Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 517.983

О ФУНКЦИЯХ ОДНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В. Б. Коротков

Аннотация. Построен самосопряженный ахиезеровский интегральный оператор S в $L_2(-1,1)$ со спектром $\{-1;0;1\}$, обладающий свойством: любая функция $\varphi(S)$, не кратная S, не является ахиезеровским интегральным оператором.

Ключевые слова: ахиезеровский интегральный оператор, функция самосопряженного оператора, спектральная функция.

Памяти С. Л. Соболева

Определение. Интегральный оператор в $L_2(-1,1)$ назовем *ахиезеровским*, или *B-интегральным*, оператором, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет следующему B-условию Н. И. Ахиезера [1]: существует измеримая п. в. конечная неотрицательная функция $\Lambda(s)$, $s \in [-1,1]$, такая, что $|K(s,t)| \leq \Lambda(s)\Lambda(t)$ для п. в. $(s,t) \in [-1,1]^2$.

Теорема. *Существует самосопряженный ахиезеровский интегральный оператор S в $L_2(-1,1)$ со спектром $\{-1;0;1\}$, обладающий свойством: любая функция $\varphi(S)$, не равная αS для любого числа α, не является ахиезеровским интегральным оператором.*

Доказательство. Напомним, что ортонормированная система $\{\psi_n\} \subset L_2(0,1)$ называется *системой абсолютной сходимости* для l_2 [2], если для любой последовательности $\{a_n\} \in l_2$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|\psi_n(s)| < \infty$ для п. в. $s \in [0,1]$, при этом множество сходимости ряда зависит от $\{a_n\}$. Из теоремы 13 в [2] следует, что существуют ортонормированная система $\{\varphi_n\} \subset L_2(0,1)$ абсолютной сходимости для l_2 и измеримое множество $e \subset [0,1]$ положительной меры такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)|^2 = \infty \quad \text{для всех } s \in e. \tag{1}$$

Разобьем интервал $(-1,0)$ на два непересекающихся интервала Δ и Δ_1. Пусть $\{e_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся измеримых подмножеств интервала Δ_1 с положительными мерами, и пусть $\{\varphi_n\} \subset L_2(0,1)$ — ортонормированная система абсолютной сходимости для l_2, удовлетворяющая условию (1). Продолжим функции φ_n, $n = 1,2,3,\dots$, нулем на $(-1,0)$ и за продолженными функциями сохраним их прежнее обозначение. Рассмотрим операторы τ_1 и τ_2 в $L_2(-1,1)$, определяемые равенствами

$$\tau_1 f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}\right)\varphi_n, \quad \tau_2 f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}, \quad f \in L_2(-1,1),$$

здесь χ_{e_n} — характеристическая функция множества e_n, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(-1,1)$. Покажем, что оператор $\tau_1 : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$ B-интегральный с ядром

$$K_1(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s) \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{me_n}}.$$

Действительно, для любой функции $f \in L_2(-1,1)$ для п. в. $s \in [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1} |K_1(s,t)|\,|f(t)|\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)| \int_{-1}^{1} |f(t)| \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{me_n}}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\varphi_n(s)| < \infty,$$

так как $\{\varphi_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2 и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Кроме того,

$$|K_1(s,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\varphi_n(s)| \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{me_n}} = \Lambda_1(s)\Lambda_2(t) \le \Lambda(s)\Lambda(t),$$

где $\Lambda(\xi) = \max(\Lambda_1(\xi), \Lambda_2(\xi))$, так что ядро K_1 удовлетворяет B-условию Ахиезера. В силу того, что множества e_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, попарно не пересекаются, оператор $\tau_2 : L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$ является интегральным оператором с ядром

$$K_2(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{me_n}} \overline{\varphi_n(t)},$$

которое, как и ядро K_1, также удовлетворяет B-условию Ахиезера. Рассмотрим B-интегральный оператор $S = \tau_1 + \tau_2$. Так как $\tau_1^* = \tau_2$, $\tau_2^* = \tau_1$, то S — самосопряженный оператор в $L_2(-1,1)$. Обозначим через Σ замкнутую линейную оболочку ортонормированного семейства $\left\{\frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{me_n}}\right\} \cup \{\varphi_k\}$. Оператор S отображает Σ на Σ и сужение σ оператора S на Σ является унитарным оператором. При этом $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ — самосопряженный оператор. Поэтому спектр оператора σ расположен на пересечении единичной окружности и отрезка $[-1,1]$. Этот спектр не может состоять из одной точки (-1 или 1), в противном случае по спектральной теореме σ был бы равен -1_Σ или 1_Σ, где 1_Σ — тождественный оператор в Σ, что невозможно в силу равенств $\sigma\varphi_n = \chi_{e_n}/\sqrt{me_n}$. Таким образом, спектр оператора σ — множество $\{-1; 1\}$. Следовательно, по спектральной теореме $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ равен разности двух операторов ортогонального проектирования на два ортогональных друг другу подпространства Σ_1 и Σ_2 пространства Σ. Обозначим через P_i определенный на $L_2(-1,1)$ и действующий в $L_2(-1,1)$ оператор ортогонального проектирования на Σ_i, $i = 1, 2$. Мы имеем $S = P_1 - P_2$ или $S = P_2 - P_1$. Будем считать для определенности, что $S = P_1 - P_2$. Отметим, что спектр оператора S — множество $\{-1; 0; 1\}$. Пусть φ — скалярная функция, определенная на спектре S; рассмотрим два случая: 1) $\varphi(0) \ne 0$; 2) $\varphi(0) = 0$. Покажем, что в первом случае $\varphi(S)$ — не интегральный оператор. Пусть $\varphi(0) = \lambda \ne 0$. Тогда сужение оператора $\varphi(S)$ на $L_2(\Delta)$ есть оператор $\lambda 1_\Delta$, где 1_Δ — тождественный оператор в $L_2(\Delta)$ (здесь Δ — интервал, введенный в начале доказательства теоремы). Но тождественный оператор в $L_2(\Delta)$ не интегральный (см., например, [3, с. 20]). Таким образом, в случае $\varphi(0) \ne 0$ оператор $\varphi(S)$ не интегральный. Перейдем к случаю $\varphi(0) = 0$. Пусть оператор $\varphi(S)$ не кратен S, т. е. $\varphi(S) \ne \alpha S$ для любого числа α. Мы имеем

$\varphi(S) = \varphi(-1)P_2 + \varphi(1)P_1$ и, кроме того, $\beta = \varphi(-1) + \varphi(1) \neq 0$. Покажем, что $\varphi(S)$ не является B-интегральным оператором. Рассмотрим систему

$$P_1 - P_2 = S, \quad \varphi(1)P_1 + \varphi(-1)P_2 = \varphi(S).$$

Если предположить, что $\varphi(S)$ — B-интегральный оператор, то из $\beta \neq 0$ и B-интегральности S и $\varphi(S)$ следует, что P_1, P_2 — B-интегральные операторы. Тогда B-интегральным будет оператор $S^+ = P_1 + P_2$. Но

$$S^+ f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}} \right) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}, \quad f \in L_2(-1,1).$$

Покажем, что оператор

$$Lf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n, \quad f \in L_2(-1,1),$$

не является B-интегральным. Действительно, если L — B-интегральный оператор, то его ядро $L(s,t)$ удовлетворяет B-условию Ахиезера $|L(s,t)| \leq \widetilde{L}(s)\widetilde{L}(t)$. Тогда для всех $f \in L_2(-1,1)$

$$\begin{aligned} \|Lf\|^2 &= (Lf, Lf) = (L^2 f, f) = (Lf, f) \\ &\leq \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |L(s,t)|\,|f(t)|\,|f(s)|\,dtds \leq \left(\int_{-1}^{1} \widetilde{L}(\xi)|f(\xi)|\,d\xi \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда по теореме IV.2.13 из [3, с. 125] L — карлемановский интегральный оператор. В силу следствия IV.2.4 из [3, с. 121] для п. в. $s \in [-1,1]$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(s)|^2 < \infty$, что противоречит (1). Таким образом, L не является B-интегральным оператором. Так как оператор

$$Mf = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}} \right) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{me_n}}, \quad f \in L_2(-1,1),$$

B-интегральный, то оператор $S^+ = L + M$ не является B-интегральным. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Пусть E_λ — разложение единицы построенного в доказательстве теоремы самосопряженного оператора S и $E(\Delta) = E_\delta - E_\gamma$, $\Delta = [\gamma, \delta]$.

Следствие 1. *Операторы E_λ не являются B-интегральными при $\lambda > -1$.*

Следствие 2. *Операторы $E(\Delta)$, $\Delta = [\gamma, \delta]$, не являются B-интегральными при $\gamma < -1 < \delta < 0$ и при $0 < \gamma < 1 < \delta$.*

Следуя Карлеману [4] и Н. И. Ахиезеру [1], определим спектральную функцию $F_\lambda(S)$ оператора S равенствами: $F_\lambda(S) = E_\lambda$ при $\lambda < 0$; $F_\lambda(S) = 0$ при $\lambda = 0$; $F_\lambda(S) = E_\lambda - 1$ при $0 < \lambda$. Здесь 1 — тождественный оператор в $L_2(-1,1)$.

Следствие 3. *$F_\lambda(S)$ не является B-интегральным оператором при $-1 < \lambda < 0$ и $0 < \lambda < 1$.*

Следствие 4. *Оператор S^2 и резольвента Фредгольма $S(S - \lambda 1)^{-1}$, где $\lambda \neq \pm 1$, $\lambda \neq 0$, не являются B-интегральными.*

Следствие 5. *Совокупность всех B-интегральных операторов в $L_2(-1,1)$ не является алгеброй.*

В заключение заметим, что если в доказательстве теоремы оператор L не интегральный, то и $\varphi(S)$ — не интегральный оператор. Нам неизвестно, существует ли ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ абсолютной сходимости для l_2 такая, что оператор L не интегральный.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И.* Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 5. С. 93–132.
2. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 6. С. 129–191.
3. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Carleman T.* Sur les équations intégrales singulières a noyau réel et symétrique. Uppsala: A.-B. Lundequistska Bokhandeln, 1923.

Статья поступила 16 января 2007 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090