Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2008. Том 49, № 5

УДК 519.21

ТАУБЕРОВЫ И АБЕЛЕВЫ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БЫСТРО УБЫВАЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УСТОЙЧИВЫМ ЗАКОНАМ

А. А. Боровков

Аннотация. Установлены весьма простые утверждения тауберова и абелева типов, позволяющие находить связь асимптотических свойств преобразования Лапласа на бесконечности с асимптотикой соответствующих плотностей для быстро убывающих (на бесконечности или в окрестности нуля) распределений. В качестве приложений теорем тауберова типа найдена асимптотика плотности $f^{(\alpha,\rho)}(x)$ «крайних» устойчивых законов с параметрами (α,ρ), когда $\rho=\pm1$, а x находится в области быстрого убывания $f^{(\alpha,\rho)}(x)$. Ранее эта асимптотика была найдена в [1–5], но более сложным путем.

Ключевые слова: тауберовы теоремы, абелевы теоремы, быстро убывающее распределение, преобразование Крамера, асимптотика плотности устойчивого закона в зоне быстрого убывания.

Светлой памяти
Сергея Львовича Соболева
посвящается

1. Введение. Пусть ξ — случайная величина с распределением $\mathbf{F}$,

$$\psi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda\xi}.$$

В этой заметке мы будем называть распределение $\mathbf{F}$ *быстро убывающим на бесконечности*, если $\mathbf{F}(x,\infty)\downarrow 0$ при $x\uparrow\infty$ быстрее любой экспоненты:

$$-\ln\mathbf{F}(x,\infty)\gg x.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(\lambda)$ была аналитична во всей полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0$.

Мы будем говорить, что $\mathbf{F}$ *быстро убывает в нуле*, если $\mathbf{F}(0,\infty)=0$ и $\mathbf{F}(-x,0)\downarrow 0$ при $x\downarrow 0$ быстрее любой степенной функции:

$$-\ln\mathbf{F}(-x,0)\gg\ln x.$$

В основе классических тауберовых теорем лежит следующая тауберова теорема Карамата (см., например, теорему 1.7.1 в [6]). Обозначим через $V(x)$ правильно меняющуюся функцию (п.м.ф.) при $x\to\infty$, т. е. функцию, представимую в виде $V(x)=x^{\alpha}L(x)$, где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция (м.м.ф.). Класс таких функций обозначим через $\mathscr{R}_{\alpha}$.

Пусть $U(x)$ — *неубывающая, непрерывная справа функция на* $(0,\infty)$, $\widehat{U}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{\lambda x}\,dU(x)$, $\widehat{U}(0)=\infty$. *Тогда соотношения*

$$U(x) \sim V(x)/\Gamma(1+\alpha) \text{ при } x\to\infty, \quad \widehat{U}(\lambda) \sim V(1/\lambda) \text{ при } \lambda\uparrow 0,$$

где $V \in \mathscr{R}_\alpha$, $\alpha \ge 0$, *эквивалентны*.

Аналогичные утверждения справедливы и для монотонных плотностей $u(x)$, когда $U(x) = \int\limits_0^x u(t)dt$.

Такого же рода теоремы справедливы и относительно связи асимптотики п.м.ф. $U(x)$ в нуле с асимптотикой $\widehat{U}(\lambda)$ при $\lambda\to-\infty$ (см., например, [7, гл. 13, § 5, теорема 3]). Весьма полный обзор тауберовых теорем см. в [6].

Вернемся к распределениям. Названные теоремы позволяют устанавливать связь между асимптотиками $\mathbf{F}(x,\infty)$ при $x\to\infty$ и $\psi(\lambda)$ при $\lambda\uparrow\mu$ в случае, когда

$$\mathbf{F}(dx) = e^{-\mu x}dV(x), \quad \psi(\mu)=\infty,$$

где $V(x)$ — п.м.ф.

Если $\psi(\mu)<\infty$ (что всегда имеет место при $\mu=0$), то можно устанавливать связь между асимптотиками $\int\limits_0^x t^k\mathbf{F}(dt)$ при $x\to\infty$ и $\psi^{(k)}(\lambda)$, $k\ge 1$, при $\lambda\uparrow\mu$, если $\psi^{(k-1)}(\mu)<\infty$, $\psi^{(k)}(\mu)=\infty$.

Из сказанного ясно, что для быстро убывающих распределений приведенные выше теоремы неприменимы. В этом случае нам известны лишь «грубые» теоремы тауберова и абелева типов, устанавливающие связь между асимптотиками $-\ln\mathbf{F}(x,\infty)$ при $x\to\infty$ и $\ln\psi(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ (между $-\ln\mathbf{F}(-x,0)$ при $x\downarrow 0$ и $\ln\psi(\lambda)$ при $\lambda\to\infty$ для распределений, быстро убывающих в нуле). Примером таких утверждений является следующая тауберова теорема (см., например, теорему 4.12.7 в [6]).

Обозначим через $v^{(-1)}(s)$ обобщенную обратную функцию к $v\in\mathscr{R}_\alpha$:

$$v^{(-1)}(s) = \inf\bigl\{t : v(t) > s\bigr\}, \quad \text{если } v(t)\to\infty \quad (t\to\infty);$$

$$v^{(-1)}(s) = \inf\bigl\{t : v(t) < s\bigr\}, \quad \text{если } v(t)\to 0 \quad (t\to\infty).$$

Теорема A (Касахара, 1978). *Пусть* $\psi(\lambda)<\infty$ *при всех* $\lambda>0$, $v\in\mathscr{R}_\alpha$, $\alpha\in(0,1)$. *Положим* $w(\lambda) := \frac{\lambda}{v(\lambda)} \in \mathscr{R}_{1-\alpha}$. *Тогда для* $c>0$ *соотношения*

$$-\ln\mathbf{F}(x,\infty) \sim cv^{(-1)}(x) \quad (x\to\infty); \tag{1}$$

$$\ln\psi(\lambda) \sim (1-\alpha)\left(\frac{\alpha}{c}\right)^{\alpha/(1-\alpha)} w^{(-1)}(\lambda) \quad (\lambda\to\infty) \tag{2}$$

эквивалентны.

Аналогичное утверждение справедливо для распределений, быстро убывающих в нуле (см. теорему 4.12.9 в [6]). Теорему A называют *тауберовой*, хотя она является одновременно тауберовой ((2) $\Rightarrow$ (1)) и абелевой ((1) $\Rightarrow$ (2)).

По-видимому, такого же рода утверждения имеют место и для монотонных плотностей $f(x) = \frac{\mathbf{F}(dx)}{dx}$, если таковые существуют (ср. с теоремой 4.12.11 в [6]).

Целью настоящей работы является отыскание «точных» тауберовых и абелевых теорем для быстро убывающих распределений. Эти теоремы доказываются весьма просто и показывают, что определяющим в этом случае для тауберовых теорем является не принадлежность классу $\mathscr{R}_\bullet$, а «непрерывность на бесконечности» $(\ln\psi(\lambda))''$ (или $(\ln \mathbf{F}(x,\infty))''$ для абелевых теорем). Таким образом, традиционная ориентация в тауберовых теоремах на правильно меняющиеся функции здесь не всегда оказывается оправданной, хотя в случае $(\ln\psi(\lambda))'' \in \mathscr{R}_\bullet$ (или $(\ln \mathbf{F}(x,\infty))'' \in \mathscr{R}_\bullet$) проверка нужных условий существенно упрощается. Простоты ради мы ограничимся рассмотрением лишь плотностей $f(x)$ быстро убывающих распределений. В пп. 2, 3 для них приведены теоремы тауберова типа, в п. 4 — абелева типа. В п. 5 рассмотрены применения тауберовых теорем к отысканию асимптотики плотностей крайних устойчивых законов в области быстрого убывания. Эта задача в 50-х годах прошлого века поставлена А. Н. Колмогоровым и решена в [1–5] путем вычислений весьма сложных интегральных выражений. Предложенный в настоящей заметке подход, на наш взгляд, проще. Отметим, что в [3–5] были найдены также асимптотические разложения. Приведенные ниже утверждения также допускают уточнения, позволяющие получать асимптотические разложения (см. замечание 1).

2. Тауберовы теоремы для распределений с быстро убывающей плотностью на положительной полуоси. Пусть, как и прежде, ξ — случайная величина с распределением $\mathbf{F}$ таким, что $\mathbf{F}(x,\infty) > 0$ при $x > 0$, а функция $\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$ аналитична во всей полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (т. е. $\mathbf{F}(x,\infty)$ убывает при $x\to\infty$ быстрее любой экспоненты, $\psi(\lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\infty$). Положим

$$m(\lambda) := \ln\psi(\lambda), \quad a = a(\lambda) := m'(\lambda), \quad b^2 = b^2(\lambda) := m''(\lambda) \tag{3}$$

и обозначим через $\Lambda(x)$ функцию уклонений (преобразование Лежандра над $m(\lambda)$)

$$\Lambda(x) := \sup_\lambda(\lambda x - m(\lambda)),$$

а через $\lambda(x)$ — точку λ, в которой этот sup достигается; как мы увидим ниже, $\lambda(x)$ есть решение уравнения $m'(\lambda) = x$, т. е. $\lambda(x) = a^{(-1)}(x)$. Так как $m'(\lambda)\uparrow$, это решение всегда существует и единственно, $\lambda(x)\to\infty$ при $x\to\infty$.

Теорема 1. *Пусть функция $\psi(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям.*

(i) *При каждом фиксированном t_0 и $\lambda\to\infty$ равномерно по $|t|\le t_0$ выполняется*

$$m''\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) = m''(\lambda)(1+o(1)). \tag{4}$$

(ii) *Отношение $\frac{|\psi(\lambda+it/b)|}{\psi(\lambda)}$ интегрируемо по t равномерно по всем достаточно большим λ.*

Тогда распределение $\mathbf{F}$ имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda''(x)}}e^{-\Lambda(x)}(1+o(1)) \tag{5}$$

при $x\to\infty$, где

$$\Lambda''(x) = \frac{1}{m''(\lambda(x))}. \tag{6}$$

Как будет видно из доказательства, основным (в известном смысле) условием в этой теореме является условие (i). Условие (ii) обеспечивает существование плотности.

Если $m''(\lambda)$ есть п.м.ф., которую мы запишем в виде

$$m''(\lambda) = \alpha(\alpha-1)\lambda^{\alpha-2}L(\lambda), \tag{7}$$

где $\alpha > 1$, $L(\lambda)$ — м.м.ф., то функции $m'(\lambda)$ и $m(\lambda)$ будут обладать свойствами

$$m'(\lambda) \sim \alpha\lambda^{\alpha-1}L(\lambda), \quad m(\lambda) \sim \lambda^{\alpha}L(\lambda)$$

и также будут правильно меняющимися. Так как $m''(\lambda) \gg \lambda^{-1}$ при $\lambda \to \infty$, то $\frac{1}{\sqrt{m''(\lambda)}} \ll \sqrt{\lambda} = o(\lambda)$ и условие (i) всегда выполнено (при некотором уточнении свойств м.м.ф. $L(\lambda)$ в комплексной плоскости). Функция $\lambda(x) = a^{(-1)}(x)$ будет иметь вид

$$\lambda(x) = x^{\frac{1}{\alpha-1}}L_1(x),$$

где L_1 — медленно меняющаяся функция (см., например, теорему 1.5.12 в [6]), которая в широких предположениях может быть найдена в явном виде в терминах функции L (см., например, теорему 1.3 в [8, гл. 1]). Так как $\Lambda'(x) = \lambda(x)$ (см. (13)), то в рассматриваемом случае получаем в явном виде асимптотику $\Lambda(x)$:

$$\Lambda(x) = \Lambda(0) + \int_0^x \lambda(v)dv \sim \frac{\alpha-1}{\alpha}x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}L_1(x)$$

(ср. со связью асимптотик (1), (2) в теореме A; при выполнении (7) $m(\lambda) \in \mathscr{R}_\alpha$ и теорема 1 является уточнением теоремы A).

Теорема 1 уточняет также (в случае существования плотности) и соотношение

$$\Lambda(x) \sim -\ln \mathbf{P}(\xi \geq x) \quad \text{при } x \to \infty,$$

которое, по-видимому, имеет место в широких предположениях (иллюстрации к этому факту можно найти в [9]).

Доказательство теоремы 1. Пусть ξ_λ — преобразование Крамера над ξ в точке λ, т. е. случайная величина, имеющая распределение

$$\mathbf{F}_{\xi_\lambda}(dx) = \frac{e^{\lambda x}\mathbf{F}(dx)}{\psi(\lambda)},$$

так что

$$\mathbf{F}(dx) = e^{-(\lambda x - m(\lambda))}\mathbf{F}_{\xi_\lambda}(dx). \tag{8}$$

В дальнейшем в качестве λ мы выберем значение $\lambda(x)$, при котором достигается $\sup(\lambda x - m(\lambda))$. Так как $m'(\lambda) \uparrow \infty$ при $\lambda \uparrow \infty$, значение $\lambda(x)$ является единственным решением уравнения $m'(\lambda) = x$, при этом $\lambda(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Поэтому в нижеследующих рассмотрениях будем считать λ большим. Имеем

$$\mathbf{E}e^{\mu\xi_\lambda} = \frac{\psi(\lambda+\mu)}{\psi(\lambda)}, \quad \mathbf{E}\xi_\lambda = a = m'(\lambda), \quad \mathbf{D}\xi_\lambda = b^2 = m''(\lambda). \tag{9}$$

Рассмотрим нормированную случайную величину

$$\eta = \frac{\xi_\lambda - a}{b}, \tag{10}$$

для которой

$$\varphi_\eta(t) := \mathbf{E}e^{it\eta} = e^{-\frac{iat}{b}}\frac{\psi\left(\lambda + \frac{it}{b}\right)}{\psi(\lambda)} = \exp\left\{-\frac{iat}{b} + m\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - m(\lambda)\right\}. \tag{11}$$

Так как $|\varphi_\eta(t)| = \left|\frac{\psi(\lambda+it/b)}{\psi(\lambda)}\right|$, то по условию (ii) теоремы функция $\varphi_\eta(t)$ интегрируема и, значит, существует плотность f_η случайной величины η, а стало быть, и плотности f_{ξ_λ} и f величин ξ_λ и ξ соответственно.

Так как при $\lambda = \lambda(x)$ выполняется $a(\lambda(x)) = x$, то

$$f_{\xi_\lambda}(x) = b^{-1} f_\eta(0) \tag{12}$$

и в силу (8) нам остается найти асимптотику $f_\eta(0)$ при $\lambda \to \infty$.

По теореме о среднем в (11) имеем

$$\mathrm{Re}\left[m\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - m(\lambda)\right] = -\frac{t^2}{2b^2}\,\mathrm{Re}\, m''\left(\lambda + i\theta_1 \frac{t}{b}\right),$$

$$\mathrm{Im}\left[m\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - m(\lambda)\right] = \frac{ta}{b} - \frac{t^2}{2b^2}\,\mathrm{Im}\, m''\left(\lambda + i\theta_2 \frac{t}{b}\right), \quad \theta_i \in [0,1],\ i = 1,2.$$

Отсюда и из условия (4) следует, что при $\lambda \to \infty$ (напомним, что $m''(\lambda) = b^2$)

$$\varphi_\eta(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{2}(1 + o(1))\right\}$$

и, стало быть, распределение η слабо сходится при $\lambda \to \infty$ к нормальному закону. Наряду с этим имеет место и сходимость плотностей. Действительно, в силу условия (ii) справедлива формула обращения и законен предельный переход:

$$\lim_{\lambda\to\infty} f_\eta(0) = \frac{1}{2\pi}\int \lim_{\lambda\to\infty} \varphi_\eta(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Возвращаясь к (8), (12) и полагая $\lambda = \lambda(x)$, получим (5), если справедливо (6).

Докажем равенство (6). Дифференцируя по x тождества

$$\Lambda(x) = x\lambda(x) - m(\lambda(x)), \quad m'(\lambda(x)) = x,$$

получим

$$\Lambda'(x) = \lambda(x), \quad m''(\lambda(x))\lambda'(x) = 1, \quad m''(\lambda(x)) = \frac{1}{\Lambda''(x)}. \tag{13}$$

Это доказывает (6). Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Если в приведенных выше рассмотрениях воспользоваться более точным приближением для $m\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - m(\lambda)$ в виде разложения этой функции в ряд, то можно получить асимптотические разложения для $\ln \varphi_\eta(t)$ и, стало быть, асимптотические разложения для $f(x)$.

3. Тауберовы теоремы об асимптотике плотности в окрестности нуля для распределений, сосредоточенных на отрицательной полуоси. В условиях этого пункта функция

$$\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \ge 0,$$

сходится к нулю при $\lambda \to \infty$. Мы сохраним здесь обозначения (3), но под x будем понимать теперь малые (по модулю) отрицательные значения. Так как $a(\lambda) = m'(\lambda) \uparrow 0$ при $\lambda \uparrow \infty$, то $\lambda(x) = a^{(-1)}(x)$ будет обладать свойством $\lambda(x) \uparrow \infty$ при $x \uparrow 0$, при этом $\Lambda(x) = \sup(\lambda x - m(\lambda)) \uparrow \infty$ при $x \uparrow 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при* $x \uparrow 0$ *справедливы соотношения* (5), (6).

Здесь сохраняют свою силу все замечания, сделанные к теореме 1.

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично доказательству теоремы 1. Пусть снова ξ_λ — случайная величина с распределением

$$\mathbf{F}_{\xi_\lambda}(dx) = \frac{e^{\lambda x}\mathbf{F}(dx)}{\psi(\lambda)},$$

так что

$$\mathbf{F}(dx) = e^{-(\lambda x - m(\lambda))}\mathbf{F}_{\xi_\lambda}(dx), \quad \mathbf{E}e^{\mu\xi_\lambda} = \frac{\psi(\lambda+\mu)}{\psi(\lambda)},$$

$$\mathbf{E}\xi_\lambda = a = m'(\lambda) \uparrow 0, \quad \mathbf{D}\xi_\lambda = b^2 = m''(\lambda) \downarrow 0$$

при $\lambda \to \infty$. Рассмотрим нормированную величину

$$\eta = \frac{\xi_\lambda - a}{b},$$

которая в силу (ii) имеет плотность f_η, так что при $\lambda = \lambda(x)$

$$f_{\xi_\lambda}(x) = b^{-1}f_\eta(0), \quad \varphi_\eta(t) := \mathbf{E}e^{it\eta} = \exp\left\{-\frac{iat}{b} + m\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - m(\lambda)\right\}.$$

Дальнейшие рассуждения полностью повторяют доказательство теоремы 1. Теорема доказана. □

4. Абелевы теоремы. Дуальные абелевы теоремы к теоремам 1, 2 имеют аналогичный вид. Пусть, как и прежде,

$$\psi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\xi}.$$

Теорема 3. *Пусть распределение* $\mathbf{F}$ *случайной величины* ξ *при всех достаточно больших* x *имеет плотность* $\frac{\mathbf{F}(dx)}{dx} = f(x)$, *представимую в виде*

$$f(x) = e^{-l(x)}, \tag{14}$$

где $l(x)$ *дважды дифференцируема, а* $l''(x)$ *обладает свойствами:*

(i) $l(x) \gg x$, $l''(x) \gg x^{-2}$,

(ii) $l''(x(1+o(1))) \sim l''(x)$ *при* $x \to \infty$.

Тогда при $\lambda \to \infty$

$$\psi(\lambda) \sim \sqrt{2\pi Q''(\lambda)}e^{Q(\lambda)}, \tag{15}$$

где $Q(\lambda) := \sup_x(\lambda x - l(x)) = \lambda x(\lambda) - l(x(\lambda)) \gg \lambda$ *при* $\lambda \to \infty$, $x(\lambda)$ — *функция, обратная к* $l'(x)$,

$$Q''(\lambda) = \frac{1}{l''(x(\lambda))}. \tag{16}$$

Первое условие (i) означает, что функция $\psi(x)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Условие (ii) аналогично условию (i) теоремы 1.

Отметим, что если $l'' \in \mathscr{R}_{\alpha-2}$, $\alpha > 1$, то условия теоремы будут очевидным образом выполнены. Отметим также, что существование $l''(x)$ в теореме 3 является ограничительным условием (но не излишним, так как l'' присутствует в правой части (15)), в то время как в теоремах 1, 2 существование $m''(\lambda)$ таковым не является, так как $m(\lambda)$ является аналитической функцией при $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказательство. Пусть $x_0 > 0$ таково, что распределение ξ при $x \geq x_0$ имеет плотность $\frac{\mathbf{F}(dx)}{dx} = f(x)$ и $l''(x) > 0$. Тогда

$$\psi(\lambda) = \mathbf{E}(e^{\lambda\xi}\xi \leq x_0) + \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{\lambda x - l(x)}\, dx. \tag{17}$$

Рассмотрим функцию $A(x) = \lambda x - l(x)$. Уравнение для $x(\lambda) = \operatorname{argmax} A(x)$ имеет вид $\lambda - l'(x) = 0$. Так как $l''(x) > 0$ при $x \geq x_0$, то $l'(x)$ монотонно возрастает и, стало быть, при всех достаточно больших λ существует единственное решение этого уравнения $x(\lambda)$, являющееся функцией, обратной к $l'(x)$; при этом очевидно, что $x(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому при любом фиксированном $x_1 > x_0$ выполняется $Q(\lambda) \geq \lambda x_1 - l(x_1)$. Это значит, что $Q(\lambda) \gg \lambda$ при $\lambda \to \infty$.

При заданном малом $\varepsilon > 0$ интеграл в (17) разобьем на три части:

$$I_1 = \int\limits_{x_0}^{x(\lambda)(1-\varepsilon)}, \quad I_2 = \int\limits_{x(\lambda)(1-\varepsilon)}^{x(\lambda)(1+\varepsilon)}, \quad I_3 = \int\limits_{x(\lambda)(1+\varepsilon)}^{\infty}.$$

Так как $A'(x(\lambda)) = 0$, $A''(x) = -l''(x)$, то функция $A(x)$ на интервале $(x(\lambda)(1-\varepsilon), x(\lambda)(1+\varepsilon))$ в силу (ii) ведет себя при $\varepsilon \to 0$ почти как парабола:

$$A(x) = Q(\lambda) - l''(x(\lambda))\frac{(x - x(\lambda))^2}{2}(1 + o(1)).$$

Отсюда и из второго условия (i) немедленно вытекает, что

$$I_2 \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{l''(x(\lambda))}} e^{Q(\lambda)}.$$

Далее, при $x \in (x_0, x(\lambda)(1-\varepsilon))$ производная $A'(x) = \lambda - l'(x)$ монотонно убывает до значения $\lambda - l'(x(\lambda)(1-\varepsilon)) \gg \varepsilon$ (см. условие (i)). Поэтому можно считать, что на рассматриваемом интервале $A'(x) > 1$,

$$A(x) = A(x(\lambda)(1-\varepsilon)) + A(x) - A(x(\lambda)(1-\varepsilon)) < A(x(\lambda)(1-\varepsilon)) - (x(\lambda)(1-\varepsilon) - x).$$

Это означает, что

$$I_1 \leq e^{A(x(\lambda)(1-\varepsilon))} \ll e^{Q(\lambda)}.$$

Интеграл I_3 оценивается совершенно аналогично ($A'(x) < -1$ при $x > x(\lambda)(1-\varepsilon)$).

Так как $\mathbf{E}(e^{\lambda\xi}; \xi < x_0) < e^{\lambda x_0} \ll c^{Q(\lambda)}$, в силу (17) соотношение (15) доказано, если справедливо (16).

Соотношение (16) доказывается аналогично (6). Дифференцируя по λ тождества

$$Q(\lambda) = \lambda x(\lambda) - l(x(\lambda)), \quad l'(x(\lambda)) = \lambda,$$

получим

$$Q'(\lambda) = x(\lambda), \quad l''(x(\lambda))x'(\lambda) = 1, \quad l''(x(\lambda)) = \frac{1}{Q''(\lambda)}.$$

Теорема доказана. $\square$

Нетрудно видеть, что условие (ii) можно ослабить до условия

$$l''\bigl(x + c\sqrt{x}\bigr) \sim l''(x)$$

при $x \to \infty$ и любом фиксированном c.

Аналогично формулируется и доказывается теорема, дуальная к теореме 2 — об асимптотике $\psi(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ для распределений, сосредоточенных на $(-\infty, 0)$.

Теорема 4. *Предположим, что при всех достаточно малых* $|x|$ *распределение* $\mathbf{F}$ *имеет плотность* $\frac{\mathbf{F}(dx)}{dx} = f(x)$, *представимую в виде* (14). *Пусть, кроме того,* $l''(x) \gg x^{-2}$ *при* $x \uparrow 0$ *и выполнено условие* (ii) *теоремы* 3 (*также при* $x \uparrow 0$). *Тогда при* $\lambda \to \infty$ *справедливы соотношения* (15), (16), *где* $Q(\lambda) := \sup\limits_x(\lambda x - l(x)) = \lambda x(\lambda) - l(x(\lambda))$, $x(\lambda)$ — *функция, обратная к* $l'(x)$.

Условие $l''(x) \gg x^{-2}$ при $x \uparrow 0$ означает, очевидно, что $l(x) \gg -\ln|x|$. Нетрудно убедиться также, что при выполнении условий теоремы $Q(\lambda) \ll -\ln\lambda$ при $\lambda \to \infty$.

Доказательство теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1, и мы его опускаем.

5. Асимптотика плотностей крайних устойчивых распределений в области быстрого убывания. Пусть $\xi^{(\alpha,-1)}$ — случайная величина, имеющая «крайнее» устойчивое распределение, т. е. распределение с параметрами $(\alpha,-1)$, и $f^{(\alpha,-1)}(x)$ — ее плотность. Другие крайние устойчивые распределения, т. е. распределения с параметрами $(\alpha, 1)$, рассматривать нет необходимости, так как они симметричны к распределениям с параметрами $(\alpha,-1)$.

С помощью хорошо известных явных представлений для характеристических функций устойчивых распределений нетрудно получить следующие представления (с точностью до параметра масштаба) для преобразования Лапласа $\psi^{(\alpha)}(\mu) = \mathbf{E}e^{\mu\xi^{(\alpha,-1)}}$ крайних устойчивых распределений (см. также, например, [5, лемма 2.2.1]): при $\operatorname{Re}\mu \ge 0$

$$\ln\psi^{(\alpha)}(\mu) = \begin{cases} -\mu^\alpha & \text{при } \alpha \in (0,1), \\ \mu\ln\mu & \text{при } \alpha = 1, \\ \mu^\alpha & \text{при } \alpha \in (1,2]. \end{cases}$$

Для плотностей $f^{(\alpha,-1)}(x)$, соответствующих этим преобразованиям Лапласа, справедливо следующее утверждение. Чтобы иметь дело лишь с положительными аргументами x, в случае одностороннего закона при $\alpha \in (0,1)$ будем рассматривать симметричную к $f^{(\alpha,-1)}(x)$ плотность $f^{(\alpha,1)}(x)$.

Теорема 5. (i) *Если* $\alpha \in (0,1)$, $x \to 0$, *то справедливо представление*

$$f^{(\alpha,1)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Lambda''(x)}} e^{-\Lambda(x)}(1 + o(1)), \tag{18}$$

где

$$\Lambda(x) = (1-\alpha)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

(ii) *Если* $\alpha \in (1,2]$, $x \to \infty$, *то плотность* $f^{(\alpha,-1)}(x)$ *равна правой части в* (18), *где*

$$\Lambda(x) = (\alpha-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

(iii) *Если* $\alpha = 1$, $x \to \infty$, *то плотность* $f^{(1,-1)}(x)$ *равна правой части в* (18), *где*

$$\Lambda(x) = e^{x-1}.$$

Доказательство. (ii) Случаи $\alpha \in (0,1)$ и $\alpha \in (1,2)$ рассматриваются совершенно аналогично с использованием соответственно теорем 2 и 1. Поэтому мы ограничимся доказательством лишь п. (ii) теоремы (т. е. случая $\alpha \in (1,2)$; случай $\alpha = 2$ никаких пояснений не требует).

Положим для краткости $\xi^{(\alpha,-1)} = \xi$, $\psi^{(\alpha)}(\lambda) = \psi(\lambda)$ и проверим выполнение условий теоремы 1. В нашем случае в обозначениях теоремы 1 выполняется

$$m(\lambda) = \lambda^\alpha, \quad m''(\lambda) = \alpha(\alpha-1)\lambda^{\alpha-2}.$$

Функция m'' является правильно меняющейся и, как уже отмечалось выше, для нее $b^2(\lambda) = m''(\lambda) \gg \lambda^{-2}$ при $\lambda \to \infty$ и справедливы соотношения $t/b = o(\lambda)$,

$$m''\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) = m''((1+o(1))\lambda) = m''(\lambda)(1+o(1)),$$

которые влекут за собой выполнение условия (4) теоремы 1 (запись $z = o(1)$ для комплекснозначного числа означает, что $|z| \to 0$ при $\lambda \to \infty$).

Остается проверить условие (ii) теоремы 1, т. е. равномерную при всех достаточно больших λ интегрируемость по t отношения

$$R(t) := \frac{|\psi(\lambda + it/b)|}{\psi(\lambda)}. \tag{19}$$

Имеем

$$\ln R(t) = \operatorname{Re}\left[\ln\psi\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - \ln\psi(\lambda)\right] = \operatorname{Re}\lambda^\alpha\left[(1+\frac{it}{M})^\alpha - 1\right], \tag{20}$$

где $M = \lambda b = \sqrt{\alpha(\alpha-1)}\lambda^{\alpha/2}$.

1. Пусть сначала $t = o(M)$. Тогда

$$\operatorname{Re}\left[\left(1+\frac{it}{M}\right)^\alpha - 1\right] = -\frac{t^2}{2M^2} + O\left(\frac{t^4}{M^4}\right), \ \ln R(t) = -\frac{t^2}{2\alpha(\alpha-1)}\left[1 + O\left(\frac{t^2}{M^2}\right)\right].$$

Это означает, что при $|t| \le c_1 M$ и достаточно малом c_1 выполняется

$$\ln R(t) \le -ht^2, \quad \text{где } h = \frac{1}{3\alpha(\alpha-1)}. \tag{21}$$

2. Пусть теперь $|t|$ велико по сравнению с M. Тогда в силу равенства $i = e^{i\pi/2}$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left[\left(1+\frac{it}{M}\right)^\alpha - 1\right] &\le \left(\frac{|t|}{M}\right)^\alpha \operatorname{Re} e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}\left(1+\frac{M}{it}\right)^\alpha \\ &= \left(\frac{|t|}{M}\right)^\alpha \cos\frac{\alpha\pi}{2}\left(1 + O\left(\frac{M^2}{t^2}\right)\right),\end{aligned}$$

где $\cos\frac{\alpha\pi}{2} < 0$ при $\alpha \in (1,2)$. Так как

$$\lambda^\alpha M^{-\alpha} = (\alpha(\alpha-1))^{-\alpha/2}\lambda^{\alpha(1-\alpha/2)} \to \infty,$$

при $\lambda \to \infty$, полагая

$$q := -\alpha(\alpha-1)^{-\alpha/2}\cos\frac{\alpha\pi}{2} > 0,$$

получим

$$\ln R(t) \le -\frac{q}{2}|t|^\alpha \lambda^{\alpha(1-\alpha/2)} < -|t|^\alpha \tag{22}$$

при всех t, $|t| \ge c_2 M$, и достаточно больших λ и c_2.

3. Рассмотрим, наконец, промежуточный случай $\frac{|t|}{M} \in [c_1, c_2]$. Положим $t = vM$ и запишем число $1 + \frac{it}{M} = 1 + iv$ в виде

$$1 + iv = re^{i\beta},$$

где $r = \sqrt{1+v^2}$, $\cos\beta = \frac{1}{r}$, так что $\operatorname{Re}(1+iv)^\alpha = r^\alpha \cos\alpha\beta$. Покажем, что

$$(\operatorname{Re}(1+iv)^\alpha)'_v \le 0. \tag{23}$$

Действительно, так как $r' = \frac{v}{r}$, $\beta' = \frac{v}{r^3 \sin\beta}$, то

$$\begin{aligned}(\operatorname{Re}(1+iv)^\alpha)'_v = (r^\alpha \cos\alpha\beta)'_v &= \alpha v r^{\alpha-2}\cos\alpha\beta - \alpha v r^{\alpha-3}\frac{\sin\alpha\beta}{\sin\beta} \\ &= \alpha v r^{\alpha-2}\cos\beta\left[\frac{\cos\alpha\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\beta}{\sin\beta}\right].\end{aligned} \tag{24}$$

Пусть сначала $|\beta| \le \beta_1 := \frac{\pi}{2\alpha}$ или, что то же, $|v| \le v_1$, где v_1 — решение уравнения $1/r = \cos\beta_1$. Так как $\sin x$ и $\cos x$ суть непрерывные строго монотонные функции на $[0, \pi/2]$ и $\alpha\beta > \beta$, $\alpha\beta \le \pi/2$, то

$$\sup_{\beta\in[0,\beta_1]} \frac{\cos\alpha\beta}{\cos\beta} \le 1, \quad \inf_{\beta\in[0,\beta_1]} \frac{\sin\alpha\beta}{\sin\beta} > 1.$$

Отсюда и из (24) следует (23) для $v \le v_1$. Если $v > v_1$, то $\beta > \beta_1$ и оба слагаемых в квадратных скобках в (24) отрицательны. Это доказывает (23). Стало быть, четная функция $\operatorname{Re}(1+iv)^\alpha$ есть убывающая функция $|v|$ (или $|t|$). Это означает в силу (21), что в области $|t| \in [c_1 M, c_2 M]$

$$\ln R(t) \le -h(c_1 M)^2 = -h\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 (c_2 M)^2 \le -h\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 |t|^2.$$

Таким образом, функция $R(t)$ при всех достаточно больших λ мажорируется интегрируемой функцией

$$\exp\{-\min(|t|^\alpha, c|t|^2)\},$$

где постоянная c от λ не зависит.

Нам осталось вычислить функцию $\Lambda(x)$. Уравнение для $\lambda(x)$ имеет вид $\alpha\lambda^{\alpha-1} = x$. Стало быть,

$$\lambda(x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1/\alpha-1}, \quad \Lambda(x) = x\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{1/\alpha-1} - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = (\alpha-1)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

(iii) Докажем теперь последнее утверждение теоремы для случая $\alpha = 1$. Этот раздел доказательства аналогичен предыдущему. Положим для простоты $\xi^{(1,-1)} = \xi$, $\psi^{(1)}(\lambda) = \psi(\lambda)$ и проверим выполнение условий теоремы 1. В нашем случае в обозначениях теоремы 1 имеем

$$m(\lambda) = \lambda\ln\lambda, \quad m''(\lambda) = 1/\lambda.$$

Функция $m''(\lambda)$, как и прежде, является правильно меняющейся, для нее $b^2 = b^2(\lambda) = \lambda^{-1}$ и справедливы соотношения $t/b = o(\lambda)$,

$$m''\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) = m''((1+o(1))\lambda) = m''(\lambda)(1+o(1)),$$

которые влекут за собой выполнение условия (4) теоремы 1.

Осталось проверить условие (ii), т. е. равномерную при всех достаточно больших λ интегрируемость по t отношения $R(t)$ (см. (19)). В нашем случае имеем

$$\begin{aligned}\ln R(t) &= \operatorname{Re}\left[\left(\lambda + \frac{it}{b}\right)\ln\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - \lambda\ln\lambda\right] \\ &= \operatorname{Re}\left[(\lambda + it\sqrt{\lambda})\ln\lambda + (\lambda + it\sqrt{\lambda})\ln\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) - \lambda\ln\lambda\right] \\ &= \operatorname{Re}(\lambda + it\sqrt{\lambda})\ln\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right). \qquad (25)\end{aligned}$$

1. Пусть сначала $v = t/\sqrt{\lambda}$ мало. Тогда

$$\ln\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) = \frac{it}{\sqrt{\lambda}} + \frac{t^2}{2\lambda} + O(v^3), \quad \ln R(t) = \frac{t^2}{2} - t^2 + O(t^2 v) = -\frac{t^2}{2}(1 + O(v)),$$

так что $\ln R(t) < -\frac{t^2}{3}$ при всех $|v| \leq c_1$ и достаточно малом c_1. Это доказывает существование требуемой мажоранты в области $|t| \leq c_1\sqrt{\lambda}$.

2. Пусть теперь $|v|$ велико. Тогда при $\theta = \operatorname{sign} t$ имеем

$$\begin{aligned}\ln\left(1 + \frac{it}{\sqrt{\lambda}}\right) &= \ln(1 + i\theta|v|) = \ln i\theta + \ln|v| + \ln\left(1 - \frac{i}{v}\right) \\ &= \frac{i\pi\theta}{2} + \ln|v| - \frac{i}{v} + \frac{1}{2v^2} + O(|v|^{-3}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln R(t) &= \operatorname{Re}(1 + iv)\lambda\left[\frac{i\pi\theta}{2} + \ln|v| - \frac{i}{v} + \frac{1}{2v^2} + O(|v|^{-3})\right] \\ &= \lambda\left[\ln|v| - \frac{|v|\pi}{2} + 1 + O(v^{-2})\right],\end{aligned}$$

где при всех достаточно больших $|v|$ и $\lambda \geq 1$ содержимое квадратных скобок не превосходит $-\frac{|t|}{\sqrt{\lambda}}$, так что

$$\ln R(t) \leq -|t|\sqrt{\lambda} \leq -|t|.$$

Это доказывает существование требуемой интегрируемой мажоранты при $|t| \geq c_2\sqrt{\lambda}$ и достаточно большом c_2.

3. Нам осталось доказать существование интегрируемой мажоранты при $|v| \in [c_1, c_2]$. В силу (25) имеем

$$(\ln R(t))'_v = (\operatorname{Re}(1 + iv)\lambda\ln(1 + iv))'_v = \operatorname{Re} i\lambda\ln(1 + iv), \quad (\ln R(t))''_v = -\operatorname{Re}\frac{\lambda}{1 + iv}.$$

Так как $\frac{1}{1+iv} = \frac{1-iv}{1+v^2}$, то $(\ln R(t))''_v = -\frac{\lambda}{1+v^2} < 0$. Поскольку $(\ln R(t))'_{v=0} = 0$, $\ln R(0) = 0$, то $\ln R(t)$ есть четная выпуклая вверх функция и, стало быть, является убывающей функцией от $|t|$. Остальные рассуждения повторяют рассуждения п. 3 доказательства п. (ii).

Вычислим функцию $\Lambda(x)$. Уравнение для $\lambda(x)$ имеет вид $\ln\lambda + 1 = x$, так что $\lambda(x) = e^{x-1}$, $\Lambda(x) = e^{x-1}$. Теорема доказана. $\square$

Как отмечалось в замечании 1, если в (11) воспользоваться разложениями в ряд функции $m\left(\lambda + \frac{it}{b}\right) - m(\lambda)$ в точке $t = 0$, то получим асимптотическое разложение для $f_\eta(0)$. Вместе со сказанным выше это дает возможность получить также асимптотические разложения для $f^{(\alpha,1)}(x)$.

Автор признателен В. И. Лотову, обнаружившему, что работе [5], на которую ссылался автор, предшествовали работы [1–4] с близкими результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Линник Ю. И.* Об устойчивых вероятностных законах с показателем, меньшим единицы // Докл. АН СССР. 1954. Т. 94, № 4. С. 619–621.
2. *Скороход А. В.* Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98, № 5. С. 731–734.
3. *Bergström H.* On some expansions of stable distribution functions // Ark. Mat. 1952. Bd 2, N 4. S. 375–378.
4. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. И.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
5. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983.
6. *Bingham N. H., Goldie C. N., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
8. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т. 1. Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2007.
9. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О больших и сверхбольших уклонениях сумм независимых случайных векторов при выполнении условия Крамера. II // Теория вероятностей и ее применения. 2006. Т. 51, № 4. С. 641–673.

Статья поступила 26 октября 2007 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru