Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.95

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В ЦЕЛОМ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. II

М. Отелбаев, А. А. Дурмагамбетов, Е. Н. Сейткулов

Аннотация. Получен критерий сильной разрешимости в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, сильное решение в целом.

В этой работе, которая является продолжением работы [1], мы применим результаты, полученные в указанной работе, к системе уравнений Навье — Стокса.

1. Некоторые известные факты о классах периодических функций на кубе. Пусть Q — куб с ребрами, равными 2π, Δ — оператор Лапласа, $p \in (1;\infty)$, $\alpha \in (-\infty;+\infty)$. На множестве тригонометрических полиномов определим норму

$$|u|_{W^{\alpha}_{p,\pi}(Q)} = |(-\Delta + E)^{\frac{\alpha}{2}} u|_{L_p(Q)}. \tag{1}$$

Здесь E — единичный оператор.

Пополнение линейного многообразия тригонометрических полиномов по норме (1) обозначим через $W^{\alpha}_{p,\pi}(Q)$. Это дробное пространство Соболева периодических функций.

Если в (1) вместо куба Q рассмотреть $\mathbb{R}^3$, то $W^{\alpha}_p(\mathbb{R}^3)$ — пространство бесселевых потенциалов, о котором можно прочитать в [2]. Норма в $W^{\alpha}_p(\mathbb{R}^3)$ определяется по формуле

$$|u|_{W^{\alpha}_p(\mathbb{R}^3)} = \left[\int\limits_{\mathbb{R}^3} \left|F^{-1}_{\xi\to y}(|\xi|^2+1)^{\frac{\alpha}{2}} F_{x\to\xi} u(x)\right|^p dy\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{2}$$

где F — прямое, а F^{-1} — обратное преобразования Фурье.

Теорема 1. *Если $1 < p \le q < \infty$, $\alpha \ge \beta \ge 0$, $\alpha - \beta \ge 3\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, то*

$$W^{\alpha}_p(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{\beta}_q(\mathbb{R}^3),$$

где знак $\hookrightarrow$ означает вложение вместе с топологией.

Доказательство этой теоремы имеет длинную историю, а ее полное доказательство (в более общей форме) получено П. И. Лизоркиным в [3].

Для удобства сформулируем один результат, вытекающий из теоремы 1.

Лемма 1. *Если* $1 < p \leq q < \infty$, $\gamma = 3\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)$, *то*

$$|u|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \leq C|(-\Delta + E)^{\frac{\gamma}{2}} u|_{L_p(\mathbb{R}^3)}, \quad |(-\Delta + E)^{-\frac{\gamma}{2}} u|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \leq C|u|_{L_p(\mathbb{R}^3)}.$$

Для дробных классов Соболева $W^l_{p,\pi}$ периодических функций верны утверждения, подобные теореме 1 и лемме 1.

Лемма 1′. (а) *Если* $1 < p \leq 2$, $\gamma = 3\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$, *то*

$$|(-\Delta + E)^{-\frac{\gamma}{2}} u|_{L_2(Q)} \leq C|u|_{L_p(Q)}.$$

(б) *Если* $2 \leq q < \infty$, $\gamma = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)$, *то*

$$|u|_{L_q(Q)} \leq C|(-\Delta + E)^{\frac{\gamma}{2}} u|_{L_2(Q)}.$$

В монографиях по теоремам вложений уделяется большое внимание теории пространств $W^\alpha_p(\mathbb{R}^3)$ и формулируется и доказывается теорема 1. Однако аналог теоремы 1 для пространств периодических на кубе Q функций отсутствует практически во всех известных монографиях. Конечно, результат леммы можно извлечь из результатов П. И. Лизоркина [3].

Мы укажем другой путь. В пространствах $L_p(Q)$ $(1 < p < \infty)$ операторы $(-\Delta + E)^\alpha$ $(\alpha > 0)$ можно определить по формуле (см. [4, с. 308])

$$(-\Delta + E)^\alpha u = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty [\lambda^{\alpha-1} (\lambda E - \Delta + E)^{-1} (-\Delta + E) u] \, d\lambda, \tag{3}$$

где $u \in D(-\Delta)$ ($D(\cdot)$ — область определения). Здесь Δ — самосопряженное расширение оператора Лапласа, соответствующее периодическим краевым условиям. Равенство (3), первоначально определенное на тригонометрических полиномах, по непрерывности (в метрике $L_p(Q)$) распространяется на все $u(\cdot)$, для которых имеет смысл правая часть (3). Так как локальная главная часть интегрального оператора $(\lambda E - \Delta + E)^{-1}$ (функции Грина) одна и та же для $\mathbb{R}^3$ и для Q (и равна фундаментальному решению), то лемма 1′ сводится к лемме 1.

Лемму 1′ можно доказать, не пользуясь теоремой 1 (или леммой 1). Например, теорема 2 Нурсултанова из [5] позволяет доказать аналог теоремы 1 для периодических классов, опираясь на преобразования Абеля и неравенства Юнга — О'Нейла.

Лемма 2. *Пусть* u *и* v *— тригонометрические полиномы и* $-\infty < \gamma < \frac{3}{4}$, *а* D *— дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Тогда*

$$|(-\Delta + E)^{-\gamma} (u \cdot Dv)|_{L_2(Q)} \leq C|(-\Delta + E)^{\frac{3}{8} - \frac{\gamma}{2}} u|_{L_2(Q)} \cdot |(-\Delta + E)^{\frac{7}{8} - \frac{\gamma}{2}} v|_{L_2(Q)}.$$

Доказательство. При $\frac{3}{2} \geq 2\gamma = 3\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) \geq 0$ из леммы 1′ имеем

$$|(-\Delta + E)^{-\gamma} (u \cdot Dv)|_{L_2(Q)} \leq C|u \cdot Dv|_{L_p(Q)}.$$

Используем неравенство Коши, а затем снова лемму 1′:

$$\begin{aligned} |(-\Delta + E)^{-\gamma} (u \cdot Dv)|_{L_2(Q)} &\leq C|u|_{L_{2p}(Q)} |Dv|_{L_{2p}(Q)} \\ &\leq C|(-\Delta + E)^{\frac{3}{8} - \frac{\gamma}{2}} u|_{L_2(Q)} |(-\Delta + E)^{\frac{7}{8} - \frac{\gamma}{2}} v|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Лемма при $\gamma \ge 0$ доказана.

Если $\gamma \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, то пользуемся доказанной частью леммы и неравенствами

$$|(-\Delta+E)^{-\gamma} f|_{L_2(Q)} = |[(-\Delta+E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}](-\Delta+E)^{\frac{1}{2}} f|_{L_2(Q)}$$
$$\le c\sum_{j=1}^{3}\left|[(-\Delta+E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}]\frac{\partial}{\partial x_j} f\right|_{L_2(Q)} + |[(-\Delta+E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] f|_{L_2(Q)},$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left|[(-\Delta+E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}]\frac{\partial}{\partial x_j} f\right|_{L_2(Q)} + |[(-\Delta+E)^{-(\gamma+\frac{1}{2})}] f|_{L_2(Q)} \le c|(-\Delta+E)^{-\gamma} f|_{L_2(Q)}.$$

Сами эти неравенства вытекают из простых соотношений коэффициентов Фурье.

Пространство вектор-функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $x \in Q$, каждая компонента которых принадлежит $W^{\alpha}_{p,\pi}(Q)$, обозначим через $L_{p,\alpha}$. Эти пространства, как и $W^{\alpha}_{p,\pi}(Q)$, определены при всех $p \in (1,\infty)$ и $\alpha \in (-\infty,\infty)$.

Обозначим $(u,\nabla)v = u_i\partial_i v = (u_i\partial_i v_1, u_i\partial_i v_2, u_i\partial_i v_3)$, где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $u_i\partial_i = u_1\partial_1 + u_2\partial_2 + u_3\partial_3$.

Из леммы 2 сразу получаем, что верна

Лемма 3. *Пусть u и v — трехкомпонентные вектор-функции и $-\infty < \gamma < \frac{3}{4}$. Тогда имеет место неравенство*

$$|(-\Delta+E)^{-\gamma}(u,\nabla)v|_{L_{2,0}} \le C|(-\Delta+E)^{\frac{3}{8}-\frac{\gamma}{2}} u|_{L_{2,0}} |(-\Delta+E)^{\frac{7}{8}-\frac{\gamma}{2}} v|_{L_{2,0}}.$$

В пространстве $L_{p,\alpha}$ базисом являются следующие элементы:

$$(\,1\ 0\ 0\,)\,e^{i\langle m,x\rangle}, (\,0\ 1\ 0\,)\,e^{i\langle m,x\rangle}, (\,0\ 0\ 1\,)\,e^{i\langle m,x\rangle}, \tag{4}$$

где m пробегает множество всех целых векторов, а $\langle m,x\rangle = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$ ($i^2 = -1$). Из линейной комбинации элементов (4) при $m \ne (0,0,0)$ образуем два линейно независимых взаимно ортогональных вектора

$$e^{(j)}_m = \left(\,c^{(j)}_{m_1}\ c^{(j)}_{m_2}\ c^{(j)}_{m_3}\,\right) e^{i\langle m,x\rangle} \quad (j = 1,2),$$

удовлетворяющих условиям

$$c^{(j)}_{m_1} m_1 + c^{(j)}_{m_2} m_2 + c^{(j)}_{m_3} m_3 = 0, \quad \sum_{k=1}^{3}\left|c^{j}_{m_k}\right|^2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3. \tag{4$'$}$$

Из множества вектор-функций $e^{(1)}_m, e^{(2)}_m$, где $m = (m_1, m_2, m_3)$ пробегает множество всех целых векторов ($m \ne (0,0,0)$), присоединив к нему векторы (4) при $m = (0,0,0)$, составим ортонормированную систему

$$(\,1\ 0\ 0\,), (\,0\ 1\ 0\,), (\,0\ 0\ 1\,), \dots, e^{(1)}_m, e^{(2)}_m, \dots, \tag{4$''$}$$

которая является подсистемой системы (4).

При $p \in (1,\infty)$ и $\alpha \in (-\infty,+\infty)$ введем пространство $H_{p,\alpha} \equiv H_{p,\alpha}(Q)$, пополняя по норме $L_{p,\alpha}$ все возможные конечные линейные комбинации векторов $(4)''$. Получим банахово пространство, являющееся подпространством $L_{p,\alpha}$.

Лемма 4. (а) *Пусть* $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$ — *конечная линейная комбинация элементов* $(4'')$. *Тогда*

$$\operatorname{div} u(x) \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_j} = 0. \tag{5}$$

(б) *Пусть* $u(x)$ — *конечная линейная комбинация элементов из* (4) *и выполнено равенство* (5). *Тогда* $u(x)$ *представима в виде конечной суммы элементов* $(4'')$.

Эта лемма в силу $(4')$ легко следует из построений ортонормированной системы $(4'')$.

Из леммы 4 стандартными приемами получаем, что имеет место

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$H_{p,\alpha} \equiv H_{p,\alpha}(Q) = \{u \in L_{p,\alpha}(Q) : \operatorname{div} u = 0\}.$$

Здесь $\operatorname{div} u = 0$ понимается в обычном смысле при $\alpha \geq \frac{1}{2}$, а при $\alpha < \frac{1}{2}$ понимается как равенство нулю обобщенной вектор-функции над конечными линейными комбинациями базисных элементов (4).

Лемма 6. *Если* $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ *и* $u \in L_{2,\alpha}$, *то*

$$(u + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} u) \in H_{2,\alpha}.$$

Здесь $(-\widetilde{\Delta})^{-1}$ — оператор, определенный формулой: если

$$u = \sum_{\{m\}} (\, c_{m,1} \ c_{m,2} \ c_{m,3} \,)\, e^{i\langle m,x\rangle},$$

то

$$(-\widetilde{\Delta})^{-1} u = \sum_{\{m\},|m|\neq 0} \frac{1}{|m|^2} (\, c_{m,1} \ c_{m,2} \ c_{m,3} \,)\, e^{i\langle m,x\rangle}.$$

Доказательство леммы получается непосредственными простыми вычислениями. При $\alpha < \frac{1}{2}$ операции понимаются в обобщенном смысле.

Лемма 7. *Пусть* $P(x) \in W^{\alpha}_{2,\pi}(Q)$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда*

$$\operatorname{grad} P(x) + [\operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}] \operatorname{grad} P(x) = 0.$$

Доказательство леммы проводится простыми вычислениями.

Легко доказывается

Лемма 8. *Имеет место равенство*

$$L_{2,\alpha}(Q) = H_{2,\alpha}(Q) \oplus M,$$

где $\oplus$ — *знак ортогональной суммы,* $M = \{u : u = \operatorname{grad} g \in L_{2,\alpha}(Q)\}$, *т. е. если* $f(x) \in L_{2,\alpha}(Q)$, *то* $f(x) = \tilde{f}(x) + u(x)$, $\tilde{f}(x) \in H_{2,\alpha}(Q)$, $u = \operatorname{grad} g \in M$.

Доказательство следует из равенства $f(x) = [f + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} f] - \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div} f$ и леммы 6.

Любопытно и, по-видимому, полезно в гидродинамике следующее

Замечание 1. Пусть Ω_0 и Ω_1 — области в $\mathbb{R}^3$, и пусть Ω_1 содержит Ω_0 вместе с окрестностью. В области Ω_1 рассмотрим некоторую граничную задачу

$$\Delta u(x) = f(x),\ x \in \Omega_1, \quad R(u)|_{\partial\Omega_1} = 0, \tag{6}$$

где $R(\cdot)$ — линейный оператор. Предположим, что эта задача однозначно разрешима для любого $f \in L_2(\Omega_1)$ и решение принадлежит классу $W_2^{(2)}(\Omega_1)$. Через $\widehat{\Delta}^{-1}$ обозначим оператор, сопоставляющий f решение задачи (6). В пространстве трехкомпонентных вектор-функций, компоненты которых лежат в $W_2^1(\Omega_0)$, определим оператор

$$Nu \equiv \operatorname{grad}(\widehat{\Delta}^{-1})\chi(\Omega_0)\operatorname{div} u,$$

где χ — характеристическая функция. Легко убедится, что в Ω_0 выполнено $\operatorname{div}(E-N)u \equiv \operatorname{div} u - \operatorname{div} Nu = 0$.

2. О системе уравнений Навье — Стокса. Рассмотрим систему уравнений Навье — Стокса

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j - \Delta u_j + \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}u_j + \frac{\partial}{\partial x_j}P = f_j,\ j = 1,2,3, \quad \operatorname{div} u \equiv \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}u_k = 0, \tag{7}$$

в области $[0,a]\times Q$ ($t \in [0,a]$, $x \in Q$). К системе добавим периодические граничные условия по пространственным переменным и нулевое начальное условие Коши по времени:

$$\begin{gathered} u_j(t,x)|_{t=0} = 0, \quad u_j(t,x)|_{x_k=-\pi} = u_j(t,x)|_{x_k=\pi}, \\ \left.\frac{\partial}{\partial x_k}u_j(t,x)\right|_{x_k=-\pi} = \left.\frac{\partial}{\partial x_k}u_j(t,x)\right|_{x_k=\pi}, \\ P(t,x)|_{x_k=-\pi} = P(t,x)|_{x_k=\pi} \quad (k,j=1,2,3). \end{gathered} \tag{8}$$

Из (7) и (8) давление $P(t,x)$ не может быть определено однозначно. Оно может содержать (в виде слагаемого) произвольную функцию, зависящую от времени t. Поэтому для однозначности определения P к (7) и (8) добавим условие

$$\int_Q P(t,x)\,dx = 0. \tag{9}$$

Подействуем операцией $K \equiv E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}$ на первые три уравнения системы (7). Тогда получаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + (E + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div})(u,\nabla)u = (E + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div})f \equiv \tilde{f}, \quad u|_{t=0} = 0. \tag{10}$$

При выводе (10) мы учитывали (7), (8) и то, что в силу $\operatorname{div} u = 0$

$$(E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div})\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div})\Delta u = \Delta u.$$

Так как в классе периодических функций (пополнении многообразия тригонометрических полиномов) операторы $\frac{\partial}{\partial t}$ и Δ перестановочны с проектором $K = [E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}]$, в системе уравнений (10) нет необходимости писать Ku, $K\frac{\partial}{\partial t}K$ и $K\Delta K$ вместо u, $\frac{\partial}{\partial t}$ и Δ соответственно.

Отметим, что, действуя на систему (10) операцией div, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} u) - \Delta(\operatorname{div} u) = 0, \quad (\operatorname{div} u)|_{t=0} = 0.$$

Отсюда следует, что для решения (10) условие $\operatorname{div} u = 0$ выполняется автоматически.

В качестве пространства H в пп. 1–3 из [1] возьмем $H_{2,0}$. Тогда оператор $(-\Delta)$ будет самосопряженным в H неотрицательным оператором, а оператор $[E + \operatorname{grad}(-\tilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}](u, \nabla)u$ — билинейным в H оператором. Обозначим их соответственно через A и $B(\cdot, \cdot)$.

Теперь система уравнений (10) записывается в виде

$$u'_t + Au + B(u, u) = f(t), \quad u|_{t=0} = 0. \tag{10$'$}$$

Условие (2), (3) из [1] выполняется в силу леммы 3. Помимо условий, которые требовались в пп. 1–3 из [1], выполняется еще одно условие:

$$\langle B(u, g), g\rangle_{H_{2,0}} = 0.$$

Из этого условия для решения (10$'$) вытекает хорошо известная априорная оценка:

$$|u|^2(t) + \int\limits_0^t |A^{\frac{1}{2}} u|^2 \, dt \le \int\limits_0^t |f|^2 \, dt. \tag{11}$$

Эта оценка позволяет получить существование «слабого решения Хопфа» в целом (см. [6, с. 83]).

Применим теперь теорему А из [1] к системе уравнений (10). Пусть $a > 0$. Через $H^a_{2,\alpha}$ будем обозначать трехкомпонентные вектор-функции $u(t, x)$, значения которых при почти всех $t \in [0, a]$ принадлежат $H_{2,\alpha}$ и

$$|u(\cdot, \cdot)|_{H^a_{2,\alpha}} = \left(\int\limits_0^a |u(t, \cdot)|^2_{H_{2,\alpha}} \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

В пространстве $H^a_{2,0}$ рассмотрим систему

$$\begin{gathered} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + K(v, \nabla)v = s \ (0 < t < a), \quad v|_{t=0} = 0, \\ -\frac{\partial s}{\partial t} - \Delta s - K\left[(v, \nabla)s + \sum_{i=1}^3 s_i \operatorname{grad} v_i\right] = 0 \ (0 < t < a), \quad s|_{t=a} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь $K = [E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}]$ — проектор.

Замечание 2. Отметим, что в системе уравнений (12) решения обобщенные, смысл их дается в определении 1 (см. ниже). Поэтому производные по времени от $s(\cdot)$ — обобщенные производные (пробные функции определены равенствами (13)). Можно показать, что решения системы (12) на любом строго внутреннем к $[0, a]$ отрезке имеют обычные производные и бесконечно гладкие.

Приведем определение обобщенного решения. Сначала отметим, что из априорной оценки (11) следует (см. [1]), что если $(w_1, w_2) \in D_a$ и $w' + Aw + B(w, w) \in H_2[0, a]$, $w(0) = 0$, то $B_w w_1 \in H_2[0, a]$. Поэтому в определении 3г) из [1] вместо «Если $(w_1, w_2) \in D_a$ и $B_w w_1 \in H_2[0, a]$, то …» можно использовать следующее: «Если $(w_1, w_2) \in D_a$, то …». С учетом сказанного определение обобщенного решения для системы (12) будет следующим.

Определение 1. Пусть

$$w_1(t,x) = \sum c_{1,n}(t)e_n(x), w_2(t,x) = \sum c_{2,n}(t)e_n(x), \tag{13}$$

где суммы конечные, $c_{1,n}(t)$ и $c_{2,n}(t)$ — бесконечно гладкие на $[0,a]$ функции, удовлетворяющие условиям $c_{1,n}(0) = 0, c_{2,n}(a) = 0$, а $\{e_n(x)\}$ — ортонормированный базис $(4'')$. Пара функций

$$v(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)e_n(x), \quad s(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t)e_n(x) \tag{14}$$

называется *решением системы* (12), если

$$\int_0^a \int_Q (|s(t,x)|^2 + |v(t,x)|^2)\,dxdt < \infty,$$

и при любом $\delta \in (0,a)$ выполнено неравенство

$$\int_0^{a-\delta} \int_Q |v'_t(t,x) - \Delta v(t,x)|^2\,dxdt < \infty,$$

а также для любой пары (w_1, w_2) вида (13) справедливы равенства

$$\int_0^a \int_Q s(t,x)[w'_{1t} - \Delta w_1 + (v,\nabla)w_1 + (w_1,\nabla)v]\,dxdt = 0,$$

$$\int_0^a \int_Q \{[-w'_{2t} - \Delta w_2]v(t,x) + w_2(v,\nabla)v(t,x) - w_2(t,x)s(t,x)\}\,dxdt = 0. \tag{15}$$

В последних равенствах перед $(v,\nabla)w_1 + (w_1,\nabla)v$ и перед $(v,\nabla)v(t,x)$ должен стоять оператор проектирования $K = [E + \operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}]$. Этот оператор «переброшен» на рядом стоящий множитель, на который он действует как единичный. Поэтому в этих равенствах отсутствует проектор K.

Теорема 2. *Система* (10) *при любом* $\tilde{f} \in H^a_{2,0}$ *имеет решение* $u(t,x)$, *удовлетворяющее условию* $\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta u \in H^a_{2,0}$, *если и только если система уравнений* (12) (*рассматриваемая в* $H^a_{2,0}$) *имеет только нулевое решение* (*т. е.* $v(t,x) \equiv s(t,x) \equiv 0$).

Доказательство. В силу определения 1 система (12) эквивалентна системе (4) из теоремы А работы [1], соответствующей уравнению $(10')$, т. е. система (4) из [1] есть абстрактная запись системы (12). Поэтому теорема 2 — следствие теоремы А из [1].

Следующая теорема является переформулировкой теоремы 2.

Теорема 2$'$. *Для того чтобы задача (7)–(9) при любом $f=(f_1(t,x),f_2(t,x),f_3(t,x))$, удовлетворяющем условию*

$$\int_0^a |f(t,\cdot)|^2_{L_2(Q)}\,dt<\infty,$$

имела решение (u,P), $u=(u_1(t,x),u_2(t,x),u_3(t,x))$, удовлетворяющее условию

$$\int_0^a |u_t-\Delta u|^2_{L_2(Q)}+\int_0^a |\operatorname{grad}P|^2_{L_2(Q)}\,dt<\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы обобщенное решение системы уравнений

$$\begin{gathered}\frac{\partial v_j}{\partial t}-\Delta v_j+u_k\frac{\partial}{\partial x_k}v_j+\frac{\partial}{\partial x_j}P=s_j\ (j=1,2,3),\quad \operatorname{div}v=\frac{\partial}{\partial x_k}v_k=0,\\ -\frac{\partial s_j}{\partial t}-\Delta s_j-\left(\frac{\partial}{\partial x_j}s_k\right)v_k-\frac{\partial}{\partial x_k}s_jv_k+\frac{\partial}{\partial x_j}r=0,\\ \operatorname{div}s=\frac{\partial}{\partial x_k}s_k=0\ (j=1,2,3),\quad \int_Q P(t,x)=0,\ \int_Q r(t,x)=0\end{gathered}\tag{16}$$

с условиями Коши

$$v(t,x)|_{t=0}=0,\quad s(t,x)|_{t=a}=0$$

и с периодическими условиями по пространственным переменным для $v=(v_1,v_2,v_3)$, $s=(s_1,s_2,s_3)$, P, r, $\frac{\partial}{\partial x_k}v$, $\frac{\partial}{\partial x_k}s$ $(k=1,2,3)$ было только нулевым.

Доказательство теоремы 2$'$. Если $(u(t,x),P(t,x))$ — решение задачи (7)–(9), то $u(t,x)$ будет решением задачи (10), так как, действуя на систему (7) (при этом учитывая (8) и (9)) проектором $K=[E+\operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}]$, получаем (10). Обратно, если $u(t,x)$ — решение (10), которое может быть записано в виде (14), то, обозначив

$$P(t,x)=c(t)+(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}(u,\nabla)u-(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}f,\tag{17}$$

где $c(t)$ — произвольная функция от времени, вместо (10) получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u+(u,\nabla)u+\operatorname{grad}P=f,\quad u|_{t=0}=0.$$

В (17) оператор $(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}$ понимается как замыкание операции $(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}$, первоначально определенной на тригонометрических полиномах.

Уравнение $\operatorname{div}u=0$, а также периодические граничные условия на u и P по пространственным переменным вытекают из представимости u в виде (14) и определения операции $(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}$. Следовательно, задача (7)–(9) эквивалентна задаче (10) в классе вектор-функций, представимых в виде (14).

Действуя на систему (16) проектором $E+\operatorname{grad}(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}$, учитывая $\operatorname{div}s=\operatorname{div}v=0$ и периодические граничные условия по пространственным переменным, получаем систему (12) и для v и s — представление вида (14). Таким образом, из (16) следует (12). Обратно, из (12) вытекает (16). Действительно, обозначив

$$P(t,x)=c_1(t)+(-\widetilde{\Delta})^{-1}\operatorname{div}(v,\nabla)v,$$

$$r(t,x) = c_2(t) + (-\widetilde{\Delta})^{-1} \operatorname{div}\left[(v,\nabla)s + \sum_{i=1}^{3} s_i \operatorname{grad} v_i\right],$$

из системы (12) получаем систему (16). Уравнение $\operatorname{div} s = \operatorname{div} v = 0$, а также периодичность s, v и r по пространственным переменным вытекают из представимости s и v в виде (14). Мы доказали, что системы (16) и (12) эквивалентны. Поэтому, так как задача (10) и задача (7)–(9) эквивалентны, теорема $2'$ есть следствие теоремы 2.

Если краевые условия не периодические, а скажем, выполняются условия «прилипания», то переход к абстрактной записи затруднен. Трудности связаны с неперестановочностью резольвенты оператора Лапласа и операций дифференцирования по пространственным переменным. Тем не менее такой переход возможен, если воспользоваться, например, результатами работ В. А. Солонникова из [7, 8].

Нетрудно показать, что классическое (сильное) решение задачи (16) будет только нулевым, но в теореме $2'$ речь идет об обобщенном решении. Поэтому теорема $2'$ не решает известной проблемы о сильной разрешимости, а сводит ее к другой проблеме.

Замечание 3. Для системы уравнений Навье — Стокса при $t = 0$ можно задавать ненулевые начальные условия Коши. Тогда проблема сильной разрешимости в целом становится более общей, чем рассмотренная нами, но благодаря теореме существования в малом легко сводится к случаю, когда начальные условия Коши равны нулю. Покажем это для абстрактной задачи (1). Пусть $\varphi(t)$ — бесконечно гладкая функция такая, что $\varphi(t) = 0$ при $0 \le t < \varepsilon$ и $\varphi(t) = 1$ при $t \ge 2\varepsilon$, где ε — малое число. Допустим, что задача (1) из [1] имеет решение $u(t)$ на $(0, 4\varepsilon)$ такое, что $|B(u,u)|_H, |u' + Au|_H \in L_2(0, 4\varepsilon)$. Положим $v = \varphi(t)u(t)$. Для $v(t)$ получим $v(0) = 0$ и

$$v' + Av + B(v,v) = \begin{cases} (\varphi u)' + A\varphi u + \varphi^2 B(u,u) & \text{при } 0 < t \le 2\varepsilon, \\ f(t) & \text{при } t > 2\varepsilon. \end{cases}$$

Поэтому общий случай сведен к частному.

Замечание 4. Если известно, что задача типа (∗) из замечания 3.1 в [1] не сильно разрешима в целом, то теоремы типа A дают существование решения системы типа (4) или ($4'$) из [1]. Такое применение теорем типа A даже в конечномерном случае полезно. Применяя теорему 1 к скалярному уравнению $y' + y^2 = f(t)$, $y(0) = 0$, получаем существование обобщенного решения краевой задачи ($4''$) из [1].

Краткое содержание этой работы содержится в [9] (см. также [10]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н.* Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 3. С. 620–634.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1972.
3. *Лизоркин П. И.* Обобщенные лиувиллевские дифференцирования и функциональные пространства. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 325–353.
4. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
5. *Нурсултанов Е. Д.* Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 1. С. 22–25.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

7. *Солонников В. А.* Оценки решений нестационарной линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1964. Т. 70. С. 213–317.
8. *Солонников В. А.* О дифференциальных свойствах решений первой краевой задачи для нестационарной системы уравнений Навье — Стокса // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1964. Т. 73. С. 221–291.
9. *Отелбаев М., Дурмагамбетов А. А., Сейткулов Е. Н.* Условия существования сильного решения в целом одного класса нелинейных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. РАН. 2006. Т. 408, № 4. С. 446–449.
10. *Отелбаев М.* О свойствах одного класса уравнений типа Навье — Стокса // Российско-Казахстанский симпозиум. Нальчик: Эльбрус, 2004. С. 140–145.

Статья поступила 26 декабря 2006 г., окончательный вариант — 6 августа 2007 г.

Отелбаев Мухтарбай, Дурмагамбетов Асет Асхатбекович,
Сейткулов Ержан Нураханович
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 7, Астана 010010, Казахстан
otelbayev_m@rambler.ru, aset.durmagambetov@gmail.com, erj@mail.ru