Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 512.565.7

ОБ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ РЕШЕТОК ПОДАЛГЕБР И ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР

А. Г. Пинус

Аннотация. Найден критерий элементарной эквивалентности решеток подалгебр свободных алгебр регулярных многообразий. Рассмотрен вопрос об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов подобных алгебр.

Ключевые слова: решетка подалгебр, группа автоморфизмов, свободная алгебра, регулярное многообразие, унар.

Вопрос о классификации алгебраических систем с помощью их производных структур и элементарных теорий производных структур достаточно естествен и традиционен. Более подробно обсуждение этих вопросов и обзор известных результатов см. в [1]. В частности, представляет интерес исследование отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ на классе всех конечных кардиналов для различных многообразий $\mathscr{M}$ универсальных алгебр. Напомним, что для бесконечных кардиналов k, λ отношение $k \equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}} \lambda$ имеет место тогда и только тогда, когда элементарно эквивалентны решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k)$ и $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda)$, где $\mathrm{Sub}\,\mathscr{A}$ — решетка подалгебр алгебры $\mathscr{A}$, а $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ — свободная $\mathscr{M}$-алгебра, свободно порожденная множеством X.

Всюду далее рассматриваются многообразия не более чем счетной сигнатуры. В обзоре [1] указан ряд многообразий $\mathscr{M}$, для которых отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ совпадает с отношениями ∇ либо $\equiv_2$, и отмечен ряд многообразий $\mathscr{M}$, описание отношения $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ для которых представляет естественный интерес. Здесь ∇ — универсальное (единичное) отношение эквивалентности на классе бесконечных кардиналов, а $\equiv_2$ — отношение эквивалентности бесконечных кардиналов в полной логике второго порядка. В настоящей работе получено некоторое усиление результата из [2], позволяющее дать ответ на один из вопросов работы [1]: будут указаны достаточные условия на многообразие $\mathscr{M}$, при которых отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ совпадает с отношением $\equiv_2$.

В качестве первого условия на многообразие $\mathscr{M}$ рассмотрим следующее:

(1) существует элементарная формула $\psi(u)$ решеточной сигнатуры такая, что для любого $B \in \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$

$$\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \models \psi(B) \iff B = \langle x \rangle \text{ для некоторого } x \in X.$$

Для любой алгебры $\mathscr{A} = \langle A; \sigma \rangle$ и любого $C \subseteq A$ через $\langle C \rangle$ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{A}$, порожденную множеством C.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00159–а).

В качестве еще одного условия на решетки подалгебр свободных алгебр $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ рассмотрим следующее:

(2) существует $B \in \operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\{x, y\})$ такая, что $\langle y \rangle \subset B$ и $B \cap \langle x \rangle = \varnothing$, т. е. существует терм $t(x, y)$ сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$ такой, что $t(x, y) \notin \langle y \rangle$ и $\langle t(x, y), y \rangle \cap \langle x \rangle = \varnothing$.

Теорема. *Если нетривиальное конечно базируемое многообразие $\mathscr{M}$ таково, что решетки $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то отношение $\equiv_{\mathrm{Sub}}^{\mathscr{M}}$ на классе бесконечных кардиналов совпадает с отношением $\equiv_2$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}$ — многообразие, удовлетворяющее условиям теоремы, и X — бесконечное множество. Через $\operatorname{Part} X$ обозначим решетку разбиений множества X. Пусть θ_0 — некоторое разбиение множества X на двухэлементные подмножества. Через $\operatorname{Part} X \restriction\geq \theta_0$ обозначим фильтр решетки $\operatorname{Part} X$, порожденный разбиением θ_0. Очевидно, что

$$\operatorname{Part} X \cong \operatorname{Part} X \restriction\geq \theta_0.$$

Пусть теперь $\theta \in \operatorname{Part} X \restriction\geq \theta_0$. Через B_θ обозначим подалгебру алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, порожденную множеством $C_\theta = \{t(x, y) \mid x, y \in X, x \neq y \text{ и } \theta(x, y)\}$, здесь $t(u, v)$ — терм из условия (2).

Покажем, что для любых $x, y \in X$ отношение $B_\theta \cap (\langle x \rangle \vee \langle y \rangle) \neq \varnothing$ равносильно отношению $\theta(x, y)$. Действительно, если $\theta(x, y)$, то $t(x, y) \in B_\theta \cap (\langle x \rangle \vee \langle y \rangle)$. Допустим теперь, что терм $q(u, v)$ таков, что $q(x, y) \in B_\theta \cap (\langle x \rangle \vee \langle y \rangle)$, и имеет место $\neg\theta(x, y)$. Тогда найдется терм p сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$, построенный из порождающих, которые входят в C_θ, такой, что на $\mathscr{M}$ истинно тождество $q(x, y) = p$. Таким образом,

$$p = p(x, y, \bar{u}) = h(t(x, u_1), \dots, t(y, u_k), \dots, t(u_s, u_s'), \dots),$$

здесь $u_i, u_i' \in X$ и те элементы x, y, u_i, u_i', которые входят как переменные в какое-либо из вхождений терма t в h, попарно различны, но θ-эквивалентны. Итак, на $\mathscr{M}$ истинно тождество

$$q(x, y) = h(t(x, u_1), \dots, t(y, u_k), \dots, t(u_s, u_s'), \dots).$$

Подставляя в это тождество вместо элемента y элемент x, а затем вместо всех u_i, u_i' — элемент y, получаем равенство (в алгебре $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$)

$$q(x, x) = h(t(x, y), \dots, t(x, y), \dots, t(y, y), \dots),$$

в правой части которого в силу отношения $\neg\theta(x, y)$ нет вхождений элементов $t(x, x)$. Данное равенство противоречит условию (2).

Тем самым равносильность отношений $\theta(x, y)$ и $B_\theta \cap (\langle x \rangle \vee \langle y \rangle) \neq \varnothing$ доказана.

В силу условия (1) множество $\{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ выделяется в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ элементарной формулой $\psi(u)$ решеточной сигнатуры. Пусть элементарная формула $\psi_1(u)$ выделяет в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ такие подалгебры B, что отношение $B \cap (\langle x \rangle \vee \langle y \rangle) \neq \varnothing$ является разбиением на множестве $\{\langle x \rangle \mid x \in X\}$, а формула $\psi_2(u)$ — те B, для которых это разбиение является разбиением на двухэлементные подмножества. Тогда для любой элементарной формулы ϕ решеточной сигнатуры и любого бесконечного множества X

$$\operatorname{Part}(X) \models \phi \Longleftrightarrow \operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \models \forall B(\psi_2(B) \longrightarrow \phi_B),$$

где ϕ_B — релятивизация формулы ϕ по переменным, удовлетворяющим формуле $\psi_1(u)\&u \geq B$. Тем самым для любых бесконечных кардиналов k, λ

$$\mathrm{Part}(k) \not\equiv \mathrm{Part}(\lambda) \Longrightarrow \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k) \not\equiv \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda).$$

В работе [3] доказано, что для любых бесконечных кардиналов k и λ отношения $k \equiv_2 \lambda$ и $\mathrm{Part}(k) \equiv \mathrm{Part}(\lambda)$ равносильны.

Таким образом, для подобных кардиналов k, λ

$$k \not\equiv \lambda \Longrightarrow \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k) \not\equiv \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda).$$

Обратная импликация, как отмечено в [1, 2], имеет место в силу конечной базируемости многообразия $\mathscr{M}$. Теорема доказана.

Очевидно, что теорема работы [2] является частным случаем доказанной выше теоремы. В качестве примера многообразий $\mathscr{M}$, удовлетворяющих условиям данной теоремы и не удовлетворяющих условиям теоремы из [2], укажем класс регулярных многообразий, вопрос об описании отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$, для которых сформулирован в [1]. Напомним, что многообразие $\mathscr{M}$ называется *регулярным*, если переменные, входящие в левую и правую части любого тождества, истинного на $\mathscr{M}$, совпадают. Понятие регулярного многообразия введено в работе Плонки [4]. Йонссоном и Нельсоном [5] доказано, что многообразие регулярно тогда и только тогда, когда оно аксиоматизируемо регулярными тождествами. Более подробно о регулярных многообразиях см. [6].

Заметим, что любое нетривиальное регулярное многообразие $\mathscr{M}$ удовлетворяет условию (1).

Для любой алгебры $\mathscr{A}$ и любого ее элемента a через M_a будем обозначать произвольную из подалгебр алгебры $\mathscr{A}$, максимальных относительно свойства «подалгебра, не содержащая элемента a». Существование подалгебр вида M_a следует из леммы Цорна. Для любого нетривиального многообразия $\mathscr{M}$, любого множества X и любого $x \in X$ по крайней мере одна из подалгебр алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ вида M_x является коатомом в решетке $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. Действительно, $x \notin \langle X\backslash\{x\}\rangle$, и тем самым найдется подалгебра вида M_x, включающая в себя подалгебру $\langle X\backslash\{x\}\rangle$, которая и будет искомым коатомом. С другой стороны, отсюда очевидно, что M_x для $x \in X$ можно выбирать попарно различными для различных x из X.

Пусть теперь $\mathscr{M}$ — нетривиальное регулярное многообразие и для некоторого $x \in X$ подалгебры B_1, B_2 алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ являются коатомами решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, не содержащими элемент x. Тогда для любого $a_1 \in B_1\backslash B_2$ имеет место равенство $\langle\{a_1\} \cup B_2\rangle = \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ и, значит, элемент x допускает запись в виде значения термальной функции на элементе a_1 и элементах из B_2. Но в силу регулярности $\mathscr{M}$ это означает, что $a_1 = t(x)$ для некоторого терма t сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$, т. е. имеют место включения $B_1\backslash B_2, B_2\backslash B_1 \subseteq \langle x\rangle$. Отсюда также очевидно, что $B_1 \cap B_2 \supseteq \langle X\backslash\{x\}\rangle$. Пусть теперь B — произвольный коатом решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ и $t(x_1, \ldots, x_n) \notin B$, где t — терм сигнатуры многообразия $\mathscr{M}$ и $x_i \in X$. Тогда $x \notin B$ для некоторого $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ввиду коатомности B такой $x \in X$ единствен. Так как x можно выразить в виде значения термальной функции от $t(x_1, \ldots, x_n)$ и элементов из B, в силу регулярности $\mathscr{M}$ на самом деле $t(x_1, \ldots, x_n)$ зависит только от x, т. е. $t(x_1, \ldots, x_n) = t(x)$, откуда $\langle t(x)\rangle \subseteq \langle x\rangle$ и $B \supseteq \langle X\backslash\{x\}\rangle$. Пусть K — совокупность всех коатомов решетки $\mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. На K определим отношение эквивалентности $\sim$: для $B_1, B_2 \in K$ пусть $B_1 \sim B_2$ означает, что существуют $C_1, C_2 \in \mathrm{Sub}\,\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, для которых

$C_1 \subseteq B_1 \cap B_2, C_1 \cap C_2 = \varnothing, C_1 \vee C_2 = \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$, и для любой $D \in \operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ если $D \vee B_1$ (либо $D \vee B_2$) совпадает с $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}$, то существует $D_1 \subseteq D$ такое, что $D_1 \subseteq C_2$ и $D_1 \vee B_1$ (либо соответственно $D_1 \vee B_2$) совпадает с $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$.

Отношение $\sim$ на K и совокупность K формульны (в логике первого порядка) в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$. При этом, как замечено выше, роль соответствующих подалгебр C_1 и C_2 для коатомов B_1, B_2, связанных отношением $\sim$, играют подалгебры $\langle X \backslash \{x\} \rangle$ и $\langle x \rangle$ для некоторого $x \in X$ соответственно. Тем самым существует формула $\psi(u)$ решеточной сигнатуры такая, что для любого $B \in \operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$

$$\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \models \psi(B) \Longleftrightarrow B = \langle x \rangle \text{ для некоторого } x \in X,$$

т. е. нетривиальные регулярные многообразия удовлетворяют условию (1).

Очевидно также, что любое нетривиальное регулярное многообразие неунарной сигнатуры удовлетворяет условию (2). В [7] доказано, что для нетривиальных унарных многообразий $\mathscr{M}$ (многообразий, сигнатурные функции которых одноместны) отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ совпадает с отношением ∇. Таким образом, из доказанной выше теоремы вытекает полная классификация отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ для регулярных многообразий.

Следствие 1. *Для любого нетривиального регулярного многообразия $\mathscr{M}$ отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ совпадает с отношением ∇ в случае унарности сигнатуры $\mathscr{M}$ и совпадает с отношением $\equiv_2$ в противном случае.*

Очевидно, что регулярными многообразиями полугрупп являются многообразия всех полугрупп и всех коммутативных полугрупп.

Большое число иных регулярных многообразий полугрупп (в иной терминологии, уравновешенных и гомотопных многообразий) приведено в обзоре Л. Н. Шеврина и М. В. Волкова [8].

Наконец, остановимся на отношении $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}}$ на бесконечных кардиналах для регулярных многообразий $\mathscr{M}$ и многообразий унаров. Напомним, что для кардиналов k и λ отношение $k \equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}} \lambda$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(k) \equiv \operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(\lambda)$. Здесь $\operatorname{Aut} \mathscr{A}$ — группа автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$.

Любой автоморфизм φ алгебры $\mathscr{A}$ естественным образом индуцирует автоморфизм $\overline{\varphi}$ решетки $\operatorname{Sub} \mathscr{A}$. Если $\mathscr{M}$ — регулярное нетривиальное многообразие, то в силу замеченной выше формульности совокупности подалгебр $\mathscr{B} = \{\langle x \rangle \mid x \in X\}$ в решетке $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ для любого автоморфизма φ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ индуцированный φ автоморфизм $\overline{\varphi}$ решетки $\operatorname{Sub} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ определяется своим ограничением на $\mathscr{B}$, т. е. группа $\{\overline{\varphi} \mid \varphi \in \operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)\}$ изоморфна полной симметрической группе $\operatorname{Sym} X$ на множестве X. Таким образом, очевидно, что группа $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ оказывается изоморфной сплетению $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1) \wr \operatorname{Sym}(X)$ группы $\operatorname{Aut} \mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1)$ с группой $\operatorname{Sym}(X)$ всех подстановок на множестве X.

Напомним, что алгебра, не имеющая нетождественных автоморфизмов, называется *жесткой*. Истинность отношения $\equiv_p$ на бесконечных кардиналах k и λ означает элементарную эквивалентность групп $\operatorname{Sym}(k)$ и $\operatorname{Sym}(\lambda)$. В частности, имеет место

Следствие 2. *Если $\mathscr{M}$ — нетривиальное регулярное многообразие с жесткой однопорожденной свободной алгеброй, то отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}}$ совпадает с отношением $\equiv_p$.*

Аналогичная ситуация имеет место для унарных многообразий. Действительно, если $\mathscr{M}$ — нетривиальное унарное многообразие, то для любого множества X совокупность $\{\langle x\rangle \mid x \in X\}$ подалгебр алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ является совокупностью максимальных однопорожденных подалгебр этой алгебры. Тем самым индуцированный любым автоморфизмом φ алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X)$ автоморфизм $\overline{\varphi}$ решетки $\operatorname{Sub}\mathscr{F}_M(X)$ является перестановкой на множестве $\{\langle x\rangle \mid x \in X\}$. В силу этого, как и выше, для регулярных многообразий имеет место изоморфизм $\operatorname{Aut}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(X) \cong \operatorname{Aut}\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1) \wr \operatorname{Sym}(X)$. В частности, имеем

Следствие 3. *Если $\mathscr{M}$ — нетривиальное унарное многообразие с жесткой однопорожденной свободной алгеброй, то отношение $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Aut}}$ совпадает с отношением $\equiv_p$.*

В связи со следствиями 2, 3 представляет интерес следующий открытый

Вопрос. *Верно ли, что для любой счетной группы G и любых бесконечных кардиналов k и λ следующие условия эквивалентны:*
(1) $\operatorname{Sym}(k) \equiv \operatorname{Sym}(\lambda)$,
(2) $G \wr \operatorname{Sym}(k) \equiv G \wr \operatorname{Sym}(\lambda)$.

При положительном ответе на этот вопрос в формулировках следствий 2 и 3 условие жестокости однопорожденной алгебры $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}(1)$ становится излишним.

По поводу отношений $\equiv^{\mathscr{M}}_{\mathrm{Sub}}$ и $\equiv^{M}_{Con}$ для унарных многообразий см. [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Важенин Ю. М., Пинус А. Г.* Элементарная эквивалентность и разрешимость теорий производных структур // Успехи мат. наук. 2005. Т. 60, № 3. С. 3–40.
2. *Пинус А. Г., Роуз Г.* Элементарная эквивалентность решеток подалгебр свободных алгебр // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 595–601.
3. *Пинус А. Г.* Элементарная эквивалентность решеток разбиений // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, № 3. С. 211–212.
4. *Plonka J.* On a method of construction of abstract algebras // Fund. Math. 1967. V. 61, N 2. P. 183–189.
5. *Jonsson B., Nelson E.* Relatively free products in regular varieties // Algebra Univ. 1974. V. 4, N 1. P. 14–19.
6. *Graczynska E.* Operators on varieties. Opole: Politechnika Opolska Wydawnicza, 1998.
7. *Пинус А. Г.* Об элементарной эквивалентности производных структур свободных полугрупп, унаров и групп // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 730–747.
8. *Шеврин Л. Н., Волков М. В.* Тождества полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1985. № 11. С. 3–47.

Статья поступила 15 июня 2006 г.

Пинус Александр Георгиевич
Новосибирский гос. технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru