Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.946

О СПЕКТРЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА ПИКООБРАЗНОЙ ФОРМЫ

С. А. Назаров

Аннотация. Установлено, что оператор линейной задачи теории упругости в трехмерной области с достаточно острой пикообразной особенностью границы имеет непрерывный спектр. Получена некоторая информация о структуре спектра и проверено весовое неравенство Корна, позволяющее доказать дискретность спектра для недостаточно острых пиков. Сформулированы открытые вопросы.

Ключевые слова: уравнения теории упругости, нулевое заострение, пик, дискретный спектр, непрерывный спектр.

Памяти Сергея Львовича Соболева посвящается

1. Пикообразное тело. Пусть поверхность $\partial\Omega$ трехмерного упругого тела Ω гладкая (для простоты) всюду, кроме точки $\mathscr{O}$, совмещенной с началом декартовой системы координат x. Масштабированием сведем характерный размер тела к единичному и сделаем координаты безразмерными. В окрестности $\mathscr{U}$ точки $\mathscr{O}$ тело Ω имеет форму пика (рис. 1), а именно

$$\Omega\cap\mathscr{U}=\{x=(y,z)\in\mathscr{U}:z=x_3>0,z^{-1-\gamma}y\in\omega\},\tag{1}$$

причем ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2$, ограниченная гладким (опять-таки для упрощения изложения; см. замечание 6) замкнутым простым контуром $\partial\omega$, а γ — положительный показатель заострения. Известно (см., например, [1, § 3.1]), что для областей с такими особенностями границы нарушено неравенство Корна. В самом деле, рассмотрим поле смещений ψ^{im} с компонентами

$$\psi_i^{im}(x)=\phi_m(z),\quad \psi_{3-i}^{im}(x)=0,\quad \psi_3^{im}(x)=-y_i\partial_z\phi_m(z),\tag{2}$$

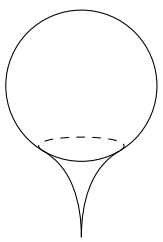

Рис. 1.

где $i=1,2$, $\partial_z=\partial/\partial z$, $\phi_m(z)=\phi(mz)$ и $\phi\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\phi(z)=0$ при $z\notin(1,2)$, но $\phi(z)>0$ при $z\in(1,2)$. Поскольку компоненты тензора деформаций $\varepsilon(\psi^{im})$ имеют вид

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\psi^{im})=0,\quad \varepsilon_{\alpha3}(\psi^{im})=\varepsilon_{3\alpha}(\psi^{im})=0,\quad \alpha,\beta=1,2,$$
$$\varepsilon_{33}(\psi^{im})=-y_i\partial_z^2\phi_m(z),$$

в силу формулы (1) справедливы соотношения

$$\|\varepsilon(\psi^{im});L_2(\Omega)\|^2=O(m^{-1-4\gamma}),\quad \|\nabla_x\psi^{im};L_2(\Omega)\|^2=O(m^{-1-2\gamma}),$$
$$\|\psi^{im};L_2(\Omega)\|^2=O(m^{-3-2\gamma}).\tag{3}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке the Netherlands Organization for Scientific Research (NWO) и Российского фонда фундаментальных исследований (совместный проект 047.017.020).

© **2008 Назаров С. А.**

Отсюда вытекает, что включение $\mathbf{E}(\Omega) \subset H^1(\Omega)^3$ нарушено при любом $\gamma > 0$, а включение $\mathbf{E}(\Omega) \subset L_2(\Omega)^3$ не выполняется при $\gamma > 1$ и не может быть компактным при $\gamma = 1$. Здесь $\mathbf{E}(\Omega)$ — энергетический класс, полученный пополнением линеала $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathscr{O})^3$ по норме

$$\|u; \mathbf{E}(\Omega)\| = (\|\varepsilon(u); L_2(\Omega)\|^2 + \|u; L_2(\Omega \setminus \mathscr{U})\|^2)^{1/2}, \tag{4}$$

линеал $C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathscr{O})$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций с носителями, отделенными от вершины пика $\mathscr{O}$, а верхний индекс 3 у пространств Соболева $H^1(\Omega)$ и Лебега $L_2(\Omega)$ указывает количество компонент вектор-функций. Подчеркнем, что в обозначениях норм и скалярных произведений количество компонент не отмечается.

Согласно общим результатам [2, § 10.1] теории операторов в гильбертовом пространстве сделанное наблюдение означает, что при $\gamma \geq 1$ оператор линейной задачи теории упругости о колебаниях пикообразного тела Ω со свободной поверхностью не может иметь дискретного спектра. Выяснение структуры этого спектра и составляет предмет настоящей статьи. В п. 2 выводится весовое неравенство Корна (см. теорему 1 и ср. статью [3], где получено неравенство Корна для областей с параболоидальными выходами на бесконечность). Случаям $\gamma \neq 1$ и $\gamma = 1$ посвящены пп. 3, 4, а в п. 5 содержится финальная теорема 5 и обсуждаются непрерывный и точечный спектры (см. замечание 7 по поводу терминологии), а также формулируются открытые вопросы и гипотеза.

2. Весовое неравенство Корна. Введем переменные $\xi = (\eta, \zeta)$, где

$$\eta = \gamma z^{-1-\gamma} y \in \mathbb{R}^2, \quad \zeta = z^{-\gamma} \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Пусть u — гладкая вектор-функция с носителем на множестве $\{x \in \overline{\Omega} \cap \mathscr{U} : 0 < z \leq d\}$, которое в координатах (2) является частью $\Pi_T = \{\xi \in \Pi : \zeta > T\}$ цилиндра $\Pi = \{\xi : \gamma^{-1}\eta \in \omega,\ \zeta \in \mathbb{R}\}$, а на величины $d > 0$ и T наложена связь $T = d^{-\gamma}$. Далее по повторяющимся греческим $\alpha, \beta = 1, 2$ и латинским $j, k = 1, 2, 3$ индексам производим суммирование и обозначаем $f_{,\alpha} = \partial f / \partial y_\alpha$ и $f_{,\zeta} = \partial_\zeta f = \partial f / \partial \zeta$. Вектор-функцию u в координатах ξ записываем как $(v, -w)$, где $v = (v_1, v_2)$. Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \gamma \zeta^\tau \frac{\partial}{\partial \eta_\alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = -\gamma \zeta^\tau \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\tau}{\zeta} \eta_\beta \frac{\partial}{\partial \eta_\beta} \right), \quad \tau = \frac{1+\gamma}{\gamma},$$

имеем

$$\mathscr{E}(u; \Omega) = \int\limits_\Omega \varepsilon_{jk}(u) \varepsilon_{jk}(u)\, dx = \gamma^3 \int\limits_\Pi \mathbf{e}_{jk}(v, w) \mathbf{e}_{jk}(v, w) \zeta^{-3\tau}\, d\xi, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{jk}(u) = 2^{-1}(u_{j,k} + u_{k,j})$ — декартовы компоненты тензора деформации и

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{\alpha\beta}(v, w) &= \frac{1}{2} \gamma \zeta^\tau \{v_{\alpha,\beta} + v_{\beta,\alpha}\}, \\
\mathbf{e}_{\alpha 3}(v, w) = \mathbf{e}_{3\alpha}(v, w) &= -\frac{1}{2} \gamma \zeta^\tau (w_{,\alpha} + v_{\alpha,\zeta} + \tau \zeta^{-1} \eta_\beta v_{\alpha,\beta}) \\
&= -\frac{1}{2} \gamma \zeta^\tau \{w_{,\alpha} + v_{\alpha,\zeta} - \tau \zeta^{-1} \eta_\beta v_{\beta,\alpha}\} \\
&\quad - \tau \zeta^{-1} \eta_\beta \mathbf{e}_{\beta,\alpha}(v, w), \\
\mathbf{e}_{33}(v, w) &= \gamma \zeta^\tau (w_{,\zeta} + \tau \zeta^{-1} \eta_\alpha w_{,\alpha}) = \gamma \zeta^\tau \{w_{,\zeta} - \tau \zeta^{-1} \eta_\beta v_{\beta,\zeta}\} \\
&\quad - 2\tau \zeta^{-1} \eta_\beta \mathbf{e}_{\beta 3}(v, w) - 2\tau^2 \zeta^{-2} \eta_\alpha \eta_\beta \mathbf{e}_{\alpha\beta}(v, w).
\end{aligned} \tag{7}$$

Выражение из фигурных скобок в правых частях тождеств (4) обозначим соответственно через $e_{\alpha\beta}(v,w)$, $e_{\alpha 3}(v,w) = e_{3\alpha}(v,w)$ и $e_{33}(v,w)$. Уменьшая при необходимости размер d, делаем число T достаточно большим и при учете соотношения $\zeta > T$ в Π_T выводим из формул (3) и (4), что

$$\int\limits_{\Pi} e_{jk}(v,w)e_{jk}(v,w)\zeta^{-\tau}\,d\xi \le c\mathscr{E}(u;\Omega). \tag{8}$$

Одномерное неравенство Харди с показателем $\varkappa = -1-\tau < 0$, проинтегрированное по сечению цилиндра, дает оценку

$$\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|W(\eta,\zeta)|^2\,d\xi \le c\int\limits_{\Pi} \zeta^{-\tau}|\partial_\zeta W(\eta,\zeta)|^2\,d\xi = c\int\limits_{\Pi} |e_{33}(v,w)|^2\zeta^{-\tau}\,d\xi, \tag{9}$$

где $W(\eta,\zeta) = w(\eta,\zeta) - \tau V(\eta,\zeta)$,

$$V(\eta,\zeta) = \int\limits_0^\zeta \mathfrak{z}^{-1}\eta_\beta v_{\beta,\mathfrak{z}}(\eta,\mathfrak{z})d\mathfrak{z} = \zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta(\eta,\zeta) + \int\limits_0^\zeta \mathfrak{z}^{-2}\eta_\beta v_\beta(\eta,\mathfrak{z})d\mathfrak{z}. \tag{10}$$

Подчеркнем, что по предположению носители функций v_α и w расположены на множестве $\{\zeta \in \overline{\Pi} : 0 < \varrho \le \zeta \le T\}$, причем $\varrho = \varrho(v,w)$ — некоторое положительное число, а функции V и W обращаются в нуль при $\zeta \le \varrho$. Имеем

$$\begin{gathered} \eta_\alpha V_{,\alpha} = V + \zeta^{-1}\eta_\alpha\eta_\beta v_{\beta,\alpha} + \int\limits_0^\zeta \mathfrak{z}^{-2}\eta_\alpha\eta_\beta v_{\beta,\alpha}d\mathfrak{z}, \\ \eta_\alpha e_{\alpha 3}(v,w) = \eta_\alpha W_{,\alpha} + \tau\eta_\alpha V_{,\alpha} + \zeta V_{,\zeta} - \tau\zeta^{-1}\eta_\alpha\eta_\beta v_{\beta,\alpha}. \end{gathered} \tag{11}$$

Поскольку $\eta_\alpha\eta_\beta v_{\beta,\alpha} = \eta_\alpha\eta_\beta e_{\alpha\beta}(v,w)$, при учете соотношений (11) и (8) получаем

$$\begin{gathered} \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|\eta_\alpha V_{,\alpha}(\eta,\zeta) - V(\eta,\zeta)|^2\,d\xi \le c(J_0+J_1), \\ \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|\eta_\alpha W_{,\alpha}(\eta,\zeta) + \zeta^{1-\tau}\partial_\zeta(\zeta^\tau V(\eta,\zeta))|^2\,d\xi \le c(J_0+J_1), \\ J_0 = \int\limits_{\Pi} \zeta^{-4-\tau}|\eta_\alpha\eta_\beta e_{\alpha\beta}(v,w)|^2\,d\xi \le c\mathscr{E}(u;\Omega), \\ J_1 = \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\left|\int\limits_0^\zeta \mathfrak{z}^{-2}\eta_\alpha\eta_\beta e_{\alpha\beta}(v,w;\eta,\mathfrak{z})d\mathfrak{z}\right|^2 d\eta d\zeta \\ \le \int\limits_{\Pi} \mathfrak{z}^{-4}\int\limits_{\mathfrak{z}}^\infty \zeta^{-1-\tau}\,d\zeta|\eta_\alpha\eta_\beta e_{\alpha\beta}(v,w;\eta,\mathfrak{z})|^2\,d\eta d\mathfrak{z} \le \frac{1}{\tau}J_0. \end{gathered} \tag{12}$$

Отметим, что первая оценка (12) позволила во втором равенстве (11) заменить сумму $\eta_\alpha V_{,\alpha}$ функцией V и затем воспользоваться тождеством $\zeta V_{,\zeta} + \tau V = \zeta^{1-\tau}\partial_\zeta(\zeta^\tau V)$ (ср. второе подынтегральное выражение в (12)).

При любой гладкой срезающей функции χ, зависящей от переменных η, обращающейся в нуль на цилиндрической поверхности $\partial\Pi$ и подчиненной неравенствам $0 \le \chi \le 1$, выполнено соотношение

$$c\mathscr{E}(u;\Omega) \ge \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi(\eta)^2|\eta_\alpha W_{,\alpha}(\eta,\zeta) + \zeta^{1-\tau}\partial_\zeta(\zeta^\tau V(\eta,\zeta))|^2\,d\xi$$
$$= \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|\chi\eta_\alpha W_{,\alpha}|^2 d\zeta + \int\limits_{\Pi} \zeta^{-3\tau}|\chi\partial_\zeta(\zeta^\tau V)|^2\,d\xi$$
$$+ 2\int\limits_{\Pi} \zeta^{-1-2\tau}\chi^2\eta_\alpha W_{,\alpha}\partial_\zeta(\zeta^\tau V)\,d\xi =: I_1 + I_2 + 2I_3. \quad (13)$$

При помощи одномерного неравенства Харди (ср. с оценкой (9)) находим

$$I_2 \ge c_2\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|\chi(\eta)V(\eta,\zeta)|^2\,d\xi, \quad c_2 > 0. \quad (14)$$

Кроме того,

$$\left|I_3 - \int\limits_{\Pi} \zeta^{-1-\tau}\chi\partial_\zeta W\eta_\alpha V_{,\alpha}\,d\xi\right| \le c_\chi\int\limits_{\Pi} \zeta^{-1-2\tau}|W|(\chi|\partial_\zeta(\zeta^\tau V)| + \zeta^{\tau-1}\chi|\eta_\alpha V_{,\alpha}|)\,d\xi$$
$$\le \delta\left\{I_2 + \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi^2|\eta_\alpha V_{,\alpha}|^2\,d\xi\right\} + \frac{c}{\delta}\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|W|^2\,d\xi. \quad (15)$$

Последний интеграл был оценен в формуле (9), а значит, осталось обработать второй интеграл I_4 в фигурных скобках. Ввиду неравенств (12) и (13) справедливо соотношение

$$I_4 \le c\left(\mathscr{E}(u;\Omega) + \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|\chi V|^2\,d\xi\right) \le c(\mathscr{E}(u;\Omega) + I_2).$$

Итак, взяв параметр $\delta > 0$ в правой части (15) достаточно малым, выводим из оценки (13), что каждый из интегралов I_1 и I_2 не превосходит величины $c\mathscr{E}(u;\Omega)$.

Теперь убедимся в том, что выполнено неравенство

$$\mathbf{J}_0 := \int\limits_{\Pi} \zeta^{-4-\tau}|\chi\eta_\beta v_\beta|^2\,d\xi \le c\mathscr{E}(u;\Omega). \quad (16)$$

С этой целью заметим, что в силу соотношений (8) и (14) верны формулы

$$\mathbf{J}_1 = \int\limits_{\Pi} \zeta^{-1-\tau}\chi^2 e_{33}(v,w)V\;d\xi, \quad |\mathbf{J}_1| \le c\mathscr{E}(u;\Omega).$$

Кроме того, при учете равенств (7) и (10) находим

$$\mathbf{J}_1 = (1+\tau)\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi^2 VW\,d\xi - \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi(\eta_\beta v_\beta)_{,\zeta}w\;d\xi + \tau\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi^2(\eta_\beta v_\beta)_{,\zeta}\;d\xi$$
$$=: (1+\tau)\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_3 + \tau\mathbf{J}_4,$$

причем согласно формулам (7)–(9) и (14) имеем

$$|\mathbf{J}_2| \le c\mathscr{E}(u;\Omega),$$

$$|\mathbf{J}_3| = \left|\int\limits_{\Pi} \zeta^{-1-\tau}(e_{33}(v,w) - w_{,\zeta})w\,d\xi\right| \le c\left(\int\limits_{\Pi} \zeta^{-\tau}|e_{33}(v,w)|^2\,d\xi + \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}|w|^2\,d\xi\right) \le c\mathscr{E}(u;\Omega).$$

Наконец,

$$\mathbf{J}_4 = (2+\tau)\int\limits_{\Pi} \zeta^{-3-\tau}\chi^2\eta_\beta v_\beta V\,d\xi - \int\limits_{\Pi} \zeta^{-3-\tau}\eta_\beta v_\beta(\eta_\alpha v_\alpha)_{,\zeta}\,d\xi =: \mathbf{J}_5 - \mathbf{J}_6,$$

$$|\mathbf{J}_5| \le \delta\mathbf{J}_0 + c\delta^{-1}\mathscr{E}(u;\Omega), \quad 2\mathbf{J}_6 = (3+\tau)\mathbf{J}_0.$$

Выбрав параметр $\delta > 0$ достаточно малым, выводим из приведенных соотношений оценку (16).

Продолжим преобразования и заметим, что в силу тождеств (7) справедливо равенство

$$e_{3\alpha}(v,w) = (w - \zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta)_{,\alpha} + \zeta^{-\tau}\partial_\zeta(\zeta^\tau v_\alpha).$$

Обработаем интеграл

$$\mathbf{I}_0 := \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi_0^2|e_{\alpha 3}(v,w)|^2\,d\xi \le c\mathscr{E}(u;\Omega),$$

где $\eta \mapsto \chi_0(\eta)$ — новая срезающая функция, причем $\chi_0\chi = \chi_0$ и соответственно $|\nabla_\eta\chi_0(\eta)| \le c_\chi\chi(\eta)$. Имеем

$$\mathbf{I}_0 = \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}(|\chi_0(w - \tau\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta)_{,\alpha}|^2 + |\chi_0\zeta^{-\tau}\partial_\zeta(\zeta^\tau v_\alpha)|^2)\,d\xi + 2\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-2\tau}\chi_0^2(w - \tau\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta)_{,\alpha}\partial_\zeta(\zeta^\tau v_\alpha)\,d\xi =: \mathbf{I}_4 + 2\mathbf{I}_2.$$

В частности, неравенство Харди дает оценку

$$\int\limits_{\Pi} \zeta^{-4-\tau}|\chi_0 v_\alpha|^2\,d\xi \le c\mathbf{I}_1. \tag{17}$$

Интегрируя по частям, получаем соотношение

$$\mathbf{I}_2 = \int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi_0^2(w - \tau\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta)_{,\zeta}v_{\alpha,\alpha}\,d\xi + \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_5 =: \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4 + \mathbf{I}_5$$

(в подынтегральном выражении из $\mathbf{I}_3$ нет суммирования по α). Интегралы $\mathbf{I}_4$ и $\mathbf{I}_5$, возникшие при дифференцировании множителей $\zeta^{-2\tau}$ и χ_0^2, обрабатываются при помощи установленных ранее оценок (9), (14) и (16), а именно

$$|\mathbf{I}_4| \le 2c_\chi\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-2\tau}\chi|w - \tau\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta|\,|\partial_\zeta(\zeta^\tau v_\alpha)|\,d\xi \le \delta\mathbf{I}_1 + c\delta^{-1}\int\limits_{\Pi} \zeta^{-2-\tau}\chi(|w|^2 + \zeta^{-2}|\eta_\beta v_\beta|^2)\,d\xi \le \delta\mathbf{I}_1 + c\delta^{-1}\mathscr{E}(u;\Omega),$$

$$|\mathbf{I}_5| \le c \int\limits_{\Pi} \zeta^{-3-\tau}\chi |w - \tau\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta|\,|v_{\alpha,\alpha}|\,d\xi \le c\mathscr{E}(u;\Omega).$$

Подчеркнем, что здесь применено равенство $e_{\alpha\alpha}(v,w) = v_{\alpha,\alpha}$ (суммирования по $\alpha = 1,2$ нет), обусловленное формулами (7). Они же обеспечивают тождество

$$(w - \tau\zeta^{-1}\eta_\beta v_\beta)_{,\zeta} = e_{33}(v,w) + \tau\zeta^{-2}\eta_\beta v_\beta,$$

а значит, при учете соотношений (8) и (16) заключаем, что $|\mathbf{I}_3| \le c\mathscr{E}(u;\Omega)$. Следовательно, зафиксировав малое $\delta > 0$ и собрав приведенные неравенства, видим, что $\mathbf{I}_1 \le c\mathscr{E}(u;\Omega)$, т. е. формула (17) доставляет оценки весовых норм функций $\chi_0 v_1$ и $\chi_0 v_2$. Весовая оценка для функции $\chi w = \chi W + \tau\chi V$ уже была установлена в соотношениях (9) и (14).

Сформулируем промежуточный результат. Пусть ω' — подобласть ω, $\overline{\omega'} \subset \omega$ и $\chi_0(\eta) = 1$ при $\gamma^{-1}\eta \in \omega'$. Положим $\Pi' = \{\xi \in \Pi : \gamma^{-1}\eta \in \omega'\}$ и $\Xi = \{x : z \in (0,d), z^{-1-\gamma}y \in \omega\}$, $\Xi' = \{x \in \Xi : z^{-1-\gamma}y \in \omega'\}$. Доказано следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Xi'} z^{-2}(|u_3|^2 + z^{2\gamma}|u_\alpha|^2)\,dx \le c\int\limits_{\Pi'} \zeta^{-2-\tau}(|w|^2 + \zeta^{-2}|v_\alpha|^2)\,d\xi \le c\mathscr{E}(u;\Omega). \tag{18}$$

Рассечем множество Ξ, представляющее собой кончик пика высотой d, на фрагменты

$$\Xi_q = \{x \in \Xi : q^{-1/\gamma} > d^{-1}z > (q+1)^{-1/\gamma}\}, \quad q = 1,2,\dots, \tag{19}$$

и проведем растяжение координат $x \mapsto \mathbf{x}^j = (\mathbf{y}^j, \mathbf{z}^j) = (q^\tau y, q^\tau z - qd)$. При этом благодаря соотношениям (1) и

$$q^{-1/\gamma} - (q+1)^{-1/\gamma} = q^{-1/\gamma}(1 - (1+q^{-1})^{-1/\gamma}) = q^{-\tau}(\gamma^{-1} + O(q^{-1})),$$

$$q \to +\infty, \quad \tau = 1 + 1/\gamma,$$

множество (19) трансформируется в множество Θ_q единичных размеров, а граница $\partial\Theta_q$ оказывается слабо зависящей от большого параметра q и, разумеется, является липшицевой. Оперируя с множеством Ξ', придадим обозначениям Ξ'_q и Θ'_q аналогичный смысл.

Пусть $\mathbf{u}^q$ — вектор-функция, записанная при помощи переменных $\mathbf{x}^q$. Представим ее в виде

$$\mathbf{u}^q(\mathbf{x}^q) = \mathbf{d}(\mathbf{x}^q)\mathbf{a}^q + \mathbf{U}^q(\mathbf{x}^q), \quad \int\limits_{\Theta'_q} \mathbf{d}(\mathbf{x}^q)^\top \mathbf{U}^q(\mathbf{x}^q)\,d\mathbf{x}^q = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{20}$$

где $\top$ — знак транспонирования, а $\mathbf{d}$ — линейная матрица-функция размером 3×6,

$$\mathbf{d}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & -2^{-1/2}x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2}x_3 & 0 & 2^{-1/2}x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_2 & -2^{-1/2}x_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

При этом векторы интегрируются как столбцы в $\mathbb{R}^3$, а составляющая $\mathbf{d}(\mathbf{x}^q)\mathbf{a}^q$, где $\mathbf{a}^q$ — столбец в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^6$, представляет собой жесткое смещение, поэтому $\varepsilon_{jk}(\mathbf{u}^q;\mathbf{x}^q) = \varepsilon_{jk}(\mathbf{U}^q;\mathbf{x}^q)$. В силу условия ортогональности (20) выполнено неравенство Корна

$$\|\mathbf{U}^q; H^1(\Theta_q)\|^2 \le c\mathscr{E}(\mathbf{U}^q;\Theta_q) = c\mathscr{E}(\mathbf{u}^q;\Theta_q) \tag{22}$$

(см. [1, 4, 5] и др.) и ввиду слабой зависимости липшицевых поверхностей $\partial\Theta_q$ и $\partial\Theta'_q$ от параметра q постоянную c в неравенстве (22) можно взять общей для всех номеров $q = 1, 2, \ldots$ (см. статью [5], где установлено, что постоянная в неравенстве Корна для области, звездной относительно шара, зависит лишь от отношения диаметров области и шара). Осталось обработать числовой столбец $\mathbf{a}^q \in \mathbb{R}^6$.

Соотношения (20) и (21) показывают, что

$$\begin{gathered}\mathbf{a}^{q\prime\prime} := \big(\mathbf{a}^q_3, \mathbf{a}^q_4, \mathbf{a}^q_5\big)^\top = T''(\Theta'_q)^{-1} \int\limits_{\Theta'_q} t''(\mathbf{x}^q)\big(\mathbf{u}^q_3(\mathbf{x}^q) - \mathbf{U}^q_3(\mathbf{x}^q)\big)d\mathbf{x}^q,\\ t''(\mathbf{x}^q) = \big(1, 2^{-1/2}\mathbf{x}_2, -2^{-1/2}\mathbf{x}_1\big)^\top, \quad T''(\Theta'_q) = \int\limits_{\Theta'_q} t''(\mathbf{x}^q)t''(\mathbf{x}^q)^\top d\mathbf{x}^q.\end{gathered} \tag{23}$$

Поскольку $T''(\Theta'_q)$ — матрица Грама размером 3×3, построенная по линейно независимым компонентам вектор-функции t'' при помощи скалярного произведения в пространстве Лебега $L_2(\Theta'_q)$, из формул (22) и (23) вытекает неравенство

$$|\mathbf{a}^{q\prime\prime}|^2 \le c\big(\|\mathbf{u}^q_3; L_2(\Theta'_q)\|^2 + \mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q)\big). \tag{24}$$

Аналогично соотношениям (23) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{q\prime} := \big(\mathbf{a}^q_1, \mathbf{a}^q_2, \mathbf{a}^q_6\big)^\top = T'(\Theta'_q)^{-1} \int\limits_{\Theta'_q} t'(\mathbf{x}^q)^\top \big(\big(\mathbf{u}^q_1(\mathbf{x}^q), \mathbf{u}^q_2(\mathbf{x}^q)\big)^\top\\ - \big(\mathbf{U}^q_1(\mathbf{x}^q), \mathbf{U}^q_2(\mathbf{x}^q)\big)^\top - 2^{-1/2}\mathbf{x}^q_3\big(\mathbf{a}^q_5, -\mathbf{a}^q_4\big)^\top\big)d\mathbf{x}^q,\\ t'(\mathbf{x}^q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2^{-1/2}\mathbf{x}^q_2 \\ 0 & 1 & 2^{-1/2}\mathbf{x}_1 \end{pmatrix}, \quad T'(\Theta'_q) = \int\limits_{\Theta'_q} t'(\mathbf{x}^q)^\top t'(\mathbf{x}^q)\, d\mathbf{x}^q.\end{aligned}$$

Опять-таки $T'(\Theta'_q)$ — симметричная и положительно определенная матрица Грама, построенная в гильбертовом пространстве $L_2(\Theta'_j)^2$ по линейно независимым столбцам матрицы-функции t'. Таким образом, формулы (22) и (24) приводят к оценке

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}^{q\prime}|^2 \le c\big(\big\|\mathbf{u}^q_1; L_2(\Theta'_q)\big\|^2 + \big\|\mathbf{u}^q_2; L_2(\Theta'_q)\big\|^2\\ + \mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q) + |\mathbf{a}^{q\prime\prime}|^2\big)c(\|\mathbf{u}^q; L_2(\Theta'_q)\|^2 + \mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q)).\end{aligned} \tag{25}$$

Подчеркнем, что по прежней причине постоянные в правых частях (24) и (25) можно взять не зависящими от номера $q = 1, 2, \ldots$.

Сопоставив формулы (20)–(22) и (24), (25), заключаем, что

$$\big\|\mathbf{u}^q_3; L_2(\Theta_q)\big\|^2 \le c\big(\mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q) + \big\|\mathbf{u}^q_3; L_2(\Theta_q)\big\|^2\big), \tag{26}$$

$$\big\|\mathbf{u}^q_\alpha; L_2(\Theta_q)\big\|^2 \le c(\mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q) + \|\mathbf{u}^q; L_2(\Theta_q)\|^2). \tag{27}$$

Умножим неравенства (26) и (27) на $q^{-2-\tau}$ и $q^{-4-\tau}$ соответственно, вернемся к системе координат x и просуммируем полученные соотношения по $q = 1, 2, \ldots$. В итоге обнаруживаем, что

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{-2+2\tau}(\|u_3; L_2(\Xi_q)\|^2 + q^{-2}\|u_\alpha; L_2(\Xi_q)\|^2)$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} q^{-2-\tau} \big(\big\| \mathbf{u}_3^q; L_2(\Theta_q) \big\|^2 + q^{-2} \big\| \mathbf{u}_\alpha^q; L_2(\Theta_q) \big\|^2 \big)$$

$$\le c \sum_{q=1}^{\infty} q^{\tau} \left((q^{-2}+q^{-4}) \mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q) + q^{-2} \left(\big\| \mathbf{u}_3^q; L_2(\Theta_q') \big\|^2 + q^{-2} \sum_{\beta=1}^{\infty} \big\| \mathbf{u}_\beta^q; L_2(\Theta_q') \big\|^2 \right) \right)$$

$$\le c \sum_{q=1}^{\infty} \left(2\mathscr{E}(u; \Xi_q) + q^{-2+2\tau} \left(\|u_3; L_2(\Xi_q')\|^2 + q^{-2} \sum_{\beta=1}^{\infty} \|u_\beta; L_2(\Xi_q')\|^2 \right) \right). \quad (28)$$

При этом множитель $q^{-2}+q^{-4}$ при $\mathscr{E}(\mathbf{u}^q; \Theta_q)$ в средней части (28) был увеличен до двух. Поскольку на области $\Xi_q \supset \Xi_q'$ выполнено соотношение $cq^{-1/\gamma} \le z \le Cq^{-1/\gamma}$ с положительными постоянными c и C, остальные весовые множители можно занести под знаки норм, вычисляемых на множествах Ξ_q и Ξ_q', придав тем самым формуле (28) такой вид:

$$\int\limits_{\Xi} z^{-2} \big(|u_3(x)|^2 + z^{2\gamma} |u_\alpha(x)|^2 \big) \, dx$$

$$\le c \left(\mathscr{E}(u; \Omega) + \int\limits_{\Xi'} z^{-2} \left(|u_3(x)|^2 + z^{2\gamma} \sum_{\beta=1}^{2} |u_\beta(x)|^2 \right) dx \right).$$

Последний интеграл уже оценен в соотношении (18).

Теорема 1. *В области Ω с пиком* (1) *справедливо весовое неравенство Корна*

$$\int\limits_{\Omega} |x|^{-2} (|u_3(x)|^2 + |x|^{2\gamma} (|u_1(x)|^2 + |u_2(x)|^2)) \, dx \le c(\mathscr{E}(u; \Omega) + \|u; L_2(\Omega \setminus \mathscr{U})\|^2), \quad (29)$$

причем постоянная c_Ω не зависит от вектор-функции $u \in C_c^\infty(\overline{\Omega} \setminus \mathscr{O})^3$. В правой части (29) *стоит эрзац $\mathscr{E}(u; \Omega)$ функционала упругой энергии, определенный формулой* (6), *а $\mathscr{U}$ — окрестность особой точки $\mathscr{O}$ такая, что множество $\Omega \setminus \mathscr{U}$ имеет положительную меру.*

Доказательство. Осталось заметить, что у множества $\Omega \setminus \Xi_{d/2}$ граница липшицева, а значит, на нем выполнено неравенство Корна и величина $\|u; L_2(\Omega \setminus \Xi_{d/2})\|^2$ не превосходит правой части (29). Теперь поле u можно умножить на подходящую срезающую функцию χ_d и добиться затребованного в начале пункта условия $\operatorname{supp}(\chi_d u) \subset \overline{\Xi_d}$; при этом $\mathscr{E}(\chi_d u; \Xi_d) \le c_d \mathscr{E}(u; \Omega)$ в силу упомянутого неравенства Корна. □

3. Первичные выводы о спектре. Задачу линейной теории упругости о собственных колебаниях тела Ω запишем в матричной форме [1, 6]

$$D(-\nabla_x)^\top A(x) D(\nabla_x) u(x) = \lambda \rho(x) u(x), \quad x \in \Omega, \quad (30)$$

$$D(n(x))^\top A(x) D(\nabla_x) u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \mathscr{O}. \quad (31)$$

Здесь использован шестимерный столбец деформаций

$$D(\nabla_x) u = (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{21}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{13}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{32}(u), \varepsilon_{33}(u))^\top, \quad (32)$$

причем множитель $\sqrt{2}$ введен для того, чтобы уравнять естественную норму столбца с нормой тензора деформаций, а $D(\nabla_x)$ — 6×3-матрица дифференциальных операторов первого порядка,

$$D(x)=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 2^{-1/2}x_2 & 2^{-1/2}x_3 & 0 & 0\\ 0 & x_2 & 2^{-1/2}x_1 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_1 & 2^{-1/2}x_2 & x_3 \end{pmatrix}^{\top} \tag{33}$$

(ср. с матрицей (21)). Кроме того, n — единичный вектор (столбец) внешней нормали к границе тела и $\sigma(u)=A\varepsilon(u)$ — столбец напряжений аналогичной (32) структуры, т. е. краевое условие (31) означает, что поверхность $\partial\Omega$ свободна от внешних нагрузок, и $A(x)$ — 6×6-матрица упругих модулей, симметрическая и положительно определенная при $x\in\overline{\Omega}$. Наконец, λ — спектральный параметр (квадрат частоты колебаний), а плотность $\rho>0$ упругого материала и элементы матрицы-функции A предполагаются (по-прежнему для простоты; см. замечание 6) гладкими в некоторой окрестности множества $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

Интегральное тождество [7, 8]

$$(AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)v)_\Omega=\lambda(\rho u,v)_\Omega,\quad v\in\mathbf{H}(\Omega),$$

обслуживающее задачу (30), (31), запишем в виде абстрактного уравнения

$$Ku=\mu u \tag{34}$$

на гильбертовом пространстве $\mathbf{H}(\Omega)$, полученном пополнением линеала $C_c^\infty(\overline{\Omega}\setminus\mathscr{O})^3$ по норме

$$\|u;\mathbf{H}(\Omega)\|=((AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)u)_\Omega+(\rho u,u)_\Omega)^{1/2} \tag{35}$$

(эта норма отличается от энергетической нормы (4)). Согласно свойствам физических характеристик A и ρ пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ не изменится ни алгебраически, ни топологически, если вместо упругой энергии $(AD(\nabla_x)u, D(\nabla_x)u)_\Omega/2$ подставить в норму (35) ее эрзац $\mathscr{E}(u;\Omega)=\|\varepsilon(u);L_2(\Omega)\|^2$, а вместо $(\rho u,u)_\Omega$ — выражение $\|u;L_2(\Omega)\|^2$. При этом $(\,,)_\Omega$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega)$, скалярном или векторном, а μ — новый спектральный параметр и K — непрерывный положительный симметрический оператор, определенные формулами

$$\mu=(1+\lambda)^{-1},\quad \langle Ku,v\rangle=(\rho u,v)_\Omega,\quad u,v\in\mathbf{H}(\Omega), \tag{36}$$

где $\langle\,,\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbf{H}(\Omega)$, порожденное нормой (35).

При $\gamma\in(0,1)$ согласно теореме 1 оператор вложения $\mathbf{H}(\Omega)\subset L_2(\Omega)^3$ представи́м как сумма компактного оператора (на области $\Omega\setminus\overline{\Xi}$ с отсеченным кончиком пика) и оператора с нормой $O(d^{1-\gamma})$ (на множестве $\Xi=\{x\in\Omega\cap\mathscr{U}: z<d\}$) — последнюю норму можно сделать сколь угодно малой путем подбора размера $d>0$. Следовательно, вложение $\mathbf{H}(\Omega)\subset L_2(\Omega)^3$ и оператор K компактны, а собственные числа уравнения (34) нормальны; они образуют бесконечно малую последовательность

$$1=\mu_1=\cdots=\mu_6>\mu_7\ge\mu_8\ge\cdots\ge\mu_p\ge\cdots\to+0, \tag{37}$$

в которой указаны при учете их кратностей. В частности, норма оператора K равна единице, а собственные векторы, отвечающие такому собственному числу, составляют линеал жестких смещений, имеющий размерность шесть,

$$\mathscr{R}=\{u: u(x)=\mathbf{d}(x)a,\ a\in\mathbb{R}^6\}. \tag{38}$$

Согласно формулам (36) и (37) собственные числа задачи (30), (31) образуют бесконечно большую последовательность

$$0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_6 < \lambda_7 \le \lambda_8 \le \cdots \le \lambda_p \le \cdots \to +\infty. \tag{39}$$

Таким образом, в случае $\gamma < 1$ задача (30), (31) имеет дискретный спектр.

При $\gamma \ge 1$ вложение $\mathbf{H}(\Omega) \subset L_2(\Omega)^3$ сохраняется, но теряет компактность, а оператор K приобретает существенный спектр (см. [2, теорема 10.1.5]). В случае $\gamma = 1$ теорема 1 все-таки позволяет установить дискретность спектра на некотором не пустом полуинтервале $(\mu_\bullet, 1]$, содержащем единственное собственное число $\mu = 1$ с кратностью шесть и собственным подпространством (38). Этот факт вытекает из очередного утверждения.

Предложение 2. *Пусть $\gamma = 1$ и вектор-функция $u \in \mathbf{H}(\Omega)$ подчинена условию*

$$(\rho u, v)_\Omega = 0, \quad v \in \mathscr{R}. \tag{40}$$

Тогда справедливо неравенство

$$(\rho u, u)_\Omega \le c_\bullet \|u; \mathbf{H}(\Omega)\|^2, \tag{41}$$

в котором постоянная $c_\bullet$ строго больше единицы.

Доказательство. Представим вектор-функцию u в виде

$$u(x) = \mathbf{d}(x)a + U(x), \quad \int\limits_{\Omega\setminus\Xi} \mathbf{d}(x)^\top U(x)\,dx = 0 \in \mathbb{R}^6. \tag{42}$$

Благодаря липшицевости поверхности $\partial(\Omega\setminus\overline{\Xi})$ последнему условию ортогональности (42) выполнено неравенство Корна

$$\|U; H^1(\Omega\setminus\Xi)\|^2 \le c\|\varepsilon(U); L_2(\Omega\setminus\Xi)\|^2 \le c\mathscr{E}(u;\Omega)$$

(см, например, [1, теорема 2.3.3]), а значит, при учете формулы (40) получаем, что

$$\begin{gathered} a = \mathbf{M}^{-1}\int\limits_\Omega \rho(x)\mathbf{d}(x)^\top U(x)\,dx, \quad \mathbf{M} = \int\limits_\Omega \rho(x)\mathbf{d}(x)^\top \mathbf{d}(x)\,dx, \\ |a|^2 \le c\|U; L_2(\Omega)\|^2 \le c\mathscr{E}(u;\Omega), \end{gathered} \tag{43}$$

причем $\mathbf{M}$ — 6×6-матрица Грама, построенная по линейно независимым столбцам матрицы (21) при помощи скалярного произведения в весовом пространстве Лебега $L_2(\Omega;\sqrt{\rho})^3$, а потому симметрическая и положительно определенная. Таким образом,

$$(\rho u, u)_\Omega \le c(|a|^2 + \|U; L_2(\Omega)\|^2) \le c\mathscr{E}(u;\Omega) \le a_\bullet^{-1}(AD(\nabla_x)u, AD(\nabla_x)u)_\Omega,$$

где $a_\bullet$ — некоторое положительное число. Теперь ясно, что $c_\bullet \ge 1 + a_\bullet > 1$. □

Итак, величины $\lambda_\bullet$ и $\mu_\bullet$ подчинены соотношениям

$$\lambda_\bullet = c_\bullet - 1 > 0, \quad \mu_\bullet = (1+\lambda_\bullet)^{-1} > 0. \tag{44}$$

Пусть $\gamma > 1$. Убедимся в том, что $\mu = 1$ — точка непрерывного спектра оператора K. Рассмотрим вектор-функции $x \mapsto \Phi^{im}(x) = \psi^{im}(x) - \mathbf{d}(x)b^{im}$, где

составляющая ψ^{im} задана формулами (2), а в вычитаемом — жестком смещении — фигурируют матрица (21) и столбец

$$b^{im} = \mathbf{M}^{-1} \int\limits_{\Omega} \mathbf{d}(x)^{\top} \psi^{im}(x)\, dx,$$

причем $\mathbf{M}$ — матрица Грама из формулы (43), т. е. для полей Φ^{im} выполнены условия ортогональности (40). В силу соотношений (3) при большом натуральном числе m имеем

$$(AD(\nabla_x)\Phi^{im}, D(\nabla_x)\Phi^{im})_{\Omega} = (AD(\nabla_x)\psi^{im}, D(\nabla_x)\psi^{im})_{\Omega} \le cm^{-1-4\gamma},$$
$$|b^{im}| \le cm^{-3-2\gamma}, \quad (\rho\Phi^{im}, \Phi^{im})_{\Omega} \le cm^{-3-2\gamma}, \quad (\rho\Phi^{im}, \Phi^{im})_{\Omega} \ge \frac{1}{2}(\rho\psi^{im}, \psi^{im})_{\Omega}$$
$$-c|b^{im}|^2 \ge c_0 m^{-3-2\gamma} - cm^{-6-4\gamma} \ge \frac{1}{2} c_0 m^{-3-2\gamma}, \quad c_0 > 0. \tag{45}$$

Нетрудно усмотреть, что вектор-функции $\Psi^{im} = m^{\gamma+3/2}\Phi^{im}$ образуют сингулярную последовательность для самосопряженного оператора K в точке $\mu = 1$. Действительно, носитель функции $|\Psi^{im}|$ расположен на множестве $\{x \in \overline{\Omega} \cap \mathscr{U} : 1 \le mz \le 2\}$ и $\|\Psi^{im}; \mathbf{H}(\Omega)\| \le c(1 + m^{1-\gamma}) \le 2c$, т. е. последовательность $\{\Psi^{im}\}$ слабо сходится к нулю в пространстве $\mathbf{H}(\Omega)$, но в силу соотношений (41) верны неравенства

$$\|\Psi^{im}; \mathbf{H}(\Omega)\| \ge c_0/2 > 0, \quad \|K\Psi^{im} - \Psi^{im}; \mathbf{H}(\Omega)\| = \sup_{\dots} |\langle K\Psi^{im} - \Psi^{im}, u\rangle|$$
$$\le \sup_{\dots} |(AD(\nabla_x)\Psi^{im}, D(\nabla_x)u)_{\Omega}| \le c(AD(\nabla_x)\Psi^{im}, D(\nabla_x)\Psi^{im})_{\Omega}^{1/2} \le cm^{1-\gamma} \tag{46}$$

и $m^{1-\gamma}$ — бесконечно малая при $m \to +\infty$; здесь многоточие означает «$u \in \mathbf{H}(\Omega) : \|u; \mathbf{H}(\Omega)\| = 1$». Итак, по критерию Вейля (см., например, [2, теорема 9.1.2]) получаем, что $\mu = 1$ ($\lambda = 0$) — точка существенного спектра оператора K (задачи (30), (31)). Поскольку соответствующее собственное подпространство конечномерно (является линеалом (38) жестких смещений), эта точка попадает на непрерывный спектр.

4. Непрерывный спектр в случае $\gamma = 1$. Согласно общей теории эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе, оператор задачи (30), (31) фредгольмов в шкале подходящих весовых пространств при всех весовых индексах, за исключением счетного набора запретных (см. [9]). Пространство $\mathbf{H}(\Omega)$ вкладывается в такие весовые пространства экспоненциально растущих при приближении к вершине пика $\mathscr{O}$ функций, а значит, при любом λ оператор K имеет конечномерное ядро.

Вычислим «порог» $\mu_\natural \in (0, 1)$, для которого при $\mu \in (0, \mu_\natural]$ найдем векторы $\Psi^1, \Psi^2, \dots \in \mathbf{H}(\Omega)$, сходящиеся слабо в $\mathbf{H}(\Omega)$ к нулю, удовлетворяющие соотношениям

$$\|\Psi^m; \mathbf{H}(\Omega)\|^2 \ge c_0, \quad \|K\Psi^m - \mu\Psi^m; \mathbf{H}(\Omega)\|^2 \le c_1 m^{-1}, \quad c_0, c_1 > 0, \tag{47}$$

и тем самым формирующие сингулярную последовательность для оператора K в точке μ. Таким образом, по причине конечномерности ядра резольвента $(K - \mu)^{-1}$ не является ограниченным оператором, т. е. полуинтервал $(0, \mu_\natural]$ (луч $[\lambda_\natural, +\infty)$, где $\lambda_\natural = \mu_\natural^{-1} - 1$) покрыт непрерывным спектром[1)] оператора K (задачи (30), (31)).

[1)] После написания статьи автору стало известно, что непрерывность спектра для плоского изотропного упругого тела с заострением при $\gamma = 1$ анонсирована И. В. Камоцким.

Для сокращения формул предположим, что матрица жесткости A и плотность ρ постоянны (см. далее замечание 3(3)). Пик (1) утончается при $z \to +0$, и поэтому для выяснения поведения решений задачи (30), (31) вблизи точки $\mathscr{O}$ логично принять асимптотический (формальный) анзац теории тонких упругих стержней (см. [10, 11; 1, гл. 5, § 7.3] и др.), а именно

$$u(x) = W^{-2}(y,z) + W^{-1}(y,z) + W^0(y,z) + W^1(y,z) + W^2(y,z) + \dots, \tag{48}$$

$$W^{-2}(y,z) = \sum_{\alpha=1}^{2} w_\alpha(z) e_\alpha, \ W^{-1}(y,z) = e_3 \left(w_3(z) - \sum_{\alpha=1}^{2} y_\alpha \frac{\partial w_\alpha}{\partial z}(z) \right) + w_4(z)\theta(y),$$
$$e_j = (\delta_{j,1}, \delta_{j,2}, \delta_{j,3})^\top, \quad \theta(y) = 2^{-1/2}(y_1 e_2 - y_2 e_1). \tag{49}$$

Здесь $W^0, W^2, \dots$ — вектор-функции, подлежащие дальнейшему определению, а $w = (w_1, \dots, w_4)^\top$ — неизвестный столбец функций, служащий для описания одномерной модели деформации стержня (в рассматриваемой задаче — пика). Столбцы $w' = (w_1, w_2)^\top$ и $w'' = (w_3, w_4)^\top$ будем искать в форме

$$w'(z) = z^{\Lambda - 5/2}\mathbf{w}', \quad w_3(z) = z^{\Lambda - 3/2}\mathbf{w}_3, \quad w_4(z) = z^{\Lambda - 7/2}\mathbf{w}_4, \tag{50}$$

где $\Lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный показатель и $\mathbf{w}', \mathbf{w}'' = (\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4)^\top \in \mathbb{C}^2$. При этом требуется соблюсти соотношения

$$|W^q(y,z)| = O(z^{\operatorname{Re}\Lambda + q - 1/2}), \quad z \to +0, \quad q = -2, -1, \dots, \tag{51}$$

которые согласованы с формулами (49), (50) и поясняют смысл асимптотического анзаца (48): в нем каждый последующий член приобретает дополнительную скорость затухания при $z \to +0$.

Согласно определению (1) нормаль n к проколотой поверхности $(\partial\Omega \cap \mathscr{U}) \setminus \mathscr{O}$ имеет вид

$$n(x) = n_0(y,z)^{-1/2}(\nu_1(z^{-1-\gamma}y), \nu_2(z^{-1-\gamma}y), -(1+\gamma)z^{-1}y^\top \nu(z^{-1-\gamma}y))^\top, \tag{52}$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)^\top$ — единичный вектор внешней нормали к границе области $\omega \subset \mathbb{R}^2$, а n_0 — нормирующий множитель, причем в силу формул (1) выполнены соотношения

$$n_0(y,z) = 1 + (1+\gamma)^2 z^{-2} |y^\top \nu(z^{-1-\gamma}y)|^2, \ n_0(y,z) = 1 + O(|z|^{2\gamma}), \ (y,z) \in \partial\Omega \cap \mathscr{U}.$$

Дифференциальные операторы $L(\nabla_x)$ и $N(x, \nabla_x)$ из левых частей системы (30) и краевого условия (31) допускают расщепления

$$L = L^0 + L^1 + L^2, \quad n_0^{1/2} N = N^0 + N^1 + N^2 \tag{53}$$

с такими членами:

$$L^0(\nabla_x) = D(-\nabla_y, 0)^\top A D(\nabla_y, 0), \quad L^1(\nabla_y, \partial_z) = D(-\nabla_y, 0)^\top A D(0, \partial_z)$$
$$+ D(0, -\partial_z)^\top A D(\nabla_y, 0), \quad L^2(\partial_z) = D(0, -\partial_z)^\top A D(0, \partial_z),$$
$$N^0(y, z, \nabla_x) = D(\nu(z^{-1-\gamma}y), 0)^\top A D(\nabla_y, 0), \quad N^1(y, z, \nabla_y, \partial_z) \tag{54}$$
$$= D(\nu(z^{-1-\gamma}y), 0)^\top A D(0, \partial_z) - (1+\gamma) z^\gamma D(0, z^{-1-\gamma} y^\top \nu(z^{-1-\gamma}y))^\top A D(\nabla_y, 0),$$
$$N^2(y, z, \partial_z) = -(1+\gamma) z^\gamma D(0, z^{-1-\gamma} y^\top \nu(z^{-1-\gamma}y))^\top A D(0, \partial_z).$$

Обращаем внимание на то, что в согласии с геометрией пика (1) дифференцирование функции $(y,z)\mapsto z^{\Lambda}\mathscr{W}(z^{-1-\gamma}y)$ по переменным y условно соответствует умножению на величину $O(z^{-1-\gamma})$, а дифференцирование по z — на величину $O(z^{-1})$. Именно в этом смысле понимаются расщепления (53), а их члены L^p и N^p приобретают условные порядки z^{p-4} и z^{p-2} соответственно, так как $\gamma=1$.

Подставим разложения (48) и (53) в задачу (30), (31) и соберем слагаемые, которым указанные выше правила, в том числе формулы (51), присваивают одинаковые асимптотические порядки. В результате получим рекуррентную последовательность следующих плоских задач теории упругости на поперечных сечениях $\omega(z)=\{y: z^{-1-\gamma}y\in\omega\}$ тонкого пика Ξ:

$$\begin{gathered} L^0W^q=F^q:=-L^1W^{q-1}-L^2W^{q-2}+\lambda\rho\delta_{2,q}W^{-2}\quad\text{в }\omega(z),\\ N^0W^q=G^q:=-N^1W^{q-1}-N^2W^{q-2}\quad\text{на }\partial\omega(z). \end{gathered}\tag{55}$$

Здесь $q=-2,\dots,2$ и $W^p=0$ при $p<-2$. Отметим, что инерционный член $\lambda\rho u$ породил неоднородность $\lambda\rho\delta_{2,q}W^{-2}$ в правых частях задачи (55) с номером $q=2$. Известно [1, гл. 7], что в этом случае последовательное решение задач (54) и обеспечение условий их разрешимости приводит к результирующей одномерной спектральной задаче. Понятно, что вектор-функции (49) удовлетворяют соотношениям (55), в которых $q=-2$ и $q=-1$.

При $q=0$ выполнены условия разрешимости задачи (55), а именно

$$\begin{gathered} \int\limits_{\omega(z)}F_i^q(y,z)\,dy+\int\limits_{\partial\omega(z)}G_i^q(y,z)\,ds_y=0,\quad i=1,2,3,\\ \int\limits_{\omega(z)}\theta(y)^{\top}F^q(y,z)\,dy+\int\limits_{\partial\omega(z)}\theta(y)^{\top}G^q(y,z)\,ds_y=0. \end{gathered}\tag{56}$$

Следовательно, решение названной задачи существует. Кроме того, верны формулы

$$\begin{gathered} F^0=D(\nabla_y,0)^{\top}A\mathscr{Y}\mathscr{D}(\partial_z)w,\quad G^0=-D(\nu,0)^{\top}A\mathscr{Y}\mathscr{D}(\partial_z)w,\\ \mathscr{Y}(y)=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&-y_1\\0&0&0&0&0&-y_2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&-y_2/2&y_1/2&0\end{pmatrix}^{\top},\quad \mathscr{D}(\partial_z)=\begin{pmatrix}\partial_z^2&0&0&0\\0&\partial_z^2&0&0\\0&0&\partial_z&0\\0&0&0&\partial_z\end{pmatrix},\\ U^0(y,z)=\mathscr{X}(y,z)\mathscr{D}(\partial_z)w(z). \end{gathered}\tag{57}$$

Здесь $\mathscr{X}$ — 3×4-матрица-функция, удовлетворяющая плоской задаче теории упругости

$$\begin{gathered} D(-\nabla_y,0)^{\top}AD(\nabla_y,0)\mathscr{X}(y,z)=D(\nabla_y,0)^{\top}A\mathscr{Y}(y),\quad y\in\omega(z),\\ D(\nu(y),0)^{\top}AD(\nabla_y,0)\mathscr{X}(y,z)=-D(\nu(y),0)^{\top}A\mathscr{Y}(y),\quad y\in\partial\omega(z). \end{gathered}\tag{58}$$

Отметим, что в правых частях (58) размещены матрицы-функции размером 3×4, для соответственных столбцов которых выполнены условия (56) (проверяется интегрированием по частям), т. е. решения — столбцы $\mathscr{X}^1,\dots,\mathscr{X}^4$ матрицы $\mathscr{X}$ — в самом деле существуют. Поскольку задача (58) решается на переменной области $\omega(z)$, вырождающейся при $z\to+0$, и матрица $\mathscr{Y}$ линейна по переменным $y=(y_1,y_2)$, столбцы матрицы $\mathscr{X}$ представимы в виде

$$\mathscr{X}^j(y,z)=z^{2(2-\delta_{j,3})}\mathbf{X}^j(z^{-2}y),\tag{59}$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера.

В силу соотношений (57), (58) и (53), (54) соблюдены первые два ($i = 1, 2$) условия разрешимости (56) задачи (57) при $q = 1$ — этот факт подтверждают следующие выкладки:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\omega(z)} F_i^1\,dy + \int\limits_{\partial\omega(z)} G_i^1\,ds_y &= \frac{\partial}{\partial z} e_i^\top \int\limits_{\omega(z)} D(e_3)^\top A(D(\nabla_y,0)\mathscr{X} + \mathscr{Y})\,dy\mathscr{D}(\partial_z)w \\ &= \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\omega(z)} (D(\nabla_y,0)y_i e_3)^\top A(D(\nabla_y,0)\mathscr{X} + \mathscr{Y})\,dy\,\mathscr{D}(\partial_z)w \\ &= \frac{\partial}{\partial z} e_3^\top\Bigg(\int\limits_{\omega(z)} y_i D(-\nabla_y,0)^\top A(D(\nabla_y,0)\mathscr{X} + \mathscr{Y})\,dy \\ &\quad + \int\limits_{\partial\omega(z)} y_i D(\nu,0)\top A(D(\nabla_y,0)\mathscr{X} + \mathscr{Y})\,ds_y\Bigg)\mathscr{D}(\partial_z)w = 0. \quad (60)\end{aligned}$$

Здесь были применены «ключевое равенство» $D(e_3)e_i = D(e_i)e_3$ (см. [1, формула (5.1.14)]) в теории тонких стержней, обеспеченное структурой матрицы D из формулы (33), а также правило дифференцирования интегралов с переменными пределами

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{\omega(z)} Z(y,z)\,dy = \int\limits_{\omega(z)} \frac{\partial Z}{\partial z}(y,z)\,dy + (1+\gamma)z^\gamma \int\limits_{\partial\omega(z)} z^{-1-\gamma}y^\top\nu(z^{-1-\gamma}y)Z(y,z)\,ds_y.$$

Другие два условия разрешимости (55) при $q = 1$ после подстановки в них выражений (57) и (49) для вектор-функций U^0 и U^{-1} принимают вид

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\omega(z)} e_3^\top D(e_3)^\top A(D(\nabla_y,0)\mathscr{X}(y,z) + \mathscr{Y}(y))\,dy\mathscr{D}(\partial_z)w(z) = 0, \\ &-\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_{\omega(z)} \theta(y)^\top D(e_3)^\top A(D(\nabla_x,0)\mathscr{X}(y,z) + \mathscr{Y}(y))\,dy\,\mathscr{D}(\partial_z)w(z) = 0.\end{aligned} \quad (61)$$

Наконец, обработаем аналогично выкладкам (60) при помощи формул (49) и (52)–(55) первые два ($i = 1, 2$) условия разрешимости (56) при $q = 2$. Имеем

$$\begin{aligned}\lambda\rho z^{2(1+\gamma)}\,\mathrm{mes}_2(\omega)w_i &= -\frac{\partial}{\partial z}e_i^\top D(e_3)^\top \int\limits_{\omega(z)} A(D(\nabla_y,0)U^1 + D(0,\partial_z)U^0)\,dy \\ &= \frac{\partial}{\partial z}e_3^\top\Bigg(\int\limits_{\omega(z)} y_i D(\nabla_y,0)^\top A(D(\nabla_y,0)U^1 + D(0,\partial_z)U^0)\,dy \\ &\quad - \int\limits_{\partial\omega(z)} y_i D(\nu,0)^\top A(D(\nabla_y,0)U^1 + D(0,\partial_z)U^0)\,ds_y\Bigg) \\ &= -\frac{\partial}{\partial_z}e_3^\top\Bigg(\int\limits_{\omega(z)} y_i D(0,\partial_z)^\top A(D(\nabla_y,0)U^0 + D(0,\partial_z)U^{-1})\,dy \\ &\quad + (1+\gamma)z^\gamma \int\limits_{\partial\omega(z)} y_i D(0, z^{-1-\gamma}y^\top\nu)^\top A(D(\nabla_y,0)U^0 + D(0,\partial_z)U^{-1})\,ds_y\Bigg)\end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial z^2} e_3^\top D(e_3)^\top \int\limits_{\omega(z)} y_i A(D(\nabla_y, 0)\mathscr{X} + \mathscr{Y})\, dy \mathscr{D}(\partial_z) w. \quad (62)$$

Напоминаем, что в этом разделе $\gamma = 1$, однако преобразование (62) верно при любом показателе заострения.

Соотношения (62) и (61) можно переписать как систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений в матричной форме

$$\mathscr{L}(z, \partial_z) w(z) := \mathscr{D}(-\partial_z)^\top \mathbf{M}(z) \mathscr{D}(\partial_z) w(z) = \lambda \rho (w^{(1)}(z)^\top, 0, 0)^\top, \quad z > 0. \quad (63)$$

Здесь $\mathbf{M}$ — матрица-функция размером 4×4, определенная равенством

$$\mathbf{M}(z) = \int\limits_{\omega(z)} (D(\nabla_y, 0)\mathscr{X}(y, z) + \mathscr{Y}(y)) A (D(\nabla_y, 0)\mathscr{X}(y, z) + \mathscr{Y}(y))\, dy. \quad (64)$$

В книге [1, § 5.1, 5.3, 7.3] и статье [11] установлена симметричность и положительная определенность матрицы (64) при $z > 0$. Из формул (57)–(59) и (64) при $\gamma = 1$ вытекает представление

$$\mathbf{M}(z) = \mathbf{D}(z^2)^\top \mathbf{M}(1) \mathbf{D}(z^2), \quad \mathbf{D}(\zeta) = \operatorname{diag}\{\mathbf{D}^{(1)}(\zeta), \mathbf{D}^{(2)}(\zeta)\} = \operatorname{diag}\{\zeta^2, \zeta^2, \zeta, \zeta^2\}, \quad (65)$$

т. е. система (63) имеет структуру Эйлера и ее решения, действительно, следует искать в виде (50).

Замечание 3. 1. Процедуру построения формального асимптотического ряда (48) можно продолжить и определить любое наперед заданное число его членов (см. [12, 13] и [1, § 5.2; 14, гл. 15, 16]). При этом начиная с шага с номером $q = 1$ появляются нетривиальные условия разрешимости задач (55), аналогичные системе обыкновенных дифференциальных уравнений (63). Далее будут найдены решения этой системы, но для соблюдения условий разрешимости на следующих шагах процедуры следует учесть произвол (жесткие смещения в плоскости $\{x : z = 0\}$) в выборе асимптотических членов W^p, являющихся решениями задачи Неймана для двумерной системы уравнений теории упругости, и добавить в них слагаемые

$$\sum_{\alpha=1}^{2} w_{(k)\alpha}(z) e_\alpha, \quad e_3 \left(w_{(k)3}(z) - \sum_{\alpha=1}^{2} y_\alpha \frac{\partial w_{(k)\alpha}}{\partial z}(z) \right) + w_{(k)4}(z)\theta(y), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad (66)$$

идентичные асимптотическим членам (49) и содержащие новые неизвестные столбцы $w_{(k)} = (w_{(k)1}, \ldots, w_{(k)4})^\top$. Первое из выражений (66) присоединяется к W^{k-2}, а второе — к W^{k-1}. В результате оказывается, что упомянутые условия разрешимости предоставляют системы обыкновенных дифференциальных уравнений для определения вектор-функций $w_{(k)}$.

2. Если вектор-функция w не удовлетворяет системе (63), то анзац (48) следует интерпретировать как приближенное асимптотическое решение трехмерной задачи. При этом w оставляет дополнительную невязку в системе уравнений равновесия, главный член которой выглядит следующим образом:

$$z^{-4} \mathscr{Z}(y, z)(\mathscr{L}(z, \partial_z) w(z) - \lambda \rho (w^{(1)}(z)^\top, 0, 0)^\top). \quad (67)$$

Здесь $\mathscr{Z}(y, z) = (\mathscr{Z}^1(z^{-2}y), \mathscr{Z}^2(z^{-2}y), \mathscr{Z}^3, z^{-2}\mathscr{Z}^4(z^{-2}y))$ — гладкая 3×4-матрица, столбцы которой при $z = 1$ составляют систему, биортогональную для

системы столбцов 3×4-матрицы $(e_1, e_2, e_3, \theta(y))$ относительно скалярного произведения в пространстве $L_2(\omega)^3$, причем $\mathscr{Z}^3 = (0, 0, |\omega|^{-1})^\top$ и $\mathscr{Z}_4^q(y) = 0$, $q = 1, 2, 4$. Аналогичная интерпретация возможна и при рассмотрении младших членов $w_{(k)}$ асимптотического ряда, не удовлетворяющих своим системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробное изложение намеченного подхода можно найти в цитированных выше публикациях.

3. Для гладких, но не постоянных функции ρ и матрицы-функции A процедура построения асимптотического ряда остается той же, но расщепления (53), (54) усложняются ввиду необходимости разложения коэффициентов в ряды Тейлора по переменным $y = (y_1, \dots, y_{n-1})^\top$ и z. Подробное изложения процедуры можно найти в [11; 1, гл. 5, 7]. $\square$

Разобьем матрицу $\mathbf{M}(1)$ на блоки $\mathbf{M}^{(\alpha\beta)}(1)$ размером 2×2, причем $\mathbf{M}^{(11)}(1)$ — левый верхний, а $\mathbf{M}^{(22)}(1)$ — правый нижний блоки; кроме того, $\mathbf{M}^{(12)}(1) = \mathbf{M}^{(21)}(1)^\top$. Поскольку спектральный параметр λ отсутствует в третьем и четвертом уравнениях системы (63), находим, что

$$\mathbf{D}^{(2)}(z^2)\partial_z w''(z) = -z^4 \mathbf{M}^{(22)}(1)^{-1}\mathbf{M}^{(21)}(1)\partial_z^2 w'(z). \tag{68}$$

Подставив формулу (68) в первые два уравнения системы (63), получаем следующую редуцированную систему дифференциальных уравнений для укороченного неизвестного столбца w':

$$\partial_z^2\big(z^8 \mathscr{M} \partial_z^2 w'(z)\big) = \lambda\rho z^4 |\omega| w'(z), \quad z > 0. \tag{69}$$

При этом $|\omega|$ — площадь (приведенного) сечения ω и по понятным причинам 2×2-матрица

$$\mathscr{M} = \mathbf{M}^{(11)}(1) - \mathbf{M}^{(12)}(1)\mathbf{M}^{(22)}(1)^{-1}\mathbf{M}^{(21)}(1) \tag{70}$$

сохраняет симметричность и положительную определенность.

Пусть $\varkappa_0 \le \varkappa_1$ — собственные числа матрицы (70); они положительны. Вектор-функция w' из формулы (50) удовлетворяет системе уравнений (69), например, в том случае, если $\mathbf{w}'$ — собственный столбец матрицы $\mathscr{M}$, отвечающий числу $\varkappa_0$, и показатель Λ удовлетворяет формуле

$$(\Lambda^2 - 25/4)(\Lambda^2 - 49/4)\varkappa_0 = \lambda\rho|\omega|. \tag{71}$$

Решая биквадратное уравнение (71), находим

$$\Lambda^2 = \frac{49 + 25}{8} \pm \sqrt{\frac{(49 + 25)^2}{64} - \frac{49 \cdot 25}{16} + \varkappa_0^{-1}\lambda\rho|\omega|}. \tag{72}$$

Таким образом, при условии

$$\lambda > \lambda_\natural := \frac{49 \cdot 25}{16\rho|\omega|}\varkappa_0 \tag{73}$$

один из корней уравнения (71) становится чисто мнимым (меньшая из величин (72) неположительна). Подчеркнем, что собственное число $\varkappa_1$ матрицы $\mathscr{M}$ устанавливает не меньший порог, чем тот, который указан в (73).

В случае изотропного материала числовая матрица $\mathbf{M}(1)$ подсчитана, например, в [1, п. 5.2.5]; при этом матрица становится диагональной и выполнено равенство $\mathscr{M} = \mathbf{M}^{(11)}(1)$, если начало координат $y = 0$ совмещено с центром

тяжести, а оси y_1 и y_2 направлены вдоль главных осей тензора инерции фигуры ω.

Зафиксируем названный чисто мнимый показатель Λ и восстановим при помощи формулы (69) столбцы w'' и w. Принимая во внимание замечание 3(1), построим следующие члены асимптотического анзаца (48) и, в частности, определим вектор-функции $w_{(k)} = (w_{(k)1}, \dots, w_{(k)4})^\top$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} w'_{(k)}(z) = z^{\Lambda-k-5/2}\mathbf{w}'_{(k)}(\ln z), \quad w_{3(k)}(z) = z^{\Lambda-k-3/2}\mathbf{w}_{3(k)}(\ln z), \\ w_{4(k)}(z) = z^{\Lambda-k-7/2}\mathbf{w}_{4(k)}(\ln z), \quad k = 1, 2, \dots \end{gathered} \tag{74}$$

(ср. формулы (50)). Решения эйлеровских систем обыкновенных дифференциальных уравнений с правыми частями специального вида могут приобретать логарифмы, поэтому $\mathbf{w}'_{(k)}$ и $\mathbf{w}''_{(k)}$ — полиномы переменной $\ln z$. Разумеется, соотношения (51) сохраняются, но начиная с номера $q = -1$ в их правых частях могут появиться логарифмические множители.

В качестве требуемой вектор-функции Ψ^m, фигурирующей в соотношениях (47), возьмем сумму N членов анзаца (48), найденных по векторам $m^{-1/2}X_m w$ и $m^{-1/2}X_m w_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, с составляющими (50) и (74). При этом срезающая функция выглядит следующим образом:

$$X_m(z) = X(-\ln z - 2m)X(m + \ln z); \tag{75}$$

здесь $X \in C^\infty(\mathbb{R})$, $X(t) = 1$ при $t \le 0$, $X(t) = 0$ при $t \ge 1$. Полученная вектор-функция Ψ_m гладкая, и ее носитель отделен от точки $\mathscr{O}$, т. е. наверняка $\Psi_m \in \mathbf{H}(\Omega)$. Поскольку $X_m(z) = 1$ при $z \in (e^{-2m}, e^{-m})$, учитывая формулы (1), (49), (50) и $\gamma = 1$, $\operatorname{Re}\Lambda = 0$, заключаем, что при достаточно большом m имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|\Psi^m; \mathbf{H}(\Omega)\|^2 \ge c\|\Psi^m; L_2(\Omega)\|^2 \ge cm^{-1} \int\limits_{e^{-2m}}^{e^{-m}} z^{2(1+\gamma)}|z^{\Lambda-5/2}|^2 \\ \times (1 + O(z(1 + |\ln z|)))\, dz \ge c_0 m^{-1} \ln z\Big|_{e^{-2m}}^{e^{-m}} = c_0, \quad c_0 > 0. \end{aligned}$$

Для второй нормы в оценках (47) при помощи определений (35) и (36), а также формулы Грина находим, что

$$\begin{aligned} \|K\Psi^m - \mu\Psi^m; \mathbf{H}(\Omega)\| &= \sup_{\dots} |\langle K\Psi^m - \mu\Psi^m, u\rangle| \\ &= \mu^{-1} \sup_{\dots} |(AD(\nabla_x)\Psi^m, D(\nabla_x)u)_\Omega - \lambda(\rho\Psi^m, u)_\Omega| \\ &= \mu^{-1} \sup_{\dots} |(L(\nabla_x)\Psi^m - \lambda\rho\Psi^m, u)_\Omega + (N(x, \nabla_x)\Psi^m, u)_{\partial\Omega}|. \end{aligned} \tag{76}$$

При этом многоточие означает то же самое, что в соотношении (46).

Выражения $L\Psi^m - \lambda\rho\Psi^m$ и $N\Psi^m$ образованы невязками, возникшими по двум причинам: из-за замены полного асимптотического ряда суммой N его членов и из-за умножения функций, образующих эти члены, на срезку (75). Невязки первого типа можно сделать сколь угодно быстро затухающими при $z \to +0$ за счет увеличения числа N, а значит, их вклад в выражение (76) мал. Невязки второго типа имеют вид (67), где вектор-функция w заменена столбцом $m^{-1/2}X_m w$ или столбцом $m^{-1/2}X_m w_{(k)}$. Сравнивая порядки (50) и

(74) упомянутых столбцов, а также принимая во внимание замечание 3(2) и тот факт, что w — решение системы уравнений (63), видим, что главная часть невязки определяется по формуле

$$m^{-1/2}z^{-4}\mathscr{Z}(y,z)[\mathscr{L}(z,\partial_z),X_m(z)]w(z)=\mathscr{Z}(y,z)\Phi^m(z), \tag{77}$$

причем $[\mathscr{L},X_m]=\mathscr{L}X_m-X_m\mathscr{L}$ — коммутатор оператора со срезающей функцией. Носитель вектор-функции (77) расположен на объединении множеств $\Xi_m^1=\{x\in\Omega\cap\mathscr{U}:z\in\Upsilon_m^1:=[e^{-m},e^{1-m}]\}$ и $\Xi_m^2=\{x\in\Omega\cap\mathscr{U}:z\in\Upsilon_m^2:=[e^{1-2m},e^{-2m}]\}$. Кроме того, в силу представления (65) ее составляющие подчинены соотношениям

$$\bigl|\Phi_i^m(z)\bigr|=O(m^{-1/2}e^{5hm/2}),\quad \bigl|\Phi_3^m(z)\bigr|=O(m^{-1/2}e^{7hm/2}),$$

$$\bigl|\Phi_4^m(z)\bigr|=O(m^{-1/2}e^{3hm/2}),\quad x\in\Xi_m^h,\quad i,h=1,2.$$

Таким образом, при учете весового неравенства Корна (29) и явной формулы для третьего столбца матрицы $\mathscr{Z}$ (см. замечание 3(2)) получаем, что

$$\left|\int\limits_\Xi\Phi_i(z)\mathscr{Z}^i(z^{-2}y)^\top u(x)\,dx\right|\le cm^{-1/2}\sum_{h=1}^2e^{5hm/2}\int\limits_{\Xi_m^h}|u(x)|\,dx$$

$$\le cm^{-1/2}\sum_{h=1}^2\bigl|\Xi_m^h\bigr|^{1/2}e^{5hm/2}\|u;L_2(\Xi)\|\le cm^{-1/2}\|u;\mathbf{H}(\Omega)\|\le cm^{-1/2},\quad i=1,2,$$

$$\left|\int\limits_\Xi\Phi_3(z)\mathscr{Z}^3(z^{-2}y)^\top u(x)\,dx\right|\le cm^{-1/2}\sum_{h=1}^2e^{7hm/2}\int\limits_{\Xi_m^h}|u_3(x)|\,dx$$

$$\le cm^{-1/2}\biggl(\int\limits_\Xi|x|^{-2}|u_3(x)|^2\,dx\biggr)^{1/2}\le cm^{-1/2}\|u;\mathbf{H}(\Omega)\|\le cm^{-1/2}.$$

Наконец, приведенная в замечании 3(2) формула для четвертого столбца матрицы $\mathscr{Z}$, а также теорема 1 и установленная далее оценка (79) обеспечивают соотношение

$$\left|\int\limits_\Xi\Phi_4(z)z^{-2}\mathscr{Z}^4(z^{-2}y)^\top u(x)\,dx\right|$$

$$\le cm^{-1/2}\sum_{h=1}^2e^{7hm/2}\int\limits_{\Upsilon_m^h}\left|\int\limits_{\omega(z)}\mathscr{Z}^4(z^{-2}y)^\top u(x)\,dy\right|dz\le cm^{-1/2}.$$

Обработка последнего скалярного произведения в (76) опираются на первое утверждение следующей леммы.

Лемма 4. *Примем условия и обозначения теоремы* 1.

1. *Справедливо весовое следовое неравенство*

$$\int\limits_{\partial\Omega}|x|^{-1+\gamma}(|u_3(x)|^2+|x|^{2\gamma}(|u_1(x)|^2+|u_2(x)|^2))\,ds_x\le c(\mathscr{E}(u;\Omega)+\|u;L_2(\Omega\setminus\mathscr{U})\|^2). \tag{78}$$

2. *Для функции*

$$(0,d] \ni z \mapsto \mathbf{Z}(u;z) = z^{-2(1+\gamma)} \int\limits_{\omega(z)} \mathscr{Z}^4(z^{-1-\gamma}y)^\top u(y,z)\,dy$$

верно неравенство

$$\int\limits_0^d z^{2\gamma}|\mathbf{Z}(z)|^2\,dz \le c(\mathscr{E}(u;\Omega) + \|u;L_2(\Omega\setminus\mathscr{U})\|^2). \tag{79}$$

Доказательство. 1. Воспользуемся разложением (20) на ячейке Ξ_q. Оценка (22) для составляющей $\mathbf{U}^q$ после применения следового неравенства [7] и возвращения к координатам x принимает вид

$$q^\tau \int\limits_{\partial\Xi_q\cap\partial\Omega} |\mathbf{U}^q(\mathbf{x}^q)|^2\,ds_x \le c\mathscr{E}(u;\Xi_q). \tag{80}$$

Жесткое смещение $\mathbf{d}(\mathbf{x}^q)\mathbf{a}^q$ удовлетворяет соотношениям

$$\int\limits_{\partial\Xi_q\cap\partial\Omega} z^{-1+3\gamma}|(\mathbf{d}(\mathbf{x}^q)\mathbf{a}^q)_\alpha|^2\,ds_x \le cq^{-4-\tau}(\|\mathbf{u}^q;L_2(\Theta_q')\|^2 + \mathscr{E}(\mathbf{u}^q;\Theta_q)), \quad \alpha = 1,2,$$

$$\int\limits_{\partial\Xi_q\cap\partial\Omega} z^{-1+\gamma}|(\mathbf{d}(\mathbf{x}^q)\mathbf{a}^q)_3|^2\,ds_x \le cq^{-2-\tau}\big(\big\|\mathbf{u}_3^q;L_2(\Theta_q')\big\|^2 + \mathscr{E}(\mathbf{u}^q;\Theta_q)\big).$$

Теперь неравенство (79) выводится из полученных оценок по прежней схеме (см. выкладки, предшествующие формулировке теоремы 1 и начинающиеся с формул (23)).

2. Доказательство использует тот же трюк, что и доказательство предложения 3.4.13 в книге [1]. Не ограничивая общности, считаем, что функция $|u|$ имеет носитель, расположенный на множестве $\overline{\Xi}$ и отделенный от точки $\mathscr{O}$, т. е. $\operatorname{supp}\mathbf{Z} \subset (0,d)$. Благодаря строению двух верхних строк матрицы (21) и свойствам столбца $\mathscr{Z}^4$, названных в замечании 3(2), величина $\mathbf{Z}(\mathbf{da}^q;z)$ не зависит от переменной $z \in (d(q+1)^{-1/\gamma}, dq^{-1/\gamma})$. Таким образом, при учете представления (20) и оценок (22), (80) находим, что

$$\int\limits_{d(q+1)^{-1/\gamma}}^{dq^{-1/\gamma}} z^{2+2\gamma}\,|\partial_z\mathbf{Z}(u;z)|^2\,dz = \int\limits_{d(q+1)^{-1/\gamma}}^{dq^{-1/\gamma}} z^{2+2\gamma}|\partial_z\mathbf{Z}(\mathbf{U}^q;z)|^2\,dz$$

$$\le c\bigg(\int\limits_{\Xi_q}(|\partial_z\mathbf{U}^q|^2 + z^{-2(1+\gamma)}|\mathbf{U}^q|^2)\,dx + \int\limits_{\partial\Xi_q\cap\partial\Omega} z^{-1-\gamma}|\mathbf{U}^q|^2\,ds_x\bigg) \le c\mathscr{E}(u;\Xi_q).$$

Суммируя по $q = 1,2,\dots$ полученные соотношения (без средних их частей) и применяя неравенство Харди, приходим к искомой формуле (79). □

Приведенные рассуждения подтверждают соотношения (47), а значит, и тот факт, что $\{\Psi^m\}$ — сингулярная последовательность для оператора K в точке $\mu = (1+\lambda)^{-1}$, где число λ удовлетворяет условию (73).

5. Выводы и обсуждение. Сформулируем установленные утверждения применительно к краевой задаче (30), (31) в области Ω с пикообразной особенностью границы.

Теорема 5. *Спектр задачи* (30), (31) *расположен на вещественной неотрицательной полуоси.*

1. *Если* $\gamma \in (0,1)$, *то спектр дискретен и собственные числа образуют бесконечно большую последовательность* (39).

2. *Если* $\gamma = 1$, *то существуют такие два положительных числа* $\lambda_\bullet < \lambda_\natural$ (*см. формулы* (73) *и* (44), (41)), *что на полуинтервале* $[0, \lambda_\bullet)$ *расположено единственное собственное число* $\lambda = 0$ *с кратностью шесть и собственным подпространством* (38), *а луч* $[\lambda_\natural, \infty)$ *содержится в непрерывном спектре.*

3. *Если* $\gamma > 1$, *то* $\lambda = 0$ — *точка непрерывного спектра задачи* (30), (31) *и ее собственное число с кратностью шесть.*

Замечание 6. Разумеется, границу $\partial\Omega$ вне некоторой окрестности точки $\mathscr{O}$ и всю границу $\partial\omega$ можно считать липшицевыми. Все выкладки и рассуждения остаются в силе, если последнее включение в определении пика (1) заменить включением $h(z)^{-1}y \in \omega$, где h — гладкая положительная на полуинтервале $(0,d]$ функция, подчиненная соотношениям

$$h(z) = z^{1+\gamma}(h_0 + \tilde{h}(z)), \quad \left|\partial_z^p \tilde{h}(z)\right| \le c_p z^{-p}, \quad p = 1, 2, \dots.$$

Требование гладкости функции h можно ослабить, переделав исследование непрерывного спектра в п. 4, однако для этого необходимо применить другие асимптотические конструкции, нуждающиеся в длительной обработке (ср. статью [15]) и эта возможность в данной работе не реализована. Для построения сингулярной последовательности (47) достаточная гладкость плотности ρ и упругих модулей, составляющих матрицу A, нужна только в малой окрестности точки $\mathscr{O}$. □

Замечание 7. В некоторой зарубежной литературе по определению точечный и непрерывный спектры считаются дизъюнктными множествами. В этом случае термин «непрерывный» в теореме 5 и далее можно заменить термином «существенный». □

На непрерывном спектре может быть точечный спектр и не только собственное число $\mu = 0$ в случае $\gamma > 1$. Предположим, что у области Ω есть N плоскостей зеркальной симметрии и $N \ge 3$ (см. рис. 2). Пусть, как и в п. 4, матрица-функция A и функция ρ постоянны, а упругий материал обладает трансверсальной изотропией, т. е. его свойства инвариантны относительно вращений системы координат $y = (y_1, y_2)$. Введем систему цилиндрических координат (r, φ, z) (при этом $y_1 = r\cos\varphi$ и $y_2 = r\sin\varphi$) и проекции u_r, u_φ, u_z вектора смещений на соответствующие оси. Аналогичный смысл придадим напряжениям $\sigma_{r\varphi}(u)$, $\sigma_{\varphi\varphi}(u)$ и $\sigma_{z\varphi}(u)$. Сузим задачу (30), (31) на «сектор» $\Omega_m = \{x \in \Omega : \varphi \in (m\pi/N, (m+1)\pi/N)\}$ области Ω, $m = 0, 1, \dots, 2N-1$; при этом считаем, что одна из плоскостей симметрии совпадает с плоскостью $\{x : y_2 = 0\}$ и по определению $\Omega_{p+2N} = \Omega_p$. На искусственно образованных поверхностях $\Sigma_m = \{x \in \Omega : \varphi = m\pi/N\}$ и Σ_{m+1} поставим смешанные краевые условия

$$u_\varphi = 0, \quad \sigma_{r\varphi}(u) = \sigma_{z\varphi}(u) = 0 \quad \text{на } \Sigma_m, \tag{81}$$

$$u_r = u_z = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(u) = 0 \quad \text{на } \Sigma_{m+1}. \tag{82}$$

Лемма 8. *Если вектор-функция* u *принадлежит подпространству* $\overset{\circ}{\mathbf{H}}(\Omega_m)$, *т. е. удовлетворяет трем условиям Дирихле, указанным в формулах* (81) *и* (82),

то выполнено весовое неравенство Корна

$$\int\limits_{\Omega_m} r^{-2(1+\gamma)}|u(x)|^2\,dx \le c_m\|u;\mathbf{H}(\Omega_m)\|^2 \tag{83}$$

с постоянной c_m, не зависящей от поля u.

Доказательство. Благодаря упомянутым условиям Дирихле на границе ячейки (19) оценка (22) выполнена для самой функции $\mathbf{u}^q$, а не только для составляющей $\mathbf{U}^q$ ее разложения (20). Дело в том, что для справедливости неравенства Корна необходимо каким-либо образом устранить жесткие смещения, аннулирующие квадратичную форму $\mathscr{E}(\mathbf{u}^q,\mathbf{u}^q;\Xi_q)$ (см. [4, 5, 1] и др.). При проверке теоремы 1 это было сделано посредством условий ортогональности в формуле (20). Нетрудно убедиться в том, что для секторов с острыми углами (т. е. при $N \ge 3$) любое жесткое смещение, удовлетворяющее условиям (81) и (82) одновременно, обращается в нуль. Итак, соотношение (28) принимает вид

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{2\tau}\|u;L_2(\Xi_{qm})\|^2 \le \sum_{q=1}^{\infty}\mathscr{E}(u;\Xi_{qm}),$$

и в прежней схеме из разд. 2 переделывается в весовое неравенство (81). □

В силу оценки (83) вложение $\overset{\circ}{\mathbf{H}}(\Omega_m) \subset L_2(\Omega_m)^3$ компактно (ср. рассуждения, предшествующие формуле (37)), т. е. спектр задачи (30), (31), (81), (82) дискретный, а ее собственные числа положительные и образуют бесконечно большую последовательность $\{\lambda_{pm}\}_{p=1}^{\infty}$. Соответствующие собственные вектор-функции обозначим через u^{pm}.

Пусть $m = 0$ и выполнены условия (81). Введем продолжение $\tilde{u}$ вектор-функции u с секториальной части Ω_0 области Ω на соседний сектор Ω_{2N-1} по формулам

$$\tilde{u}_2(y_1,y_2,z) = -u_2(-y_1,y_2,z), \quad \tilde{u}_\beta(y_1,y_2,z) = u_\beta(y_1,y_2,z), \quad \beta = 1,3,\ y_2 < 0.$$

Нормальная (для части Σ_0 плоскости $\{x : y_2 = 0\}$) компонента вектора смещений оказывается нечетной функцией переменной y_2, а касательные компоненты — четными, поэтому ввиду затребованной симметрии упругих свойств напряжения $\sigma_{r\varphi}(\tilde{u})$ и $\sigma_{z\varphi}(\tilde{u})$ равны нулю при $y_2 = 0$, т. е. продолжение $\tilde{u}$ согласовано с равенствами (81). Такое продолжение через поверхность Σ_0 назовем нечетным.

Пусть теперь $m = 2N - 1$ и выполнены условия (82). Введем продолжение $\hat{u}$ с Ω_{2N-1} на Ω_0 следующим образом:

$$\hat{u}_2(y_1,y_2,z) = u_2(-y_1,y_2,z), \quad \hat{u}_\beta(y_1,y_2,z) = -u_\beta(-y_1,y_2,z), \quad \beta = 1,3,\ y_2 > 0.$$

Теперь нормальная и касательные компоненты — четная и нечетные функции соответственно, $\sigma_{\varphi\varphi}(\hat{u}) = 0$ при $y_2 = 0$, а продолжение называется четным и оказывается согласованным с искусственными краевыми условиями (82) по прежним причинам. Важно то, что в обоих случаях сохраняются система уравнений (30) и краевые условия (31) на внешней поверхности.

Зафиксируем индекс m и собственный вектор u^{pm}. Пусть $\hat{u}^{pm}$ и $\tilde{u}^{pm}$ — четное и нечетное продолжения через поверхности Σ_{m+1} и Σ_m соответственно. В результате получим вектор-функцию, удовлетворяющую системе (30) на троекратно расширенном секторе $\{x \in \Omega : (m-1)\pi < N\varphi < (m+1)\pi\}$ и краевым условиям (31) на части внешней границы $\{x \in \partial\Omega : (m-1)\pi < N\varphi < (m+1)\pi\}$.

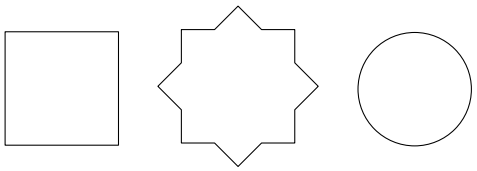

Рис. 2. Сечения с плоскостями симметрии в количестве $N = 4$, $N = 8$ и $N = \infty$.

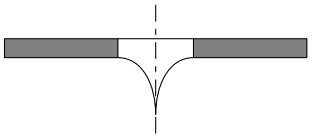

Рис. 3. Канцелярская кнопка: пик, сочлененный с пластиной.

Кроме того, на множестве Σ_{m+2} выполнены соотношения (81), а на множестве Σ_{m-1} — соотношения (82). Повторим процедуру продолжения через поверхности $\Sigma_{m+2}, \Sigma_{m+3}, \dots, \Sigma_{2N+m-2}$ и образуем поле U^p, определенное на всей области Ω и принадлежащее пространству $\mathbf{H}(\Omega)$. Поскольку число секторов в разбиении Ω четно, U^p совпадает на последнем секторе Ω_{m-1} с $\tilde{u}^{pm}$. Найденная вектор-функция U^p является решением задачи (30), (31) при $\lambda = \lambda_{pm}$. Следовательно, последовательность $\{\lambda_{pm}\}_{p=1}^{\infty}$ принадлежит точечному спектру названной задачи.

Замечание 9. Пусть $m = 0$. Поворот $\theta(y)$ (поступательное смещение e_3 вдоль оси аппликат z) удовлетворяет краевым условиям (82) (условиям (81)) на обеих поверхностях Σ_m и Σ_{m+1}. Если $N = 2$ и угол сектора прямой, то краевые условия (81), (82) выполнены для жесткого смещения e_2 вдоль оси ординат y_2. Таким образом, для реализации представленного способа обнаружения точечного спектра[2)] нужно не менее трех плоскостей зеркальной симметрии тела Ω. Симметрия упругих свойств обеспечена однородностью и трансверсальной изотропией материала. Вместе с тем возможны менее ограничительные требования. Например, ортотропный материал с осью z симметрии четвертого порядка (см. [6, 1]) и сечения, изображенные на рис. 2 (при желании углы можно сгладить), обладают всеми необходимыми свойствами. □

Замечание 10. На рис. 3 изображено сечение области вращения, для которой первое собственное число задачи (30), (31), (81), (82) в секторальной части Ω_m тела Ω имеет порядок h^2, где h — относительная толщина кольцевой пластины $\Omega^0(h)$ (тонированная часть сечения). Для проверки этого факта достаточно заметить, что первая частота собственных колебаний жестко защемленной по боковой поверхности пластины равна $O(h)$ (см., например, [18; 1, § 7.2]), и воспользоваться минимаксимальным принципом (см. [2, § 10.2]), продолжив нулем с пластины $\Omega_m^0(h)$ на секториальную часть Ω_m области Ω соответствующую собственную вектор-функцию. Таким образом, на всякий наперед заданный сегмент $[0, \lambda_\ddagger]$ можно посадить любое количество собственных значений задачи (30), (31) и, в частности, порог $\lambda_\bullet$ из теоремы 5(2) можно сделать сколь угодно малым. □

В случае $\gamma = 1$ порог $\lambda_\bullet$ — глобальная характеристика тела Ω, а величина $\lambda_\natural$ — локальная характеристика пика, и они не совпадают в общем случае (ср. замечание 10). Автор не знает, простирается ли непрерывный спектр левее точки $\lambda_\natural$ на вещественной оси, но высказывает гипотезу: на отрезке $(\lambda_\bullet, \lambda_\natural)$

[2)] Идея постановки дополнительных краевых условий, использующих симметрию задачи и отодвигающих непрерывный спектр вправо от начала координат, сформулирована впервые, по-видимому, в работе [16] (см. также статью [17], посвященную плоской задаче теории упругости). Применение краевых условий (81), (82) для этих целей в пространственных задачах теории упругости обсуждалось автором с И. В. Камоцким.

располагается дискретный спектр. Также остается открытым вопрос о наличии и строении непрерывного спектра на луче $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda = 0, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ в случае $\gamma > 1$.

Возникновение непрерывного спектра — прерогатива систем дифференциальных уравнений: нетрудно убедиться в том, что в случае (1) вложение $H^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ компактно и спектр задачи Неймана для формально самосопряженного и положительного скалярного эллиптического оператора второго порядка дискретен.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2001.

2. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.

3. *Назаров С. А.* Весовые неравенства Корна на параболоидальных областях // Мат. заметки. 1997. Т. 62, № 5. С. 751–765. (Исправление: Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 4. С. 640).

4. *Nečas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. Paris-Prague: Masson-Academia, 1967.

5. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.

6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.

7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

8. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

9. *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. Providence RI: Amer. Math. Soc., 1997.

10. *Назаров С. А.* Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы мат. анализа. СПб: Изд-во СПбГУ. 1997. Вып. 17. С. 101–152.

11. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Одномерные уравнения деформации тонких слабоискривленных стержней. Асимптотический анализ и обоснование // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 3. С. 97–131.

12. *Назаров С. А.* Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1982. Вып. 2. С. 65–68.

13. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 5. С. 1–92.

14. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. 2. Berlin: Akademie-Verl., 1991. (Англ. перевод: *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. V. 2. Basel: Birkhäuser Verl., 2000).

15. *Назаров С. А.* Минимальные требования гладкости данных, сохраняющие точность одномерной модели стержней // Проблемы мат. анализа. Новосибирск: Научная книга. 1999. Вып. 19. С. 164–181.

16. *Evans D. V., Levitin M., Vassil'ev D.* Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261, N 1. P. 21–31.

17. *Roitberg I., Vassiliev D., Weidl T.* Edge resonance in an elastic semi-strip // Quart. J. Appl. Math. 1998. V. 51, N 1. P. 1–13.

18. *Назаров С. А.* Об асимптотике спектра задачи теории упругости для тонкой пластины // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 895–912.

Статья поступила 12 марта 2007 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. В. О., 61, Санкт-Петербург 199178
serna@snark.ipme.ru, srgnazarov@yahoo.co.uk