический полином $s(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ такой, что

$|u(\theta) - s(\theta)| < \varepsilon/2$, $\theta \in [0, 2\pi]$, где $\varepsilon < \pi/4$. Тогда существует n_0 такое, что $|u_n(\theta) - s(\theta)| < \varepsilon$, $\theta \in [0, 2\pi]$ при $n \geq n_0$.

Пусть $R(\zeta) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{m} (a_n - ib_n)\zeta^n$. Тогда, как и в [6],

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_n'(re^{i\theta})|^2\, d\theta \leq \frac{\max|e^{i2R(\zeta)}|}{\cos 2\varepsilon} \operatorname{Re}[(f_n'(0))^2 e^{-i2R(0)}], \quad n \geq n_0.$$

Так как $f_n'(0) \to f'(0)$, последовательность $\operatorname{Re}(f_n'(0))$ ограничена, следовательно, последовательность k_n, определенная в (10), также ограничена.

Итак, существует константа $k > 0$ такая, что для любого n

$$|\arg f_n'(e^{i\theta_1}) - \arg f_n'(e^{i\theta_2})| \leq \widetilde{\omega}(|\theta_1 - \theta_2|) \doteqdot \omega(k|\theta_1 - \theta_2|^{1/2}) + |\theta_1 - \theta_2|.$$

Отметим, что функция $\widetilde{\omega}$ также удовлетворяет условию Дини. Тогда

$$\ln f_n'(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta \rightrightarrows \ln f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta$$

в силу леммы 1, приведенной ниже. $\square$

Лемма 1. *Если для последовательности 2π-периодических функций u_n имеет место неравенство $|u_n(\theta_1) - u_n(\theta_2)| \leq \omega(|\theta_1 - \theta_2|)$ $\forall\, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, где ω не зависит от n и удовлетворяет условию Дини (7), и $u_n \rightrightarrows u$ на $[0, 2\pi]$, то в единичном круге $S[u_n] \rightrightarrows S[u]$, где*

$$S[u](z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\theta$$

— оператор Шварца, примененный к функции u.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $u \equiv 0$. Функции u_n удовлетворяют условию Дини, поэтому они продолжаются на $\overline{E}$ по непрерывности. При этом справедливы формулы Сохоцкого

$$S[u_n](e^{i\eta}) = u_n(\eta) + iv_n(\eta),$$

где

$$v_n(\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u_n(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\eta}{2}\, d\theta.$$

Для любого $\delta \in (0, \pi)$ имеем

$$|v_n(\eta)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\eta-\pi}^{\eta+\pi} u_n(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\eta}{2}\, d\theta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\eta-\delta}^{\eta+\delta} |u_n(\theta) - u_n(\eta))| \left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\eta}{2}\right| d\theta + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta\leq|\theta-\eta|\leq\pi} |u_n(\theta) - u_n(\eta)| \left|\operatorname{ctg}\frac{\theta-\eta}{2}\right| d\theta$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} \omega(|t|)\, |\operatorname{ctg}(t/2)|\, dt + 2\max|u_n| \int\limits_{\delta\leq|t|\leq\pi} |\operatorname{ctg}(t/2)|\, dt.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Так как ω удовлетворяет условию Дини, существует $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \pi)$ такое, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} \omega(|t|)\, |\mathrm{ctg}(t/2)|\, dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выберем N настолько большим, что при $n \geq N$

$$\max |u_n| \int\limits_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\mathrm{ctg}(t/2)|\, dt < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Тогда при $n \geq N$ имеем $|v_n(\eta)| < \varepsilon$. Отсюда нетрудно вывести нужное утверждение. $\square$

Разумеется, справедлив аналог теоремы 4 и для однопараметрического семейства областей D_t, $0 < t \leq t_0$, которые ограничены гладкими жордановыми кривыми Γ_t и сходятся как к ядру при $t \to 0+$ к жордановой области, ограниченной гладкой кривой Γ. В этом случае условие $(\mathbf{R})$ надо заменить условием:

$(\widetilde{\mathbf{R}})$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется t_ε такое, что для любых $t \leq t_\varepsilon$ между точками кривых Γ_t и Γ можно установить гомеоморфное соответствие ψ_t, при котором расстояние между соответственными точками меньше ε и углы наклона касательной к оси абсцисс в этих точках отличаются на величину, меньшую ε.

3. Вариации модулей и емкостей Робена

В этом пункте рассмотрим изменение модулей четырехсторонников и двусвязных областей, приведенных модулей, а также емкостей Робена при достаточно гладком изменении границы соответствующих областей. Основным аппаратом будет являться метод экстремальных длин семейств кривых. Среди работ, посвященных близкой тематике, отметим классические вариационные формулы М. А. Лаврентьева [7], работу [9], в которой, как и в настоящей работе, применялись экстремальные длины семейств кривых, а также [10, 11].

Напомним, что *четырехсторонником* называется жорданова область, на границе которой отмечены четыре различные точки, называемые его вершинами, вершины делят границу четырехсторонника на четыре части. Две из противоположных частей называются *горизонтальными сторонами*, две другие — *вертикальными. Модуль четырехсторонника* есть по определению модуль конформно эквивалентного ему прямоугольника (при конформном отображении горизонтальные стороны четырехсторонника переходят в горизонтальные стороны прямоугольника, а вертикальные — в вертикальные), т. е. отношение длин горизонтальной стороны и вертикальной.

Начнем с изучения вопроса об искажении модуля прямоугольника. Примененный при доказательстве леммы 2 метод распространяется затем на случай двусвязных областей и приведенных модулей.

Пусть $Q = [0, a] \times [0, 1]$ — прямоугольник, D — его жорданова подобласть, ограниченная кусочно гладкой кривой и содержащая горизонтальные стороны Q. Обозначим через f конформное отображение прямоугольника $\widetilde{Q} = [0, \tilde{a}] \times [0, 1]$ на D, при котором вершины $(0, 0)$, $(\tilde{a}, 0)$, $(0, 1)$, $(\tilde{a}, 1)$ переходят соответственно в вершины $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, 1)$, $(a, 1)$.

Лемма 2. *Модули a и $\tilde{a}$ четырехсторонников Q и D с вершинами* $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,1)$, $(a,1)$ *связаны неравенством*

$$\tilde{a} \leq a - \Sigma, \tag{13}$$

где Σ — площадь $Q \setminus D$. Если $\overline{E}$ — замыкание множества E граничных точек $\widetilde{Q}$, которые переходят во внутренние точки Q при граничном соответствии, индуцированном f, производная f' существует во всех точках $\overline{E}$ и $c = \inf\limits_{\overline{E}} \operatorname{Re} f' > 0$, то

$$\tilde{a} \geq a - \Sigma/c^2. \tag{14}$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [12]), что $1/a = \lambda(\Gamma)$, $1/\tilde{a} = \lambda(\widetilde{\Gamma})$, где Γ и $\widetilde{\Gamma}$ — семейства кривых в Q и D соответственно, соединяющих горизонтальные стороны, через λ, как обычно, обозначается экстремальная длина семейства кривых. Будем обозначать через $A(\rho)$ площадь плоскости в метрике ρ, а через $L(\rho, \Gamma)$ — инфимум длин кривых семейства Γ в ρ-метрике.

Рассмотрим метрику $\rho^* = \chi_D$, где χ — характеристическая функция множества. Тогда $L(\rho^*, \widetilde{\Gamma}) = 1$, $A(\rho^*) = a - \Sigma$. Следовательно,

$$1/\tilde{a} = \lambda(\widetilde{\Gamma}) \geq L^2(\rho^*, \widetilde{\Gamma})/A(\rho^*) = 1/(a - \Sigma),$$

и неравенство (13) доказано.

Для доказательства неравенства (14) рассмотрим метрику

$$\hat{\rho}(z) = \begin{cases} |g'(z)|, & z \in \overline{D}, \\ 1/c, & z \in Q \setminus \overline{D}, \\ 0, & z \notin Q, \end{cases}$$

где $g = f^{-1}$. Тогда $A(\hat{\rho}) = \tilde{a} + \Sigma/c^2$.

Покажем, что

$$L(\hat{\rho}, \Gamma) \geq 1. \tag{15}$$

Действительно, пусть $\gamma \in \Gamma$. Если γ лежит целиком в $\overline{D}$, то

$$L(\hat{\rho}, \gamma) = \int\limits_{\gamma} \hat{\rho}(z)|dz| = \int\limits_{\gamma} |g'(z)||dz| = \int\limits_{g(\gamma)} |dw|$$

является евклидовой длиной $l(g(\gamma))$ кривой $g(\gamma)$, соединяющей горизонтальные стороны в $\widetilde{Q}$. Следовательно, $L(\hat{\rho}, \gamma) \geq 1$.

Пусть теперь $\gamma \in \Gamma$ — произвольная кривая. Если γ не лежит в $\overline{D}$, то γ содержит конечное или счетное множество дуг γ_j, лежащих в $Q \setminus \overline{D}$. Пусть z_j' и z_j'' — концы дуги γ_j, $\zeta_j' = g(z_j')$, $\zeta_j'' = g(z_j'')$, $\tilde{\gamma}_j$ — поддуга границы области D, являющаяся образом вертикального отрезка на границе прямоугольника $\widetilde{Q}$ с концами ζ_j' и ζ_j''. Докажем, что $L(\hat{\rho}, \gamma_j) \geq L(\hat{\rho}, \tilde{\gamma}_j)$. Действительно,

$$L(\hat{\rho}, \gamma_j) = \int\limits_{\gamma_j} \hat{\rho}(z)|dz| = (1/c)l(\gamma_j) \geq (1/c)|z_j' - z_j''|$$

$$= (1/c)\left|\int\limits_{\zeta_j'}^{\zeta_j''} f'(\zeta)d\zeta\right| \geq |\zeta_j' - \zeta_j''| = l(g(\tilde{\gamma}_j)) = \int\limits_{\tilde{\gamma}_j} |\hat{\rho}(z)||dz| = L(\hat{\rho}, \tilde{\gamma}_j).$$

Таким образом, инфимум величин $L(\hat{\rho},\gamma)$ достигается на кривых, лежащих в $\overline{D}$, и (15) установлено.

Тогда $1/a = \lambda(\Gamma) \geq L^2(\hat{\rho},\Gamma)/A(\hat{\rho}) = (\tilde{a}+\Sigma/c^2)^{-1}$, и лемма 2 доказана. $\square$

Перейдем к изучению искажения модулей четырехсторонников. Предварительно установим локальный вариант теоремы 4.

Пусть D — жорданов четырехсторонник, вертикальные стороны которого содержат гладкую (открытую) дугу Γ с концами z_1, z_2, заданную уравнением (8), в котором функция φ удовлетворяет условию

$$|\varphi(s_1)-\varphi(s_2)| \leq \omega(|s_1-s_2|), \quad s_1, s_2 \in [0,l], \tag{16}$$

где функция ω не убывает и удовлетворяет условию Дини (7). Рассмотрим последовательность жордановых четырехсторонников D_n, получающихся из D «вдавливанием» некоторой замкнутой поддуги γ дуги Γ внутрь области D: γ заменяется гладкой дугой γ_n. Пусть Γ_n — дуга на границе области D_n с концами z_1, z_2, содержащая дугу γ_n. Предположим, что уравнения Γ_n имеют вид (5), где функции φ_n удовлетворяют (6). Пусть имеет место условие ($\mathbf{R}$). Рассмотрим конформные отображения четырехсторонников $p_n : Q_n \to D_n$ и $p : Q \to D$, где $Q_n = [0,a_n]\times[0,1]$, $Q=[0,a]\times[0,1]$, при которых вертикальные стороны границ прямоугольников, содержащие начало координат, переходят в вертикальные стороны четырехсторонников, содержащих γ и γ_n соответственно. Пусть дуга $p^{-1}(\Gamma)=\beta$ лежит на стороне Q, содержащей начало координат.

Лемма 3. *На любой поддуге β_0, компактно вложенной в β, имеет место сходимость $(p^{-1}\circ p_n)' \rightrightarrows 1$, $n\to\infty$.*

Доказательство. Пусть f — конформное отображение D на единичный круг E, $g=f^{-1}$, $\Gamma_0 = p(\beta_0)$, $f(\Gamma)=\eta$, $f(\Gamma_0)=\eta_0$. Из условий на Γ и локальной версии результатов Варшавского (см., например, [13, § 3.3]) следует, что существует замкнутая подобласть U в $\overline{E}$, содержащая на границе η_0, в которой $\ln g'(w)$ удовлетворяет условию

$$|\ln g'(w_1)-\ln g'(w_2)| \leq \omega^*(|w_1-w_2|), \quad w_1,w_2\in U, \tag{17}$$

где неубывающая функция ω^* удовлетворяет условию Дини.

Докажем, что при больших n граница области $f(D_n)=G_n$ является гладкой кривой с уравнением $w=w_n(\sigma)$ (σ — длина дуги) такой, что

$$|\arg w_n'(\sigma_1)-\arg w_n'(\sigma_2)| \leq \widetilde{\omega}(|\sigma_1-\sigma_2|), \tag{18}$$

где $\widetilde{\omega}$ удовлетворяет условию Дини и не зависит от n. Достаточно проверить (18) только в точках дуги η_0. Так как $\ln g'(w)$ непрерывна на η_0, то $\ln f'(z)$ непрерывна на Γ_0, поэтому существуют константы m, M такие, что $0<m\leq |f'(z)|\leq M<\infty$, $z\in\Gamma_0$. Для дуговой абсциссы σ кривой $w=w_n(\sigma)$ имеем $\sigma=\int\limits_0^s |f'(z_n(s))|\,ds$, откуда

$$m \leq |d\sigma/ds| \leq M. \tag{19}$$

Кроме того, $g(w_n(\sigma)) = z_n(s)$, откуда $\arg w_n'(\sigma) = \varphi_n(s) - \arg g'(w_n(\sigma))$. Из этого равенства с учетом (17), (19) и (6) следует (18).

Проверим, что для кривых ∂G_n и ∂E выполняется условие ($\mathbf{R}$). Действительно, искомое соответствие имеет вид $f(z)\mapsto f(\psi_n(z))$, где ψ_n — гомеоморфизмы из условия ($\mathbf{R}$) для кривых Γ и Γ_n.

Пусть $h_n : E \to Q_n$, $h : E \to Q$ — конформные отображения, при которых точка $\omega = 0$ переходит в центр прямоугольника, и $h_n'(0) > 0$, $h'(0) > 0$. Нетрудно видеть, что $(h_n^{-1})' \rightrightarrows (h^{-1})'$ на любой дуге в ∂E, расстояние от которой до прообразов вершин Q при отображении h строго больше нуля.

Применим к функциям $k_n = f \circ p_n \circ h_n$ и $k = f \circ p \circ h$ теорему 4. Тогда последовательность производных k_n' сходится равномерно к производной k' в $\overline{E}$. В силу того, что $p^{-1} \circ p_n = h \circ k^{-1} \circ k_n \circ h_n^{-1}$, последовательность производных этих функций равномерно сходится к единице на β_0. $\square$

Следствие 1. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Тогда*

$$m(D_n) - m(D) \sim -\Sigma_n, \quad n \to \infty,$$

где Σ_n *— площадь* $D \setminus D_n$ *в метрике* $\rho(z) = |(p^{-1})'(z)|$.

Следствие 2. *Пусть выполняются условия леммы* 3. *Если вдавливается горизонтальная сторона, а не вертикальная, то*

$$m(D_n) - m(D) \sim \Sigma_n, \quad n \to \infty.$$

Теперь установим аналог леммы 2 для двусвязных областей. Нам будет необходима следующая

Лемма 4. *Пусть* γ *— (вообще говоря, разомкнутая) кривая в кольце* $G(R) = \{re^{i\theta} : 1 < r < R,\, 0 \le \theta \le 2\pi\}$, *концы которой лежат на положительной части вещественной оси, и изменение* $\arg z$ *вдоль этой кривой не равно нулю. Тогда* $\int\limits_\gamma |dz|/|z| \ge 2\pi$.

Доказательство следует из хорошо известных неравенства и соотношений $\int\limits_\gamma |dz|/|z| = \int\limits_\gamma |d \ln z| \ge \int\limits_\gamma |d \arg z| = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \ne 0$.

Пусть $1 < x_0 < R$. Обозначим через $G(R, x_0)$ кольцо $G(R) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < R\}$ с радиальным разрезом от точки 1 до точки x_0.

Пусть D — двусвязная подобласть в $G(R, x_0)$, граница которой получается из $\partial G(R, x_0)$ заменой некоторой дуги η единичной окружности жордановой дугой $\tilde\eta$, лежащей внутри $G(R, x_0)$ (за исключением концов), и $\Omega = G(R, x_0) \setminus D$. Пусть f — конформное отображение области $G(\widetilde{R}, \tilde{x}_0)$ на D, при котором окружность радиуса $\widetilde{R}$ переходит в окружность радиуса R, а разрез вдоль отрезка $[0, \tilde{x}_0]$ — в разрез вдоль отрезка $[0, x_0]$.

Лемма 5. *Величины* $\widetilde{R}$ *и* R *связаны неравенством*

$$\frac{1}{2\pi} \ln \widetilde{R} \le \frac{1}{2\pi} \ln R - \frac{1}{4\pi^2} \Sigma, \tag{20}$$

где $\Sigma = \iint\limits_\Omega |z|^{-2}\, dxdy$ *— площадь* Ω *в метрике* $\rho(z) = |z|^{-1}$. *Если* $E = f^{-1}(\tilde\eta)$, *производная* f' *существует во всех точках* E *и* $c = \inf\limits_E \operatorname{Re}[wf'(w)/f(w)] > 0$, *то*

$$\frac{1}{2\pi} \ln \widetilde{R} \ge \frac{1}{2\pi} \ln R - \frac{1}{4\pi^2 c^2} \Sigma. \tag{21}$$

Доказательство. Обозначим через Γ_1 семейство всех окружностей вида $\gamma_r = \{|w| = r\}$, лежащих в кольце $G(\widetilde{R})$. Тогда, как нетрудно видеть, экстремальная длина этого семейства $\lambda(\Gamma_1)$ равна $2\pi/\ln \widetilde{R}$. Рассмотрим семейство кривых $\widetilde{\Gamma}_1$, которые являются образами этих окружностей при отображении f. В силу леммы 4 $L(\rho^*, \widetilde{\Gamma}_1) \geq 2\pi$, где $\rho^*(z) = \chi_D(z)|z|^{-1}$, а $A(\rho^*) = 2\pi \ln R - \Sigma$. Ввиду конформной инвариантности экстремальных длин

$$\frac{2\pi}{\ln \widetilde{R}} = \lambda(\Gamma_1) = \lambda(\widetilde{\Gamma}_1) \geq \frac{L^2(\rho^*, \widetilde{\Gamma}_1)}{A(\rho^*)} \geq \frac{4\pi^2}{2\pi \ln R - \Sigma},$$

откуда следует (20).

Для доказательства неравенства (21) рассмотрим семейство Γ всех окружностей γ_r, лежащих в $G(R)$, и метрику

$$\hat{\rho}(z) = \begin{cases} |g'(z)/g(z)|, & z \in \overline{D}, \\ 1/(c|z|), & z \in \Omega, \\ 0, & z \notin Q, \end{cases}$$

где $g = f^{-1}$.

Как и при доказательстве леммы 2, показываем, что инфимум длин кривых семейства Γ достигается на тех окружностях, которые лежат в D. Таким образом, с учетом леммы 4

$$L(\Gamma, \hat{\rho}) = \int_{\gamma_r} |g'(z)/g(z)||dz| = \int_{g(\gamma_r)} |dw/w| \geq 2\pi.$$

Кроме того, $A(\hat{\rho}) = 2\pi \ln \widetilde{R} + \Sigma/c^2$. Окончательно имеем

$$\frac{2\pi}{\ln R} = \lambda(\Gamma) \geq \frac{L^2(\Gamma, \hat{\rho})}{A(\hat{\rho})} \geq \frac{4\pi^2}{2\pi \ln \widetilde{R} + \Sigma/c^2},$$

откуда вытекает необходимое неравенство. $\square$

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 6. *Пусть D — двусвязная подобласть в $G(R, x_0)$, граница которой получается из $\partial G(R, x_0)$ заменой некоторой дуги η на разрезе вдоль отрезка $[1, x_0]$, рассматриваемой в топологии простых концов, жордановой дугой $\tilde{\eta}$, лежащей внутри $G(R, x_0)$ (за исключением концов), и $\Omega = G(R, x_0) \backslash D$. Пусть f — то же конформное отображение, что и лемме 5. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \ln \widetilde{R} \geq \frac{\ln^2 R}{2\pi \ln R - \Sigma} \geq \frac{1}{2\pi} \ln R + \frac{1}{4\pi^2}\Sigma, \tag{22}$$

где Σ — площадь Ω в метрике $\rho(z) = |z|^{-1}$. Если $E = f^{-1}(\tilde{\eta})$, f' существует во всех точках E и $c = \inf_E \operatorname{Re}[wf'(w)/f(w)] > 0$, то

$$\frac{1}{2\pi} \ln \widetilde{R} \leq \frac{\ln^2 R}{2\pi \ln R - \Sigma/c^2}. \tag{23}$$

Перейдем к изучению приведенных модулей и вариаций Робена.

Напомним определение этих понятий. Пусть D — односвязная область в расширенной комплексной плоскости, содержащая бесконечно удаленную точку, граница которой невырожденна. Будем рассматривать границу ∂D в топологии простых концов области D. Пусть A — некоторое подмножество ∂D. Для достаточно больших R граница ∂D лежит в круге K_R радиуса R с центром в начале координат. Пусть Γ_R — семейство кривых, лежащих в $D \cap K_R$ и соединяющих A с окружностью $C_R = \{z : |z| = R\}$, $\lambda(\Gamma_R)$ — экстремальная длина семейства Γ_R. Можно показать, что существует

$$\lim_{R\to\infty} [\lambda(\Gamma_R) - (1/2\pi) \ln R] \doteqdot \mu(A; D).$$

Величину $\mu(A; D)$ назовем *приведенным модулем* множества A относительно области D (см. [12]), а константу $\sigma(A; D) = e^{-2\pi\mu(A;D)}$ — *емкостью Робена* множества A относительно области D (см., например, [3–5]).

Обозначим через $G(\infty, x_0)$ внешность единичного круга с радиальным разрезом от точки 1 до точки $x_0 > 1$.

Пусть D — односвязная подобласть в $G = G(\infty, x_0)$, граница которой получается из $\partial G(\infty, x_0)$ заменой некоторой дуги η единичной окружности жордановой дугой $\tilde{\eta}$, лежащей внутри $G(\infty, x_0)$ (за исключением концов), и $\Omega = G(\infty, x_0)\backslash D$. Пусть f— конформное отображение области $G(\infty, \tilde{x}_0)$ на D, при котором $f(\infty) = \infty$, а разрез вдоль отрезка $[0, \tilde{x}_0]$ переходит в разрез вдоль отрезка $[0, x_0]$.

Лемма 7. *Пусть A — часть границы области G, совпадающая с единичной окружностью, $\widetilde{A}$ получается из A заменой η на $\tilde{\eta}$. Тогда*

$$\mu(\widetilde{A}; D) \le -\frac{1}{4\pi^2}\Sigma, \tag{24}$$

где Σ — площадь Ω в метрике $\rho(z) = |z|^{-1}$. Если

$$E = f^{-1}(\tilde{\eta}), \quad c = \inf_E \operatorname{Re}[wf'(w)/f(w)] > 0$$

(f' существует во всех точках E), то

$$\mu(\widetilde{A}; D) \ge -\frac{1}{4\pi^2 c^2}\Sigma. \tag{25}$$

Доказательство. Покажем, как с помощью леммы 5 можно вывести неравенства (24) и (25) (при доказательстве последнего будем предполагать дополнительно, что f' существует во всех точках E). Пусть K_R — круг достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, $D_R = D \cup K_R$. Пусть f_R — конформное отображение области $G(\widetilde{R}, \tilde{x}_0)$ на D_R, описанное в лемме 5, $c_R = \inf_{E_R} \operatorname{Re}[wf'_R(w)/f_R(w)]$, где $E_R = f_R^{-1}(\tilde{\eta})$. В силу леммы 5

$$-\frac{1}{4\pi^2 c_R^2}\Sigma \le \frac{1}{2\pi} \ln \widetilde{R} - \frac{1}{2\pi} \ln R \le -\frac{1}{4\pi^2}\Sigma, \tag{26}$$

где Σ — площадь $\Omega = G\backslash D$ в метрике $\rho(z) = |z|^{-1}$.

При $R \to \infty$ имеем $(1/2\pi) \ln \widetilde{R} - (1/2\pi) \ln R \to \mu(\widetilde{A}; D)$, $c_R \to c$. $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда меняется граница области $G(\infty, x_0)$, соответствующая разрезу.

Пусть D — односвязная подобласть в $G = G(\infty, x_0)$, граница которой получается из ∂G заменой некоторой дуги η на разрезе вдоль отрезка $[1, x_0]$, рассматриваемой в топологии простых концов, жордановой дугой $\tilde{\eta}$, лежащей внутри $G(R, x_0)$ (за исключением концов), и $\Omega = G(R, x_0)\backslash D$. Пусть f— то же конформное отображение области, что и в предыдущей лемме.

Лемма 8. *Пусть A — часть границы области G, совпадающая с единичной окружностью. Тогда*

$$\mu(A;D) \geq \frac{1}{4\pi^2}\Sigma, \tag{27}$$

где Σ — площадь Ω в метрике $\rho(z) = |z|^{-1}$. Если $E = f^{-1}(\tilde{\eta})$, f' существует во всех точках E и $c = \inf\limits_E \operatorname{Re}[wf'(w)/f(w)] > 0$, то

$$\mu(A;D) \leq \frac{1}{4\pi^2 c^2}\Sigma. \tag{28}$$

Из лемм 3 и 7 сразу вытекает следующее ниже утверждение о вариации емкостей Робена, которое мы сформулируем для однопараметрических семейств областей.

Пусть D — жорданова область в $\overline{\mathbb{C}}$, включающая бесконечно удаленную точку, и ∂D содержит на границе дугу A. Пусть η — ее замкнутая поддуга и семейство областей D_t, $0 < t \leq t_0$, получается из D «вдавливанием» дуги η внутрь области D, т. е. граница ∂D_t получается из ∂D заменой дуги η дугой η_t, лежащей в D, за исключением концов. Обозначим через A_t часть границы области D_t, которая получается из A заменой η на η_t. Пусть Ω_t — конечная область, ограниченная η и η_t. Обозначим через g конформное отображение D на область $G(\infty, x_0)$, при котором ∞ переходит в ∞, дуга A — в единичную окружность, а ее дополнение — в разрез $[0, x_0]$.

Теорема 5. *Справедливы неравенства*

$$\mu(A_t;D_t) - \mu(A;D) \leq -\frac{1}{4\pi^2}\Sigma_t, \quad \sigma(A_t;D_t) - \sigma(A;D) \geq \frac{1}{2\pi}\sigma(A;D)\Sigma_t,$$

где Σ_t — площадь области Ω_t в метрике $\rho(z) = |g'(z)/g(z)|$. Если предположить дополнительно, что η содержится в некоторой открытой гладкой поддуге A и семейство η_t, $0 < t \leq t_0$, состоит из гладких дуг, удовлетворяющих условию $(\widetilde{\mathbf{R}})$, то тогда

$$\mu(A_t;D_t) - \mu(A;D) = -\frac{1}{4\pi^2}\Sigma_t(1 + o(1)), \quad t \to 0,$$

$$\sigma(A_t;D_t) - \sigma(A;D) = \frac{1}{2\pi}\sigma(A;D)\Sigma_t(1 + o(1)), \quad t \to 0.$$

Совершенно аналогично можно исследовать асимптотическое поведение приведенных модулей $\mu(A;D)$ и емкостей Робена $\sigma(A;D)$ в случае, когда вдавливается часть границы, дополнительная к A.

Пусть опять D — жорданова область в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая бесконечно удаленную точку, и ∂D содержит на границе дугу A, а B — дополнение A в ∂D. Пусть g — конформное отображение D на область $G(\infty, x_0)$, при котором ∞ переходит в ∞, дуга A — в единичную окружность, а B — в разрез $[0, x_0]$. Пусть P — точка B, которая переходит в конец разреза — точку x_0. Назовем P *сингулярной точкой Робена* для конфигурации $(D;A)$. Рассмотрим семейство областей D_t, $0 < t \leq t_0$, которое получается из D «вдавливанием» некоторой замкнутой дуги η, являющейся частью открытой дуги, содержащейся в $B\backslash\{P\}$, внутрь области D, так же, как и в следствии 2. Пусть Σ_t — площадь области $\Omega_t = D\backslash D_t$ в метрике $\rho(z) = |g'(z)/g(z)|$, причем $\Sigma_t \to 0$, $t \to 0$.

Теорема 6. *При сделанных предположениях*

$$\mu(A;D_t)-\mu(A;D)\geq \frac{1}{4\pi^2}\Sigma_t,$$

$$\sigma(A;D_t)-\sigma(A;D)\leq -\frac{1}{2\pi}\sigma(A;D)\Sigma_t(1+o(1)),\quad t\to 0.$$

Если дополнительно предположить гладкость η и вдавленных участков границы областей D_t, а также гладкость вариаций границы, как и в предыдущей теореме (условие $(\widetilde{\mathbf{R}})$ для соответствующих участков), то тогда

$$\mu(A;D_t)-\mu(A;D)=\frac{1}{4\pi^2}\Sigma_t(1+o(1)),\quad t\to 0,$$

$$\sigma(A;D_t)-\sigma(A;D)=-\frac{1}{2\pi}\sigma(A;D)\Sigma_t(1+o(1)),\quad t\to 0.$$

В заключение этого пункта сформулируем две задачи, представляющие, на наш взгляд, интерес.

Задача 1. *Как изменяются приведенные модули и емкости Робена в случае гладких вариаций дополнительной части границы B, если варьируемая дуга η содержит внутри себя сингулярную точку Робена?*

Задача 2. *Как изменяются приведенные модули и емкости Робена в случае негладких вариаций границы?*

Следующий пример показывает, что в случае негладких вариаций изменение этих величин может быть никак не связано с изменением площади.

Пример. Пусть D_t — внешность единичного круга с двумя разрезами вдоль отрезков вещественной оси $\Delta=[1,x_0]$ и $\Delta_t=[-1-t,-1]$, $t\geq 0$. Пусть A — часть границы D_t, состоящая из единичной окружности и отрезка Δ_t. Посчитаем $\mu(A;D_t)$. Отобразим D_t конформно на $G(\infty,\tilde{x}_0)$ с помощью функции

$$w=\frac{\sqrt{(z+a)(z+a^{-1})}+(z-1)}{\sqrt{(z+a)(z+a^{-1})}-(z-1)},\quad a=1+t,$$

при этом $w(\infty)=\infty$. В окрестности ∞ имеет место разложение

$$w=\frac{4a}{(1+a)^2}z+\cdots,$$

откуда

$$\mu(A;D_t)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{4a}{(1+a)^2}=-\frac{1}{8\pi}t^2+o(t^2),\quad t\to 0.$$

Следовательно, изменение приведенного модуля пропорционально квадрату длины разреза вдоль отрезка Δ_t, при этом площадь Σ_t тождественно равна нулю.

4. Оценка модуля производной на вогнутой части дуги

При оценке вариации подъемной силы выпуклой дужки, вызванной изменением ее формы, необходимо оценить вариацию емкостей Робена верхнего и нижнего берегов разреза относительно внешности профиля (см. теорему 2). Из результатов предыдущего пункта следует, что для этого нужно уметь получать оценки площади варьируемой области во вполне определенной метрике. Для этого необходимо оценить модуль производной $|f'|$ конформного отображения внешности единичного профиля на внешность дуги. Оценка $|f'|$ на части границе единичного круга, соответствующей верхнему берегу разреза (выпуклой части), может быть получена с помощью оценок при отображении внешности круга на области с выпуклым дополнением и известного принципа Линделёфа, как это сделано в [1, лемма 5]. В этом пункте в лемме 10 мы получим оценку модуля производной для нижнего берега разреза (вогнутой части).

Рассмотрим дугу γ с концами 0, κ, такую, что $0 \le K(s) \le K_0$, $0 \le s \le l$, где $K(s)$ — ее кривизна, причем $K_0 l \le c < \pi/4$. Пусть $f : E^- \to \mathbb{C}\backslash\gamma$ — конформное отображение, $f(\infty) = \infty$, $f(1) = \kappa$, $f(e^{i\varphi}) = 0$ (рис. 1).

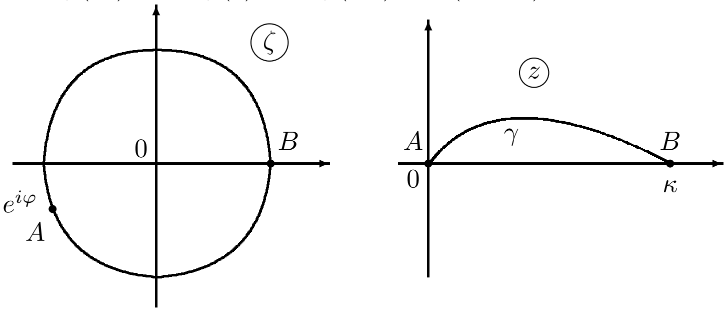

Рис. 1.

Пусть
$$z(s) = z(0) + \int_0^s e^{i\alpha(\sigma)}\,d\sigma, \quad 0 \le s \le l,$$
— уравнение γ. Докажем, что $\kappa \le l \le \frac{\kappa}{\cos c}$. Действительно,
$$\kappa = \left| \int_0^l e^{(i\alpha(\sigma)-\alpha(0))}\,d\sigma \right| \ge \left| \int_0^l \cos(\alpha(\sigma) - \alpha(0))\,d\sigma \right| \ge l\cos(\alpha(l) - \alpha(0)) \ge l\cos c.$$

Пусть $z_0 = z(s_0) \in \gamma$ — фиксированная точка. Построим окружность C_R радиуса $R = \kappa/c \le l/c$, касающуюся γ в точке z_0 с вогнутой стороны. Тогда кривизна C_R удовлетворяет неравенству $K \ge c/l \ge K_0 \ge K(s)$, $0 \le s \le l$. Отсюда следует, что C_R пересекается с γ только в одной точке — точке z_0.

Рассмотрим касательную к C_R в точке z_0 и проведем через концы γ и центр окружности C_R лучи. Тогда γ содержится в множестве, ограниченном дугой окружности AB, отрезком CD касательной к γ в точке z_0 и отрезками AD и BC, где A, B — точки пересечения лучей с окружностью, а C, D — с касательной (рис. 2).

Так как длина γ равна l, то раствор δ угла DEC не превосходит величины $2\operatorname{arctg}(l/(2R))$. Действительно, $\delta_1 = \angle FEC$ — это угол между векторами $z(s_0) - z(0) + iRe^{i\alpha(s_0)}$ и $iRe^{i\alpha(s_0)}$. Так как $z(s_0) - z(0) = \kappa_1 e^{i\alpha(s_1)}$, где $\kappa_1 = |z(s_0) - z(0)|$, для некоторого $s_1 \in [0, s_0]$, то
$$\delta_1 = |\arg\langle \kappa_1 e^{i\alpha(s_1)} + iRe^{i\alpha(s_0)}, iRe^{i\alpha(s_0)}\rangle| = |\arg[1 - i(\kappa_1/R)e^{i(\alpha(s_1)-\alpha(s))}]| = \operatorname{arctg}\frac{(\kappa_1/R)\cos(\alpha(s_1) - \alpha(s))}{1 + \sin(\alpha(s_1) - \alpha(s))} \le \operatorname{arctg}\frac{\kappa_1}{R} \le \operatorname{arctg}\frac{l_1}{R},$$
где l_1 — длина участка кривой γ между точками F и κ.

Аналогично $\delta_2 = \angle FED \leq \operatorname{arctg} \frac{l_2}{R}$, где l_2 — длина участка кривой γ между точками F и 0.

Тогда $\delta = \delta_1 + \delta_2 \leq \operatorname{arctg} \frac{l_1}{R} + \operatorname{arctg} \frac{l_2}{R} \leq 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2R}$, так как $l_1 + l_2 = l$.

Итак, $\delta \leq 2 \operatorname{arctg} \frac{l}{2R}$.

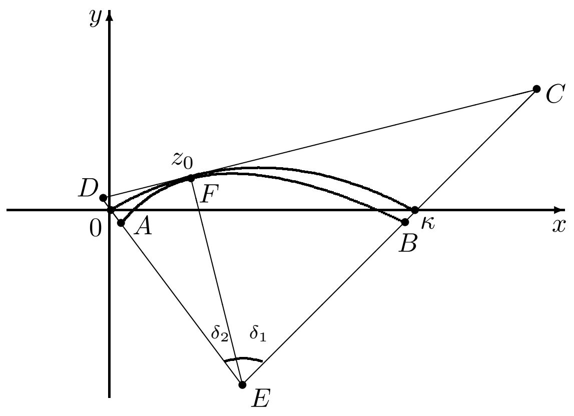

Рис. 2.

Рассмотрим четырехугольник $\Pi = ABCD$. Преобразование

$$w = \psi(z) = \frac{Re^{i\alpha(s_0)}}{z - z_0} \tag{29}$$

переводит его в объединение $T = T_1 \cup T_2$ двух криволинейных полуполос (рис. 3). Обозначим образы соответствующих вершин четырехугольника также через A, B, C и D. Аффиксы этих точек равны $(-\operatorname{ctg}(\delta_2/2) + i)/2$, $(\operatorname{ctg}(\delta_1/2) + i)/2$, $\operatorname{ctg} \delta_1$ и $-\operatorname{ctg} \delta_2$. Отметим, что дуги AD и BC ортогональны прямой $\operatorname{Im} w = 1/2$ и образуют острые углы с вещественной осью.

Обозначим через $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ точки в w-плоскости с аффиксами $\operatorname{ctg} \delta_1 + i/2$ и $-\operatorname{ctg} \delta_2 + i/2$.

Проведем в плоскости w две круговые дуги C_1 и C_2 с концами $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$: первая проходит через точку O, вторая ортогональна прямой $\widetilde{A}\widetilde{B}$, причем C_1 и C_2 расположены ниже отрезка $\widetilde{A}\widetilde{B}$ (рис. 3). Оценим угол $\alpha\pi$ круговой луночки, образованной отрезком $\widetilde{A}\widetilde{B}$ и C_1. Обозначим $a_k = \operatorname{ctg} \delta_k$, $k = 1, 2$. Нетрудно убедиться, что $\sin \alpha\pi = (a_1 + a_2)/(2r)$, где $r = \sqrt{(a_1^2 + 1/4)(a_2^2 + 1/4)}$ — радиус окружности, описанной около треугольника $\widetilde{A}\widetilde{B}O$.

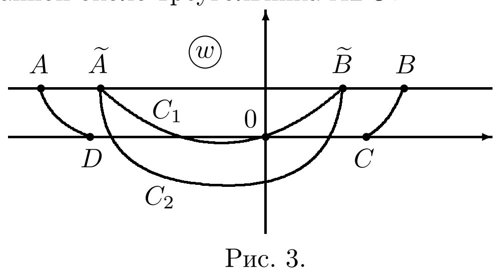

Рис. 3.

Следовательно,

$$\sin \alpha\pi \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} \delta_1 + \operatorname{tg} \delta_2) \leq \frac{1}{2R}(l_1 + l_2) = \frac{cl}{2\kappa} \leq \frac{c}{2\cos c}. \tag{30}$$

Теперь нам будет необходима оценка производной конформного отображения внешности единичного круга E^- на внешность круговой луночки L. Будем считать, что L лежит в верхней полуплоскости и ограничена двумя дугами окружностей, пересекающихся в точках (-1) и 1, причем одна из дуг Γ_1 образует с отрезком $[-1,1]$ угол $\alpha\pi$, а другая Γ_2 — угол $(\alpha+1/2)\pi$.

Лемма 9. *Пусть $z=z(\zeta)$ — конформное отображение E^- на внешность L, при котором $z(\infty)=\infty$, причем дуге Γ_1 соответствует дуга $q=\{e^{i\eta}\mid|\eta-3\pi/2|\le\nu_0\}$. Тогда*

$$\max_{\zeta\in q}|z'(\zeta)|=|z'(-i)|=\frac{3\operatorname{ctg}[\pi(1-2\alpha)/6]}{4\cos^2(\pi\alpha/2)}.$$

Доказательство. Отображение $z(\zeta)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{z-1}{z+1}=\left(\frac{\zeta_1-1}{\zeta_1+1}\right)^{3/2}, \tag{31}$$

где $\zeta_1=(\zeta+i\cos\pi\xi)/\sin\pi\xi$, $\xi=(1-2\alpha)/3$. Из (31) следует, что

$$\frac{dz(\zeta)}{d\zeta}=\frac{3}{2\sin\pi\xi}\frac{z^2-1}{\zeta_1^2-1}. \tag{32}$$

Пусть $\omega=(\zeta_1-1)/(\zeta_1+1)$. На участке границы, соответствующем q, имеем $\theta=\arg\omega=\pi\xi-\pi=\mathrm{const}$. Поэтому

$$\zeta_1=\frac{1+xe^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}},\quad z=\frac{1+x^{3/2}e^{i3\theta/2}}{1-x^{3/2}e^{i3\theta/2}},\quad x\ge0,$$

откуда

$$\left|\zeta_1^2-1\right|=\frac{4x}{1-2x\cos\theta+x^2},\quad |z^2-1|=\frac{4x^{3/2}}{1-2x^{3/2}\cos(3\theta/2)+x^3}.$$

В силу (32) утверждение леммы эквивалентно неравенству

$$\psi(x)\le\psi(1),\quad x\ge0, \tag{33}$$

где

$$\psi(x)=x^{1/2}\frac{1-2x\cos\theta+x^2}{1-2x^{3/2}\cos(3\theta/2)+x^3}.$$

Ввиду симметрии достаточно доказать (33) при $x\in[0,1]$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$h(t)=\psi(t^2)=\frac{t^5-2\cos\theta t^3+t}{t^6-2\cos(3\theta/2)t^3+1}=\frac{\tau^2-2(1+\cos\theta)}{\tau^3-3\tau-2\cos(3\theta/2)},\quad \tau=t+\frac{1}{t}.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{\tau^2-2(1+\cos\theta)}{\tau^3-3\tau-2\cos(3\theta/2)}\le\frac{1}{A},\quad \tau\ge2,$$

где $A=(1-\cos(3\theta/2))/(1-\cos\theta)$. Отметим, что $A\le9/4$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\varphi(\tau)=\tau^3-A\tau^2-3\tau+2A(1+\cos\theta)-2\cos(3\theta/2)\ge0,\quad \tau\ge2,$$

которое верно, так как $\varphi(2)=0$, $\varphi'(\tau)=3\tau^2-2A\tau-3\ge0$, $\tau\ge2$. $\square$

Теперь рассмотрим область $\widetilde{G}$ в w-плоскости, ограниченную двумя горизонтальными лучами с вершинами в точках $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и полуокружностью C_2 и лежащую ниже этих лучей и C_2. Тогда $\widetilde{G}\subset G=\mathbb{C}\setminus T$. Следовательно, если обозначить через L круговую луночку, являющуюся прообразом $\widetilde{G}$ при отображении (29), то $\gamma\subset\Pi\subset L$ и $\mathbb{C}\setminus L\subset\mathbb{C}\setminus\gamma$, причем граница области $\mathbb{C}\setminus L$ касается вогнутой части γ в точке z_0. Из принципа Линделёфа и леммы 9 с α, удовлетворяющим (30), получаем следующее утверждение.

Лемма 10. *Пусть $f : E^- \to \mathbb{C}\backslash\gamma$ — конформное отображение такое, что $f(\infty) = \infty$, $f(1) = \kappa$, $f(e^{i\varphi}) = 0$. Тогда*

$$|f'(e^{i\theta})| \leq \frac{3l \operatorname{ctg}[\pi(1-2\alpha)/6]}{8\cos^2(\pi\alpha/2)}, \quad \varphi \leq \theta \leq 2\pi.$$

5. Вариация подъемной силы

Применим полученные выше результаты к исследованию обобщенной задачи М. А. Лаврентьева о форме дужки максимальной подъемной силы P.

Напомним идею исследования задачи, предложенную в [1]. Пусть для кривизны выпуклой вверх дуги γ, имеющей концы в точках 0 и κ, имеет место неравенство (4) и функция $K(s)$ отлична от $\psi(s)$ на множестве положительной меры, лежащем на $[0, l]$. Придадим $K(s)$ приращение $\delta K = \delta\varepsilon\chi_{[s_1,s_2]}(s)$, где $\chi_{[s_1,s_2]}$ — характеристическая функция отрезка $[s_1, s_2]$, на котором имеет место строгое неравенство $K(s) < \psi(s)$, $s' = (s_1+s_2)/2$, $\delta\varepsilon > 0$ произвольно. Пусть дуга γ^* с концами в точках 0 и κ^* имеет кривизну $K^*(s) = K(s)+\delta K(s)$. Рассмотрим дугу γ_1, которая получается из γ^* линейным преобразованием $w = az$, где $a = \kappa/\kappa^*$. Отметим, что кривая γ_1 имеет те же концы, что и γ, а во внутренних точках эти кривые не пересекаются. Обозначим через Ω область, ограниченную кривыми γ и γ_1.

Оценим вариацию подъемной силы при замене дуги γ дугой γ^*. Замену γ на γ^* осуществим в три этапа.

1. Замена верхнего берега разреза γ^+ на γ_1^+.
2. Замена нижнего берега разреза γ^- на γ_1^-.
3. Замена γ_1 на γ^*.

Пусть h_1 — конформное отображение E^- на внешность единичного круга с радиальным разрезом, исходящим из точки 1, при котором $h(\infty) = \infty$, участок границы $T_1 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \varphi\}$ переходит в разрез, а его дополнение T_2 — в единичную окружность. Через h_2 обозначим аналогичное отображение, при котором T_2 переходит в радиальный разрез, а T_1 — в окружность.

Пусть при конформном отображении f_1 внешности γ_1 на E^- таком, что $f_1(\infty) = \infty$, верхнему берегу разреза соответствует участок границы $T_3 = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \varphi_1\}$, его дополнение до единичной окружности обозначим через T_4. Обозначим через h_3 (h_4) конформные отображения E^- на внешности единичного круга с радиальными разрезами, при которых бесконечность переходит в бесконечность, T_3 — в разрез (окружность), T_4 — в окружность (разрез).

Пусть $\rho_k(z)|dz| = |d\ln h_k \circ f(z)|$, $k = 1, 2$, $\rho_k(z)|dz| = |d\ln h_k \circ f_1(z)|$, $k = 3, 4$. Имеем $P = d|\cos(\varphi/2)| = e^{-2\pi\mu_1} - e^{-2\pi\mu_2}$, где d — трансфинитный диаметр γ,

$$\mu_1 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{d\sin^2(\varphi/4)}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{d\cos^2(\varphi/4)}.$$

Обозначим через $\delta_k P$ вариацию подъемной силы на k-м этапе. С использованием теорем 5 и 6 получаем с точностью до малых более высокого порядка

$$\begin{aligned}\delta_1 P = -2\pi(e^{-2\pi\mu_1}\delta\mu_1 - e^{-2\pi\mu_2}\delta\mu_2) = 2\pi(d\sin^2(\varphi/4)\delta\mu_1 - d\cos^2(\varphi/4)\delta\mu_2)\\ \geq \frac{d}{2\pi}(\sin^2(\varphi/4)S_{\rho_2}(\Omega) + \cos^2(\varphi/4)S_{\rho_1}(\Omega)).\end{aligned}$$

Аналогично

$$\delta_2 P \geq \frac{d_1}{2\pi}(\sin^2(\varphi_1/4)S_{\rho_4}(\Omega) + \cos^2(\varphi_1/4)S_{\rho_3}(\Omega)),$$

где d_1 — трансфинитный диаметр γ_1. Пусть $\widetilde{P}$ — подъемная сила γ^*, $\kappa^* = \kappa + \delta\kappa$. Тогда

$$\delta_* P = \delta_1 P + \delta_2 P = \frac{\kappa}{\kappa + \delta\kappa}\widetilde{P} - P = \widetilde{P} - P - \frac{\delta\kappa}{\kappa}\widetilde{P} = \delta P + \left|\frac{\delta\kappa}{\kappa}\right| P.$$

Обозначим для краткости $S_k = S_{\rho_k}(\Omega)$, $1 \le k \le 4$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\delta P = \delta_* P - \left|\frac{\delta\kappa}{\kappa}\right| P &\ge \frac{d}{2\pi}\left[\sin^2\frac{\varphi}{4}(S_2+S_4) + \cos^2\frac{\varphi}{4}(S_1+S_3)\right] - \left|\frac{\delta\kappa}{\kappa}\right| P \\ &= \frac{d}{2\pi}\sin^2\frac{\varphi}{4}\left[\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4}(S_2+S_4) + S_1 + S_3 - 2\pi\left|\frac{\delta\kappa}{\kappa}\right|\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{4} - 1\right)\right]. \qquad (34)\end{aligned}$$

Рассуждая, как и в [1] (с использованием леммы 10 при оценке S_3 и S_4), получаем

$$|\delta\kappa| \le \frac{c_0 l}{2\kappa}\Delta, \quad S_1 \ge 2C_1\cos^3 c_0 \Delta \int_0^{\varphi/2} \eta(\theta) R_-(\theta,\varphi)\, d\theta,$$

$$S_2 \ge 2C_1\cos^3 c_0 \Delta \int_0^{\varphi/2} \eta(\theta) R_+(\theta,\varphi)\, d\theta,$$

$$S_3 \ge 2C_2\cos^3 c_0 \Delta \int_{\pi+\varphi/2}^{2\pi} \eta(2\pi-\theta) R_+(\theta,\varphi)\, d\theta,$$

$$S_4 \ge 2C_2\cos^3 c_0 \Delta \int_{\pi+\varphi/2}^{2\pi} \eta(2\pi-\theta) R_-(\theta,\varphi)\, d\theta,$$

где $\Delta = (s_2 - s_1)\min[s', l - s']\delta\varepsilon$,

$$\eta(\theta) = \sin^2\{8(\operatorname{arctg}[\operatorname{tg}^Q(\theta/16)] - \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}^{3Q}(\theta/16)])\},$$

$$Q = (2 + \operatorname{tg}^2 c_0 + \operatorname{tg} c_0\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 c_0})/2,$$

$$R_-(\theta,\varphi) = \frac{\sin^2(\theta/2 - \varphi/4)}{\sin(\theta/2)\sin[(\varphi-\theta)/2]}, \quad R_+(\theta,\varphi) = \frac{\cos^2(\theta/2 - \varphi/4)}{\sin(\theta/2)\sin[(\varphi-\theta)/2]},$$

$$C_1 = \frac{\sin\pi\beta}{\beta}, \quad C_2 = \frac{8}{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi\alpha}{3}\right)\cos^2\frac{\pi\alpha}{2}\cos c_0,$$

$$\pi\alpha = \arcsin\frac{c_0}{2\cos c_0}, \quad \beta = \pi/(2(\pi - c_0)).$$

В силу (34) неравенство $\delta P > 0$ имеет место, если

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \ge 2\pi\left|\frac{\delta\kappa}{\kappa}\right|\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{4} - 1\right), \qquad (35)$$

где $\varphi_0 = \pi + 2\arcsin((2c_0/\pi)\cos c_0)$. Неравенство (35) выполнено, если верно неравенство

$$\begin{aligned}&2\cos^3 c_0\left[C_1\int_0^{\varphi/2}\eta(\theta)\left[R_-(\theta,\varphi) + R_+(\theta,\varphi)\right]d\theta\right. \\ &\left.+ C_2\int_0^{\pi-\varphi/2}\eta(\theta)\left[R_-(2\pi-\theta,\varphi) + R_-(2\pi-\theta,\varphi)\right]d\theta\right] \ge \pi\frac{c_0 l}{\cos c_0}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{4} - 1\right).\end{aligned}$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$C_1 \int\limits_0^{\varphi/2} \frac{\eta(\theta)\,d\theta}{\sin(\theta/2)\sin[(\varphi-\vartheta)/2]} + C_2 \int\limits_0^{\pi-\varphi/2} \frac{\eta(\theta)\,d\theta}{\sin(\theta/2)\sin[(\varphi+\vartheta)/2]}$$
$$\geq \frac{\pi c_0}{2\cos^4 c_0}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{4} - 1\right).$$

В свою очередь, оно будет выполняться, если

$$C_1 \int\limits_{\varphi_0-\pi}^{\varphi/2} \frac{\eta(\theta)\,d\theta}{\sin(\theta/2)\sin[(\varphi_0-\vartheta)/2]} + C_2 \int\limits_0^{\pi-\varphi_0/2} \frac{\eta(\theta)\,d\theta}{\sin(\theta/2)\cos(\vartheta/2)}$$
$$\geq \frac{\pi c_0}{2\cos^4 c_0}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0}{4} - 1\right). \quad (36)$$

Заменяя в (36) знак неравенства знаком равенства и решая полученное уравнение, приходим к значению $c_0 = 0{,}30284265\ldots$. Это доказывает теорему 3.

Автор благодарен Ф. Г. Авхадиеву, В. Н. Дубинину и Б. Л. Левицкому за ценные замечания, способствовавшие улучшению статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nasyrov S. R.* Robin capacity and lift of infinitely thin airfoils // Complex Variables. 2002. V. 47, N 2. P. 93–107.
2. *Лаврентьев М. А.* Об одной экстремальной задаче в теории крыла аэроплана. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1934. (См. также Лаврентьев М. А. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1990. С. 405–450).
3. *Duren P. L., Schiffer M. M.* Robin functions and energy functionals of multiply connected domains // Pacific J. Math. 1991. V. 148, N 2. P. 251–273.
4. *Duren P. L., Schiffer M. M.* Robin functions and distortion of capacity under conformal mapping // Complex Variables. 1993. V. 21, N 3–4. P. 189–196.
5. *Duren P. L., Pfaltzgraff J.* Robin capacity and extremal length // J. Math. Ana. Appl. 1993. V. 179, N 1. P. 110–119.
6. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
8. *Lanza de Cristoforis M.* A functional decomposition theorem for the conformal representation // J. Math. Soc. Japan. 1997. V. 49, N 4. P. 759–780.
9. *Reich E., Walczak H. R.* On the behavior of quasiconformal mappings at a point // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 117, N 2. P. 338–351.
10. *Солынин А. Ю.* Модули и экстремально-метрические проблемы // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 1. С. 3–86.
11. *Barnard R. W., Solynin A. Yu.* Local variations and minimal area problem for Carathéodory functions // Indiana Univ. Math. J. 2004. V. 53, N 1. P. 135–165.
12. *Ahlfors L. V.* Conformal invariants: topics in geometric function theory. New York: McGraw-Hill, 1973.
13. *Pommerenke Ch.* Boundary behavior of conformal mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1992.

Статья поступила 6 сентября 2006 г.

Насыров Семен Рафаилович
Казанский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
snasyrov@ksu.ru