Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 512.623.4

ТЕОРЕМЫ О НЕПРЕРЫВНОСТИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ В НОРМИРОВАННЫХ ПОЛЯХ. II

Ю. Л. Ершов

Аннотация. Дано улучшение оценки непрерывности в теореме 6 из первой части с использованием теоремы 2 из работы автора о нормах корней и коэффициентов.

Ключевые слова: нормированное поле, непрерывность корней.

К 100-летию выдающегося российского математика
Сергея Львовича Соболева

В статье будет дано заметное улучшение теоремы 6 из [1] с использованием теоремы 2 из [2].

I. Пусть $\mathbb{F} = \langle F, R\rangle$ — нормированное поле; для упрощения обозначений будем предполагать, что F алгебраически замкнуто. В дальнейшем для нормирования v_R и группы нормирования Γ_R будут использоваться упрощенные обозначения v и Γ соответственно.

Через v будем обозначать и нормирование кольца $F[x]$, продолжающее v так: $v(f) \rightleftharpoons \min\{v(a_i) \mid i \leq n\}$ для $f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in F[x]$.

Теорема 1. *Пусть $f \in F[x]$ — унитарный многочлен степени n, $\varepsilon \in \Gamma^+$, $g \in F[x]$ — многочлен степени n и $v(f - g) > n\varepsilon - nvf$. Если $f = \prod\limits_{i<n}(x - \alpha_i)$ — разложение f над F, то существует разложение $g = b_0 \cdot \prod\limits_{i<n}(x - \beta_i)$ над F такое, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$ для $i < n$.*

Проведем предварительные рассмотрения.

Пусть $\gamma \in \Gamma^+$, $a \in F$; *(открытым) шаром радиуса γ с центром в a* назовем множество

$$V_{a,\gamma} \rightleftharpoons \{b \mid b \in F,\ v(a - b) > \gamma\}.$$

Сферой радиуса γ с центром в a назовем множество

$$S_{a,\gamma} \rightleftharpoons \{b \mid b \in F,\ v(a - b) = \gamma\}.$$

Справедливы следующие свойства, легко вытекающие из соотношения $v(a - b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$:

1) *для любого $b \in V_{a,\gamma}$*

$$V_{b,\gamma} = V_{a,\gamma};$$

2) *для любых $b, c \in V_{a,\gamma}$*

$$v(b - c) > \gamma.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–4787.2006.1).

Следствие 1. *Для любых $a, b \in F$, $\gamma \in \Gamma^+$ либо $V_{a,\gamma} = V_{b,\gamma}$, либо $V_{a,\gamma} \cap V_{b,\gamma} = \varnothing$.*

Предложение 1. *Пусть $f, g \in F[x]$ — унитарные многочлены степени n, $\varepsilon \in \Gamma^+$ и $v(f - g) > n\varepsilon$. Тогда шар $V_{0,\varepsilon}$ содержит одинаковое число корней (подсчитываемых с кратностью) многочленов f и g и для любого $\gamma \geq \varepsilon$ на сфере $S_{0,\gamma}$ лежит одинаковое число (с кратностью) корней f и g.*

Пусть $f = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, $g = x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n$. Условие $v(f - g) > n\varepsilon$ означает, что $v(a_k - b_k) > n\varepsilon$ для любого $k \leq n$ ($a_0 = b_0 = 1$). Отсюда следует, что многочлены f и g $n\varepsilon$-близки (определение в [2]). Но тогда из теоремы 2 в [2] и вытекают все заключения предложения. □

Пусть $F[x, y]$ — кольцо многочленов от переменных x, y над F; если положить $z \rightleftharpoons x - y$, то, очевидно,

$$F[x, y] = F[y, z]; \quad R[x, y] = R[y, z], \quad \mathfrak{m}(R)[x, y] = \mathfrak{m}(R)[y, z].$$

Определим на кольце $F[x, y] = F[y, z]$ *гауссовы продолжения* $v_{x,y}$ и $v_{y,z}$ нормирования v так:

$$v_{x,y}(h) \rightleftharpoons \min_{i,j \leq m} v(a_{i,j}) \quad \text{для } h = \sum_{i,j \leq m} a_{i,j} x^i y^j \in F[x, y],$$

$$v_{y,z}(g) \rightleftharpoons \min_{i,j \leq m} v(b_{i,j}) \quad \text{для } g = \sum_{i,j \leq m} b_{i,j} y^i z^j \in F[y, z].$$

Лемма 1. *Нормирования $v_{x,y}$ и $v_{y,z}$ кольца $F[x, y] = F[y, z]$ совпадают.*

Действительно, из равенств $R[x, y] = R[y, z]$ и $\mathfrak{m}(R)[x, y] = \mathfrak{m}(R)[y, z]$ следуют эквивалентности: для любого $h \in F[x, y] = F[y, z]$

$$v_{x,y}(h) = 0 \Leftrightarrow h \in R[x, y] \setminus \mathfrak{m}(R)[x, y] \Leftrightarrow h \in R[y, z] \setminus \mathfrak{m}(R)[y, z] \Leftrightarrow v_{y,z}(h) = 0.$$

Отсюда и вытекает равенство $v_{x,y} = v_{y,z}$. □

Обозначим через v_G нормирование поля $F(x, y) = F(y, z)$, продолжающее $v_{x,y} = v_{y,z}$.

Пусть

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \in F[x] \leq F[x, y] = F[y, z].$$

Тогда $f(x) = f(z + y)$ однозначно представим в виде

$$\sum_{i,j \leq n} c_{i,j} y^i z^j = \sum_{j \leq n} \Big(\sum_{i \leq n-j} c_{i,j} y^i \Big) z^j = \sum_{j \leq n} f^{(j)}(y) z^j,$$

где

$$f^{(j)}(y) = \sum_{j \leq n-j} c_{i,j} y^i \in F[y], \quad c_{i,j} = a_{n-(i+j)} \overline{C}^j_{i+j} \in F, \quad j \leq n,$$

а $\overline{C}^j_{i+j}$ — обычный биномиальный коэффициент $C^j_{i+j} \in Z < \mathbb{Q}$, если поле F имеет характеристику 0, и $\overline{C}^j_{i+j}$ — образ целого C^j_{i+j} в $F_p (\rightleftharpoons Z/pZ) \leq F$, если поле F имеет характеристику $p > 0$.

Заметим, что из определений легко следует:

1) *если $i, j \leq n$ и $i + j > n$, то $c_{i,j} = 0$; в частности, степень многочлена $f^{(j)}(y)$ не превосходит $n - j$;*

2) $f^{(0)}(y) = f(y)$ *и* $f^{(n)}(y) = a_0$.

Имеем

$$vf = v_G f = \min_{i \le n} v(a_i) = \min_{i,j \le n} v(c_{i,j}).$$

Отсюда сразу получаем, что

$$vf = \min_{j \le n} v_G f^{(j)} \text{ и } vf \le v_G f^{(j)} = vf^{(j)}(x).$$

Для любого $a \in F$ имеет место равенство (разложение Тейлора)

$$f(x) = \sum_{j \le n} f^{(j)}(a)(x-a)^j.$$

Лемма 2. (i) *Если* $a \in R$, *то* $v(f^{(j)}(a)) \ge v(f^{(j)}) \ge v(f)$ *для* $j \le n$.
(ii) *Если* $a \in F \setminus R$, *то* $v(f^{(j)}(a)) \ge v(f) + (n-j)v(a)$ *для* $j \le n$.

Доказательство сразу следует из формулы

$$f^{(j)}(a) = \sum_{i \le n-j} a_{n-(i+j)} \overline{C}^{j}_{i+j} a^i. \quad \square$$

Пусть $f(x) \in F[x]$ — многочлен степени n, $a \in F$; через f_a обозначим многочлен

$$f(x+a) = \sum_{j \le n} f^{(j)}(a) x^j.$$

Замечания. 1. Имеет место равенство $f_a(x-a) = f(x)$; в частности, $f(b) = f_a(b-a)$, $f_a(b) = f(b-a)$ для любого $b \in F$.

2. Если $\alpha \in F$ — корень f, то $\alpha - a$ — корень f_a; если $\beta \in F$ — корень f_a, то $\beta + a$ — корень f.

3. Если $f = a_0 \prod\limits_{i<n} (x - \alpha_i)$ — разложение на линейные множители, то

$$f_a = a_0 \prod_{i<n} (x - (\alpha_i - a)).$$

Следствие 2. *Для любого* $\gamma \in \Gamma^+$ *многочлен* f *имеет в* $V_{a,\gamma}$ *столько же корней (с кратностью), сколько многочлен* f_a *имеет корней (с кратностью) в* $V_{0,\gamma}$.

Действительно, $\alpha \in V_{a,\gamma} \Leftrightarrow \alpha - a \in V_{0,\gamma}$. $\square$

Лемма 3. *Если* $f, g \in F[x]$ — *унитарные многочлены степени* n, $\gamma \in \Gamma^+$, $a \in F$, $v(f-g) > \gamma$, *то*

i) $v(f_a - g_a) > \gamma$, *если* $v(a) \ge 0$;

ii) $v(f_a - g_a) > \gamma + (n-1)v(a)$, *если* $v(a) < 0$.

Лемма 3 получается из леммы 2, если заметить, что $f_a - g_a = (f-g)_a$ и $\deg\big(f_a^{(0)} - g_a^{(0)}\big) < n$ (это — следствие унитарности f и g). $\square$

Предложение 2. *Пусть* $f, g \in F[x]$ — *унитарные многочлены степени* n, $\varepsilon \in \Gamma^+$, $a \in R$, $v(f-g) > n\varepsilon$. *Тогда многочлены* f *и* g *имеют одинаковое число корней (с кратностью) в шаре* $V_{a,\varepsilon}$.

Многочлен f (g) имеет в $V_{a,\varepsilon}$ столько же корней, сколько многочлен f_a (g_a) в $V_{0,\varepsilon}$ (следствие 2). Но по лемме 2 $v(f_a - g_a) > n\varepsilon$ и по предложению 1 f_a и g_a имеют одинаковое число (с кратностью) корней в $V_{a,\varepsilon}$. $\square$

Предложение 2′. *Пусть $f, g \in F[x]$ — унитарные многочлены степени n, $\varepsilon \in \Gamma^+$, $a \in F \setminus R$ ($\Leftrightarrow v(a) < 0$), $v(f-g) > n\varepsilon - (n-1)v(a)$. Тогда многочлены f и g имеют одинаковое число корней (с кратностью) в шаре $V_{a,\varepsilon}$.*

Доказывается так же, как предложение 2, с учетом того, что $v(f-g) > n\varepsilon - (n-1)v(a)$ влечет $v(f_a - g_a) > n\varepsilon$ (лемма 3(ii)). $\square$

Пусть $f \in F[x]$ — унитарный многочлен и

$$\sigma^*(f) \rightleftharpoons \min\{0, v(\alpha) \mid \alpha \in F,\ f(\alpha) = 0\}$$

(отметим, что $\sigma(f) \rightleftharpoons \min\{v(\alpha) \mid \alpha \in F,\ f(\alpha) = 0\}$ называется *спектральной нормой* многочлена f}).

Установим теорему 1 для унитарных многочленов в более точной форме.

Теорема 1′. *Пусть $f, g \in F[x]$ — унитарные многочлены степени n, $\varepsilon \in \Gamma^+$, $v(f-g) > n\varepsilon - (n-1)\sigma^*(f)$. Тогда для разложения $f = \prod\limits_{i<n}(x - \alpha_i)$ существует разложение $g = \prod\limits_{i<n}(x - \beta_i)$ такое, что $v(\alpha_i - \beta_i) > \varepsilon$ для $i < n$.*

Так как f — унитарный многочлен, то $\sigma^*(f) \leq 0$ и

$$v(f-g) > n\varepsilon - (n-1)\sigma^*(f) \geq n\varepsilon.$$

Пусть α — корень многочлена f. Если $\alpha \in R$, то по предложению 2 шар $V_{a,\varepsilon}$ содержит столько же корней многочлена g (с кратностью), что и многочлен f. Если $\alpha \notin R$, то

$$v(\alpha) < 0, \quad \sigma^*(f) \leq v(\alpha), \quad n\varepsilon - (n-1)\sigma^* f \geq n\varepsilon - (n-1)v(\alpha)$$

и по предложению 2′ шар $V_{a,\varepsilon}$ содержит столько же корней многочлена g (с кратностью), что и многочлен f. Так как множество $V_\varepsilon \rightleftharpoons \cup\{V_{\alpha,\varepsilon} \mid \alpha \in F, f(\alpha)\} = 0$ содержит все корни (n штук) многочлена f, то можно так перенумеровать корни $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ многочлена g, что $\beta_i \in V_{\alpha_i,\varepsilon}$, $i < n$. $\square$

Обратимся теперь к доказательству теоремы 1. Заметим, что имеет место неравенство $v(f) \leq \sigma^*(f)$ (≤ 0). Действительно, $v(f) \leq 0$, так как f унитарный, и $v(f) \leq \sigma^*(f)$, если $\sigma^*(f) = 0$. Если же $\sigma^*(f) < 0$, то $\sigma^*(f) = \gamma_0$ в обозначениях теоремы 1 из [2] и по п. (1) этой теоремы

$$\gamma_0 = \frac{1}{k_1} v(a_{k_1}) \geq v(a_{k_1}) \geq v(f).$$

Тогда по условию теоремы имеем

$$v(f-g) > n\varepsilon - nvf \geq n\varepsilon - (n-1)\sigma^*(f) - vf.$$

Пусть $g = b_0 g_0$, где $b_0 \in F^*$, $g_0 \in F[x]$ — унитарный многочлен. Покажем, что $v(f - g_0) > n\varepsilon - (n-1)\sigma^*(f)$. Из условий $v(f-g) > 0$, $vf \leq 0$, следует, что $v(f) = v(g)$. Из $v(f-g) > n\varepsilon - nvf$ вытекает, что $v(1-b_0) > n\varepsilon - nv(f)$. Тогда

$$\begin{aligned} v(g - g_0) &= v((1-b_0)g_0) = v(1-b_0) + v(g_0) \\ &> n\varepsilon - nv(f) + v(g_0) = n\varepsilon - (n-1)v(f). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что $v(1-b_0) > 0$ влечет $v(b_0) = 0$ и

$$v(g_0) = v\big(b_0^{-1} g\big) = v(g) - v(b_0) = v(g) = v(f).$$

Имеем

$$v(f-g_0) = v(f-g+g-g_0) \geq \min\{v(f-g), v(g-g_0)\}$$
$$> n\varepsilon - (n-1)(f) \geq n\varepsilon - (n-1)\sigma^*(f).$$

Применяя теорему $1'$, находим разложение $g_0 = \prod\limits_{i<n}(x-\beta_i)$ такое, что $v(\alpha_i-\beta_i) > \varepsilon$ для $i<n$.

Теорема доказана. $\square$

В заключительном разделе покажем как, используя идеи работы Бринка [3], можно уточнить теорему $1'$.

II. Автор всегда испытывал (и испытывает) психологическое неприятие рассуждений (и соответствующих утверждений), использующих многоугольник Ньютона. Второй абзац предисловия в книге К. Шевалле [4] показывает, что эта ситуация не уникальна.

В статье [3] отмечено, что Гензель, к удивлению Бринка, никогда не упоминал о возможностях метода многоугольника Ньютона, в то время как этот метод является “a ubiquitous theme at this article” («вездесущей темой этой статьи»).

Поэтому, ознакомившись в феврале 2006 г. с препринтом статьи [3], автор заинтересовался лишь введенным там понятием сепаранта многочлена и теоремой 1, которая была независимо найдена автором с менее точной границей (см. теорему 2 в [1]).

Однако недавно (декабрь 2007 г.), взглянув еще раз на статью [3], автор понял, что на теорему 1 из статьи [2] можно смотреть как на алгоритм нахождения вершин многоугольника Ньютона, а рассуждения из работы [2] позволяют доказать все (весьма интересные) результаты работы [3] без использования многоугольника Ньютона.

Приведем обобщение теоремы 2 из [3], которое будет уточнением теоремы $1'$ настоящей работы. (Заметим, что для унитарных $f, g \in R[x]$ теорема $1'$ является следствием теоремы 2 из [3].)

Пусть $f = \prod\limits_{i<n}(x-\alpha_i) \in F[x]$ — унитарный многочлен, $a \in F$; *функцией Бринка* $B_{f,a} : \Gamma^+ \longrightarrow \Gamma^+$ назовем отображение, определенное так:

$$B_{f,a}(\gamma) \rightleftharpoons \sum_{i<n} v_\gamma(\alpha_i - a), \quad \gamma \in \Gamma^+,$$

где

$$v_\gamma(\alpha) \rightleftharpoons \begin{cases} v(\alpha), & \text{если } v(\alpha) \leq \gamma, \\ \gamma, & \text{если } v(\alpha) \geq \gamma, \end{cases}$$

для $\alpha \in F$.

Пусть $B^*_{f,a} \rightleftharpoons \max\{0, B_{f,a}(\gamma)\}$.

Теорема 2. *Пусть $f, g \in F[x]$ — унитарные многочлены, $f = \prod\limits_{i<n}(x-\alpha_i)$, $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1} \in \Gamma^+$ и*

$$B^*_{f,\alpha_i}(\gamma_i) - (n-1)\sigma^*(f) < v(f-g)$$

для $i<n$. Тогда существует разложение $g = \prod\limits_{i<n}(x-\beta_i)$ такое, что $v(\alpha_i-\beta_i) > \gamma_i$ для $i<n$.

Эта теорема является следствием теоремы 3, уточняющей теорему 2 из [2].

Пусть $\langle F, R\rangle$, $\langle F', R'\rangle$ — нормированные поля, Γ — линейно упорядоченная группа и $\Gamma_R, \Gamma_{R'}$ — подгруппы группы Γ. Вместо обозначений нормирований v_R и $v_{R'}$ будем использовать обозначения v и v' соответственно.

Теорема 3. *Пусть*

$$f(x) = \prod_{i<n}(x - \alpha_i) \in F[x], \quad g = \prod_{i<n}(x - \beta_i) \in F'[x]$$

— унитарные многочлены и

$$v(\alpha_0) \leq v(\alpha_1) \leq \cdots \leq v(\alpha_{n-1}), \quad v'(\beta_0) \leq v'(\beta_1) \leq \cdots \leq v'(\beta_{n-1}).$$

Пусть $\gamma \in \Gamma^+$ *и* $t \leq n$ *таково, что* $v(\alpha_i) < \gamma$ *для* $i < t$ *и* $v(\alpha_t) \geq \gamma$, *если* $t < n$. *Тогда если многочлены* f *и* g $B^*_{f,0}(\gamma)$*-близки, то* $v(\alpha_i) = v'(\beta_i)$ *для* $i < t$ *и* $v'(\beta_t) \geq \gamma$, *если* $t < n$.

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 2 в [2]. □

Теорема 2 получается из теоремы 3 так же, как теорема $1'$ из теоремы 2 в [2]. Для этого нужен аналог предложения $2'$.

Предложение $2''$. *Пусть* $f, g \in F[x]$ *— унитарные многочлены степени* n, $\gamma \in \Gamma^+$, $a \in F$ *и*

$$v(f - g) > B^*_{f,a}(\gamma) - (n - 1)v_0(a).$$

Тогда f *и* g *имеют одинаковое число корней (с кратностью) в шаре* $V_{a,\gamma}$.

Доказательство аналогично доказательству предложений 2 и $2'$ и основано на теореме 3 и на том, что $B^*_{f_a,0}(\gamma) = B^*_{f,a}(\gamma)$ и $v(f-g) > B^*_{f,a}(\gamma) - (n-1)v_0(a)$ влечет $v(f_a - g_a) > B^*_{f,a}(\gamma)$ (лемма 3). □

Автор благодарен П. С. Колесникову за замечания, способствовавшие улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теоремы о непрерывности корней многочленов в нормированных полях // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 6. С. 1258–1264.
2. *Ершов Ю. Л.* Теорема о нормах корней и коэффициентов // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 5. С. 589–591.
3. *Brink D.* New light on Hensel's lemma // Expos. Math. 2006. V. 24, N 4. P. 291–306.
4. *Шевалле К.* Введение в теорию алгебраических функций об одной переменной. М.: Физматгиз, 1959.

Статья поступила 16 марта 2008 г.

Ершов Юрий Леонидович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ershov@math.nsc.ru