Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 519.48

БИНАРНО ЛИЕВЫ АЛГЕБРЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ 3–МУ УСЛОВИЮ ЭНГЕЛЯ

В. Т. Филиппов

Аннотация. Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, содержащее $\frac{1}{2}$. Доказана локальная нильпотентность бинарно лиевых Φ-алгебр, удовлетворяющих 3-му условию Энгеля. Кроме того, доказано, что этот класс не содержит полупервичных алгебр.

Ключевые слова: бинарно лиева алгебра, энгелева алгебра, локально нильпотентная алгебра, полупервичная алгебра.

Автором [1–3] на алгебры Мальцева перенесена теорема Кострикина [4] о локальной нильпотентности алгебр Ли характеристики $p \geq 1$, удовлетворяющих n-му условию Энгеля. Возникает естественный вопрос о справедливости этой теоремы для более широкого класса бинарно лиевых алгебр.

Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, содержащее $\frac{1}{2}$. В настоящей заметке доказана локальная нильпотентность бинарно лиевых Φ-алгебр, удовлетворяющих 3-му условию Энгеля. Кроме того, доказано, что этот класс алгебр не содержит полупервичных алгебр.

Для удобства будем опускать скобки в произведениях вида

$$w = (\dots(x_1x_2)\dots)x_n.$$

Бинарно лиевой алгеброй называется алгебра, в которой два любых элемента порождают лиеву подалгебру [5]. Если $\frac{1}{2} \in \Phi$, то бинарно лиева Φ-алгебра определяется тождествами

$$x^2 = 0, \quad J(xy, y, x) = 0, \tag{1}$$

где $J(x, y, z) = xyz + zxy + yzx$ — якобиан элементов x, y и z [6].

В дальнейшем через A будем обозначать бинарно лиеву Φ-алгебру ($\frac{1}{2} \in \Phi$), удовлетворяющую 3-му условию Энгеля:

$$yx^3 = 0. \tag{2}$$

Предварительно докажем некоторые тождества, выполняющиеся в алгебре A.

Тождество (1) можно записать в виде

$$yx^2y + xy^2x = 0. \tag{3}$$

Из (2) следует тождество $yx^2y - xy^2x = yx^2y + yxyx = y\frac{\partial}{\partial x}yx^3 = 0$, где $y\frac{\partial}{\partial x}$ — оператор дифференциальной подстановки $x \to y$. Отсюда и из (3) получим тождество

$$yx^2y = 0. \tag{4}$$

Линеаризуем тождество (4) по y:
$$tx^2y + yx^2t = 0. \tag{5}$$
Дважды применив (5), получим тождество
$$yx^2t^2v = -vt^2(yx^2) = yx^2(vt^2) = -vt^2x^2y. \tag{6}$$
В силу (2)
$$ytx^2 + yxtx + yx^2t = t\frac{\partial}{\partial x}yx^3 = 0. \tag{7}$$
Используя последовательно (5), (7) и (4), выводим тождество
$$yx^2t^2y = -tx^2yty = tx^2ty^2 + tx^2y^2t = tx^2y^2t.$$
Отсюда и из (6)
$$yx^2t^2y = tx^2y^2t = -ty^2x^2t = -xy^2t^2x = xt^2y^2x = yt^2x^2y = -yx^2t^2y.$$
Следовательно, $yx^2t^2y = 0$. Линеаризуем последнее тождество по y и применим (6): $yx^2t^2v = -vx^2t^2y = yt^2x^2v$. Имеем
$$(yx^2t^2 - yt^2x^2)v = 0. \tag{8}$$
Ввиду (8)
$$(yx^3t + yx^2tx - yxtx^2 - ytx^3)v = x\frac{\partial}{\partial t}(yx^2t^2 - yt^2x^2)v = 0.$$
Отсюда и из (2) вытекает тождество
$$(yx^2tx - yxtx^2)v = 0. \tag{9}$$
С другой стороны, умножив (7) на x и применив (2), получим тождество $yx^2tx + yxtx^2 = 0$. Из последнего равенства и (9) следуют тождества
$$yx^2txv = 0, \tag{10}$$
$$yxtx^2v = 0. \tag{11}$$
В силу (2) в A выполняются тождества
$$zxy^2x = x\frac{\partial}{\partial y}zy^3x - zyxyx - zy^2x^2 = -zyxyx - zy^2x^2,$$
$$zyx^2y = y\frac{\partial}{\partial x}zyx^3 - zyxyx - zy^2x^2 = -zyxyx - zy^2x^2.$$
Из этих тождеств вытекает тождество
$$zxy^2x = zyx^2y. \tag{12}$$
Из (8) и (2) следует тождество $tyx^2y^2v = ty^3x^2v = 0$. Линеаризацией его по y получим тождество
$$tzx^2y^2v + tyx^2zyv + tyx^2yzv = 0. \tag{13}$$
С учетом (7) $t(zx^2)y^2 + ty(zx^2)y + ty^2(zx^2) = 0$. Следовательно, $-zx^2ty^2 - zx^2(ty)y - zx^2(ty^2) = 0$. Отсюда и из (5) следует тождество $tx^2zy^2 + tyx^2zy + ty^2x^2z = 0$, откуда $tyx^2zyv = -tx^2zy^2v - ty^2x^2zv$. Подставим последнее тождество в (13): $tzx^2y^2v - tx^2zy^2v - ty^2x^2zv + tyx^2yzv = 0$. Альтернируем это тождество относительно x и y:
$$(tzx^2y^2 - tzy^2x^2)v - (tx^2zy^2 - ty^2zx^2)v - (ty^2x^2 - tx^2y^2)zv + (tyx^2y - txy^2x)zv = 0.$$
В силу (8) и (12) первое, третье и четвертое слагаемые равны нулю. Поэтому $(tx^2zy^2 - ty^2zx^2)v = 0$ и, следовательно,
$$tx^2zy^2v = ty^2zx^2v. \tag{14}$$

Пусть R_x — оператор правого умножения на x, $R(A)$ — алгебра правых умножений алгебры A. Если $X = R_{x_1} \dots R_{x_n}$ — произвольное R-слово, то *R-длиной слова* X будем называть число n.

Лемма 1. *Для любых $x, y, t, v \in A$ и для любого $Z \in R(A)$ выполняется соотношение*

$$tx^2Zy^2v = ty^2Zx^2v. \tag{15}$$

Доказательство. Очевидно, что (15) достаточно доказать для любого R-слова $Z = R_{z_1}\dots R_{z_n}$. Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 0$ и $n = 1$ соотношение (15) следует из (8) и (14). Пусть (15) выполняется для всех $n < k$, $k > 1$. В частности, имеет место тождество

$$tz_2^2z_3\dots z_ky^2v = ty^2z_3\dots z_kz_2^2v.$$

Сделав дифференциальную подстановку $z_2 \to z_1x^2$ в последнее тождество, получим тождество

$$t(z_1x^2)z_2z_3\dots z_ky^2v = -tz_2(z_1x^2)z_3\dots z_ky^2v + ty^2z_3\dots z_k(z_1x^2)z_2v + ty^2z_3\dots z_kz_2(z_1x^2)v.$$

Отсюда и из (5)

$$\begin{aligned} t(z_1x^2)z_2z_3\dots z_ky^2v &= z_1x^2(tz_2)z_3\dots z_ky^2v - z_1x^2(ty^2z_3\dots z_k)z_2v - z_1x^2(ty^2z_3\dots z_kz_2)v \\ &= z_1x^2(tz_2)z_3\dots z_ky^2v + ty^2z_3\dots z_kx^2z_1z_2v + ty^2z_3\dots z_kz_2x^2z_1v. \end{aligned}$$

Альтернируем последнее тождество относительно x и y:

$$\begin{aligned} t(z_1x^2)z_2z_3\dots z_ky^2v - t(z_1y^2)z_2z_3\dots z_kx^2v &= [z_1x^2(tz_2)z_3\dots z_ky^2v - z_1y^2(tz_2)z_3\dots z_kx^2v] \\ &+ [ty^2z_3\dots z_kx^2z_1z_2v - tx^2z_3\dots z_ky^2z_1z_2v] \\ &+ [ty^2z_3\dots z_kz_2x^2z_1v - tx^2z_3\dots z_kz_2y^2z_1v]. \end{aligned}$$

По индуктивному предположению правая часть последнего тождества равна нулю. Следовательно,

$$z_1x^2tz_2z_3\dots z_ky^2v - z_1y^2tz_2z_3\dots z_kx^2v = 0.$$

Таким образом, (15) выполняется для $n = k$ и, значит, для любого n.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых $x, y, v \in A$ и любого $X \in R(A)$ выполняются соотношения*

$$yxXx^2v = 0, \tag{16}$$

$$yx^2Xxv = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Можно предположить, что X является R-словом: $X = R_{x_1}\dots R_{x_n}$. Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 0$ и $n = 1$ соотношения (16) и (17) следуют из (2), (10) и (11). Пусть (16) и (17) выполняются для любого $n < k$, $k > 1$. Положим $n = k - 1$ и линеаризуем (16) по x:

$$ytXx^2v + yxXtxv + yxXxtv = 0.$$

Подставим в последнее соотношение yx вместо y и применим индуктивное предположение:

$$yxtXx^2v + yx^2Xtxv = 0. \tag{18}$$

Линеаризацией (15) по y и последующей заменой переменных получим соотношение $yx^2Xtxv + yx^2Xxtv = ytxXx^2v + yxtXx^2v$. Отсюда по индуктивному предположению $yx^2Xtxv = yxtXx^2v$. Из (18) и последнего соотношения вытекает справедливость (16) и (17) для $n = k$ и, следовательно, для любого n.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любых $x, y, v \in A$ и любых $X, Y \in R(A)$ выполняется соотношение*
$$yxXxYxv = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Соотношение (19) достаточно доказать для произвольного R-слова $Y = R_{y_1} \dots R_{y_n}$. Доказательство проведем индукцией по n. Для $n = 0$ соотношение (19) следует из (16). В силу (7) и (16)
$$yxXxtxv = -yxXtx^2v - yxXx^2tv = 0.$$
Поэтому (19) выполняется для $n = 1$. Пусть соотношение (19) выполняется для любого $n < k$, $k > 1$. Линеаризацией (19) по x при $n = k - 1$ получим соотношение $ytXxYxv + yxXtYxv + yxXxYtv = 0$. Положим $v = x$, а затем умножим полученное равенство на v: $ytXxYx^2v + yxXtYx^2v + yxXxYtxv = 0$. По лемме 2 первое и второе слагаемые равны нулю. Следовательно, $yxXxYtxv = 0$. Поэтому (19) справедливо для $n = k$ и, следовательно, для любого n.

Лемма доказана.

Пусть B — антикоммутативная Φ-алгебра ($\frac{1}{2} \in \Phi$). Через I обозначим Φ-подмодуль Φ-модуля алгебры B, порожденный всеми элементами вида yx^2, yx^2t, где $x, y, t \in B$.

Лемма 4. *Имеет место включение $B^4 \subseteq I$. В частности, I является идеалом алгебры B.*

Доказательство. Докажем, что $B^4 \subseteq I$. Для любых $x, y \in B$ будем писать $x \equiv y$, если $x - y \in I$. По определению $yx^2 \equiv 0$, $yx^2t \equiv 0$. Отсюда линеаризацией по x получим сравнения
$$yxz \equiv -yzx, \quad yxzt \equiv -yzxt. \tag{20}$$
В силу (20) $yz(tz) = -zy(tz) \equiv z(tz)y = -tz^2y \equiv 0$. Линеаризуем последнее сравнение по z: $yv(tz) \equiv -yz(tv)$. Тогда $yz(tv) \equiv -yv(tz) = -vy(zt) \equiv vt(zy) = -yz(tv)$. Следовательно, $2yz(tv) \equiv 0$, $yz(tv) \equiv 0$. Из (20) и последнего сравнения имеем сравнение $yztv = -t(yz)v \equiv tv(yz) \equiv 0$. Значит, $B^4 \subseteq I$. Поскольку $yx^2tv \in B^4 \subseteq I$ для любого $v \in B$, то I — идеал алгебры A.

Лемма доказана.

Из леммы 4 непосредственно вытекает

Следствие. *Если B — антикоммутативная* Φ-алгебра ($\frac{1}{2} \in \Phi$), *удовлетворяющая 2-му условию Энгеля, то $B^4 = 0$.*

Зафиксируем множество образующих алгебры A и обычным образом определим длину $d(x)$ произвольного слова $x \in A$.

Лемма 5. *Пусть $W = R_tR_v$, где t и v — произвольные элементы из A. Тогда*
$$W = \sum_i \alpha_i R_{x_{i1}} \dots R_{x_{ik(i)}} R_v, \tag{21}$$
где x_{ij} — слова длины $d(x_{ij}) \le 3$, $j = 1, \dots, k(i)$, $\alpha_i \in \Phi$.

Доказательство. Предварительно докажем некоторые соотношения в $R(A)$. Тождеству (5) эквивалентно соотношение
$$R_{yx^2} = R_x^2 R_y. \tag{22}$$

Линеаризацией (8) и последующей заменой переменных получим тождество $yx^2twv + yx^2wtv - ytwx^2v - ywtx^2v = 0$. Отсюда $w(yx^2t)v = -w(yx^2)tv + w(yt)x^2v + wytx^2v$. Следовательно, в $R(A)$ выполняется соотношение

$$R_{yx^2t}R_v = -R_{yx^2}R_tR_v + R_{yt}R_x^2R_v + R_yR_tR_x^2R_v. \tag{23}$$

Равенство (21) достаточно доказать для произвольного слова. Пусть $d(t) = n$. Доказательство (21) проведем индукцией по n. Если $n \leq 3$, то (21) выполняется тривиально. Предположим, что (21) выполняется для всех $n < k$, $k \geq 4$. Пусть $n = k$. Но тогда $n \geq 4$ и по лемме 4 $t \in I$. Поэтому в силу (22) и (23) $W = R_tR_v$ представляется в виде линейной комбинации R-слов вида $R_{y_1}\dots R_{y_s}R_v$, где $d(y_i) < k$, $i = 1,\dots,s$. Теперь, применив к y_i индуктивное предположение, мы можем выразить W в виде (21). Следовательно, (21) выполняется для любого n.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Бинарно лиева Φ-алгебра A ($\frac{1}{2} \in \Phi$), удовлетворяющая 3-му условию Энгеля, локально нильпотентна.*

Доказательство. Пусть B — произвольная ненулевая конечно-порожденная подалгебра алгебры A с некоторым фиксированным множеством образующих. Поскольку B конечно-порожденная, то число s слов из B, имеющих длину $d \leq 3$, конечно. Рассмотрим произвольное слово $w \in B$ длины $d(w) = 12(2s+1)$. Тогда, используя антикоммутативность, слово w можно представить в виде $w = xyv$, где $d(y) \geq 3(2s+1)$. По лемме 5 $w = \sum_i \alpha_i xW_i$, где $W_i = R_{x_{i1}}\dots R_{x_{ik(i)}}R_v$, а x_{ij} — слова из B длины $d(x_{ij}) \leq 3$, $j = 1,\dots,k(i)$. Легко видеть, что $k(i) \geq 2s+1$. Поэтому в W_i найдется оператор $R_{x_{ik}}$, который встретится по крайней мере три раза. Но тогда по лемме 3 $W_i = 0$. Следовательно, $w = 0$, $B^q = 0$, где $q = 12(2s+1)$. Поскольку B — произвольная конечно-порожденная подалгебра алгебры A, то A — локально нильпотентная алгебра.

Теорема доказана.

Лемма 6. *Пусть B — произвольная бинарно лиева Φ-алгебра, I — идеал алгебры B, a — элемент из B такой, что $Ia = 0$, $J(I,a,B) = 0$. Если U_a — идеал алгебры B, порожденный элементом a, то $IU_a = 0$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых $x, y \in B$, $i \in I$ выполняются равенства $i(ax) = 0$, $J(i,ax,y) = 0$. По условию $i(ax) = iax - ixa - J(i,a,x) = 0$. Докажем второе равенство. Линеаризуем тождество (1): $J(xy,z,t) + J(xz,y,t) + J(ty,z,x) + J(tz,y,x) = 0$. Отсюда, положив $t = i$, $z = a$, получим равенство $J(i,ax,y) = -J(i,a,xy) + J(iy,a,x) + J(ia,y,x) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любых $x,y,t,v \in A$ и любого $X \in R(A)$ выполняется соотношение*

$$yx^2X(xt)v = 0. \tag{24}$$

Доказательство. Соотношение (24) достаточно доказать для произвольного R-слова $X = R_{x_1}\dots R_{x_n}$. Доказательство проведем индукцией по n. В силу (5) и (2) $yx^2(xt)v = -xtx^2yv = tx^3yv = 0$. Следовательно, (24) выполняется для $n = 0$. Пусть (24) выполняется для любого $n < k$, $k > 0$. Положим $n = k-1$. Из линеаризованного по y соотношения (15), индуктивного предположения и (16) следует соотношение

$$yx^2Xw(xt)v = -yx^2X(xt)wv + yw(xt)Xx^2v + y(xt)wXx^2v$$
$$= tx(yw)Xx^2v + txywXx^2v = 0.$$

Поэтому (24) выполняется для $n = k$ и, следовательно, для любого n.

Лемма доказана.

Напомним, что идеал I алгебры A называется *тривиальным*, если $I \neq 0$, $I^2 = 0$. Алгебра, не содержащая тривиальных идеалов, называется *полупервичной*.

Теорема 2. *Если A — бинарно лиева полупервичная Φ-алгебра ($\frac{1}{2} \in \Phi$), удовлетворяющая 3-му условию Энгеля, то $A = 0$.*

Доказательство. В силу полупервичности алгебра имеет нулевой аннулятор. Поэтому из (17) и (24) следует, что для любых $x, y, t \in A$, $X \in R(A)$ выполняются соотношения

$$yx^2Xx = 0, \quad yx^2X(xt) = 0. \tag{25}$$

Отсюда

$$J(yx^2X, x, t) = yx^2Xxt - yx^2Xtx - yx^2X(xt) = 0. \tag{26}$$

Пусть I — идеал алгебры A, порожденный элементом yx^2: $I = \{yx^2X$ для любых $X \in R(A)\}$. В силу (25), (26) и леммы 6 $IU_x = 0$, где U_x — идеал алгебры A, порожденный элементом x. Так как $I \subseteq U_x$, то $I^2 = 0$ и, следовательно, $I = 0$. Поэтому алгебра A удовлетворяет тождеству $yx^2 = 0$. Но тогда по лемме 4 $A^4 = 0$. Следовательно, $A = 0$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов В. Т.* О полупервичных алгебрах Мальцева характеристики 3 // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 100–111.
2. *Филиппов В. Т.* Об алгебрах Мальцева, удовлетворяющих условию Энгеля // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 4. С. 441–455.
3. *Филиппов В. Т.* Об энгелевых алгебрах Мальцева // Алгебра и логика. 1976. Т. 15, № 1. С. 89–109.
4. *Кострикин А. И.* О проблеме Бернсайда // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1959. Т. 23, № 1. С. 3–34.
5. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569–576.
6. *Гайнов А. Т.* Тождественные соотношения для бинарно лиевых колец // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 3. С. 141–146.

Статья поступила 1 февраля 1982 г., окончательный вариант — 22 декабря 2006 г.

Филиппов Валерий Терентьевич