Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 512.5

О НОРМАЛЬНЫХ ИДЕАЛАХ КОЛЕЦ СО СВОЙСТВОМ ЗАМЕНЫ

Д. Лу, Т. У

Аннотация. Идеал I кольца R называют *нормальным* идеалом в R, если все идемпотенты из I лежат в центре R. Доказано, что если I — нормальный идеал кольца со свойством замены R, то равносильны следующие утверждения: (1) R и R/I имеют одинаковый радиус устойчивости; (2) $V(I)$ — порядковый идеал моноида $C(\mathrm{Specc}(R), \mathrm{N})$, где $\mathrm{Specc}(R)$ состоит из всех первичных идеалов P таких, что R/P локален.

Ключевые слова: кольцо со свойством замены, нормаль, $\mathrm{specc}(R)$, моноид, порядковый идеал.

Введение

Все рассматриваемые кольца ассоциативны и с единицей и все модули правые унитальные. Напомним, что кольцо R называют кольцом *со свойством замены*, если правый (или, что равносильно, левый) R-модуль R обладает введенным в [1] свойством замены. Согласно [2] кольцо R является кольцом со свойством замены тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих условий: идемпотенты по модулю каждого левого (правого) идеала могут быть подняты; $R/J(R)$ является кольцом с условием замены и идемпотенты по модулю $J(R)$ могут быть подняты, где $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R. Более того, модуль обладает свойством конечной замены тогда и только тогда, когда его кольцо эндоморфизмов является кольцом со свойством замены. Класс колец со свойством замены довольно широк. Он включает регулярные кольца по фон Нейману, чистые кольца, полуартиновы кольца [3], C^*-алгебры с нулевым вещественным рангом [3] и т. д. Этот класс замкнут относительно перехода к фактор-кольцам, матричным кольцам и компонентам разложения Пирса. Подробное описание свойства замены можно найти в [4].

В [5] изучены нормальные кольца со свойством замены, в которых кольцо (или идеал) называют *нормальным*, если все их идемпотенты центральны. Так как каждый первичный фактор нормального кольца со свойством замены локален, в [5] показано, что если R — нормальное кольцо со свойством замены, то закон сокращения и свойство единственности n-го корня выполнены в категории $\mathrm{FP}(R)$ и группа Гротендика $K_0(R)$ кольца R вполне определяется непрерывными отображениями из простого спектра R в Z. Имея в виду это замечание, мы обобщим указанные результаты на нормальные идеалы колец

This research is supported by National Natural Science Foundation of China (N 10671122), partly by Collegial Natural Science Research Program of Education Department of Jiangsu Province (N 07KJD110179) and partly by Natural Science Foundation of Shanghai (N 06ZR14049).

со свойством замены и установим некоторые новые. Мы докажем, что если I — нормальный идеал кольца со свойством замены, то свойство сокращения и единственность n-х корней выполнены в категории $\mathrm{FP}(I)$ и, более того, кольцо R имеет радиус устойчивости не менее чем n тогда и только тогда, когда R/I имеет радиус устойчивости, не меньший чем n. Кроме того, мы представим моноид $V(I)$ следующим образом: $V(I)$ вложен как порядковый идеал $C(\mathrm{Specc}(R), N)$, где $\mathrm{Specc}(R)$ состоит из всех простых идеалов P таких, что R/P локален и $C(\mathrm{Specc}(R), N)$ является множеством всех непрерывных отображений из $\mathrm{Specc}(R)$ с топологией Зариского в множество N неотрицательных целых чисел с дискретной топологией.

Приведем некоторые утверждения о нормальных идеалах колец со свойством замены. Напомним [6, гл. 7], что *индекс нильпотентного элемента* x — это наименьшее натуральное n такое, что $x^n = 0$, и *индекс двустороннего идеала* J — это точная верхняя граница индексов всех нильпотентных элементов J. Если индекс J конечен, то говорят, что J *с конечным индексом*. Легко доказать, что каждый идеал с индексом 1 нормален (об обратном утверждении см. замечание после леммы 2.1). Кроме того, согласно [6, следствие 7.8] сумма всех нормальных идеалов регулярного кольца нормальна, так что каждое регулярное кольцо имеет наибольший нормальный идеал.

Если R — кольцо и I — идеал в R, то будем использовать обозначение $\mathrm{FP}(R)$ для семейства всех конечно-порожденных правых проективных R-модулей и $\mathrm{FP}(I)$ для семейства проективных модулей $P \in \mathrm{FP}(R)$ таких, что $P = PI$. Обозначим через $V(R)$ (соответственно $V(I)$) множество классов изоморфизма из $\mathrm{FP}(R)$ (соответственно $\mathrm{FP}(I)$). Если A, B — правые R-модули и n — кардинал, то обозначение $A \lesssim^{\oplus} B$ (соответственно nA) означает, что A изоморфно слагаемому из B (соответственно прямой сумме n экземпляров A). Согласно [5, следствие 2.2] если I — идеал кольца со свойством замены R, то для любых $P_1, P_2 \in \mathrm{FP}(R)$ найдется полное множество ортогональных идемпотентов $e_1, e_2, \dots, e_n$ и целых $t_{ij} \geq 0$ такое, что $P_i \cong \bigoplus_{j=1}^{n} t_{ij}(e_j R)$ для $i = 1, 2$. Более того, если $P_i \in \mathrm{FP}(I)$, то из $e_j \notin I$ вытекает $t_{ij} = 0$ для любого i.

1. Свойство сокращения

В этом разделе мы изучим свойство сокращения на $\mathrm{FP}(I)$ и $\mathrm{FP}(R)$. Сначала напомним некоторые факты о *локальных* кольцах.

(1) Кольцо со свойством замены локально тогда и только тогда, когда оно не содержит собственных идемпотентов [7].

(2) Каждое локальное кольцо имеет инвариантное базисное число, и каждый конечно-порожденный проективный модуль над локальным кольцом свободен [8, с. 33].

Лемма 1.1. *Пусть R — кольцо со свойством замены и P — первичный идеал в R. Тогда R/P является локальным кольцом в том и только в том случае, если $eR(1-e) \subseteq P$ для любого $e = e^2 \in R$.*

Доказательство. Если $\overline{R} = R/P$ локально, то для любого $e = e^2 \in R$ либо $\bar{e} = 0$, либо $1 - \bar{e} = 0$, так что $\bar{e}\overline{R}(1-\bar{e}) = 0$, т. е. $eR(1-e) \subseteq P$. Обратно, пусть f — идемпотент в R/P. Тогда найдется идемпотент $e \in R$ такой, что $f = \bar{e}$, тем самым $f\overline{R}(1-f) = \bar{e}\overline{R}(1-\bar{e}) = 0$. Поскольку $\overline{R}$ первично, имеем $f = 0$ или $1 - f = 0$. Следовательно, R/P не содержит собственных идемпотентов. □

В дальнейшем мы используем символ $\mathrm{Specc}(R)$ для обозначения множества всех первичных идеалов R, удовлетворяющих одному из равносильных условий, указанных в лемме 1.1. Это подпространство в $\mathrm{Spec}(R)$, снабженное топологией Зариского [8]. Понятие $\mathrm{Specc}(R)$ играет основную роль в нашей работе.

Следующая известная лемма (см., например, [9]) позволяет в ряде случаев рассматривать только первичные идеалы.

Лемма 1.2. *Пусть S — мультипликативно замкнутое подмножество в R. Если идеал J в R не пересекается с S, то найдется первичный идеал P такой, что $J \subseteq P$ и $P \cap S = \varnothing$.*

Известно, что $A/AI \cong A \otimes_R R/I$, A — плоский R-модуль (см., например, [10, упражнение 19.1]), так что для любых $A, B \in \mathrm{FP}(R)$ имеем

$$A \oplus B/(A \oplus B)I \cong A/AI \oplus B/BI.$$

Предложение 1.3. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены R. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *Для любых $A \in \mathrm{FP}(I)$ и $B \in \mathrm{FP}(R)$*

$$A \lesssim^{\oplus} B \Leftrightarrow \mathrm{rank}_{R/P}(A/AP) \leq \mathrm{rank}_{R/P}(B/BP)$$

для любого $P \in \mathrm{Specc}(R)$.

(2) *Для любых $A, B \in \mathrm{FP}(I)$*

$$A \cong B \Leftrightarrow \mathrm{rank}_{R/P}(A/AP) = \mathrm{rank}_{R/P}(B/BP)$$

для каждого $P \in \mathrm{Specc}(R)$.

Доказательство. (1) $\Leftarrow$ Существуют полное множество ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$ и неотрицательные целые числа t_i, s_i такие, что

$$A \cong \bigoplus_1^n t_i(e_iR), \quad B \cong \bigoplus_1^n s_i(e_iR),$$

где если $e_i \notin I$, то $t_i = 0$. По лемме 1.2 для любого $e_i \in I$ найдется первичный идеал P такой, что $e_i \notin P$ и $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \in P$. Отсюда $P \in \mathrm{Specc}(R)$. Если $e = e^2 \in R$, то ee_i — идемпотент в I, так что он лежит в центре R. Поскольку $e(e_1 + e_2 + \dots + e_{i-1} + e_{i+1} + \dots + e_n) \in P$, имеем $eR(1-e) \subseteq P$, что и требовалось. Следовательно, $t_i = \mathrm{rank}_{R/P}(A/AP) \leq \mathrm{rank}_{R/P}(B/BP) = s_i$ для $e_i \in I$. Отсюда $t_i \leq s_i$ для любого i, тем самым $A \lesssim^{\oplus} B$. Доказательство $\Rightarrow$ очевидно.

(2) Аналогично (1). $\square$

В [11] дано понятие *радиуса устойчивости один* для идеала регулярного кольца и доказано, что любой идеал I регулярного кольца R имеет радиус устойчивости один тогда и только тогда, когда eRe имеет радиус устойчивости один для любого идемпотента $e \in I$. Здесь мы покажем, что идеал I кольца со свойством замены R имеет радиус устойчивости один, если eRe имеет радиус устойчивости один для любого идемпотента $e \in I$.

Теорема 1.4. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены R. Тогда*

(1) *если $A, B \in \mathrm{FP}(R)$ и $C \in \mathrm{FP}(I)$, то $A \oplus C \cong B \oplus C$ влечет $A \cong B$, в частности, I имеет радиус устойчивости один;*

(2) *если* $A, B \in \mathrm{FP}(I)$ *и* $C \in \mathrm{FP}(R)$, *то из* $A \oplus C \cong B \oplus C$ *следует, что* $A \cong B$.

(3) *если* $A \in \mathrm{FP}(I)$ *и* $C, B, D \in \mathrm{FP}(R)$ *с* $D \lesssim^{\oplus} C$, *то из* $A \oplus C \cong B \oplus D$ *вытекает, что* $A \lesssim^{\oplus} B$;

(4) *если* $A, B \in \mathrm{FP}(I)$, *то* $nA \cong nB$ *для некоторого* n *влечет* $A \cong B$.

Доказательство. (1) Положим $C = \bigoplus(e_iR)$ для любого $e_i = e_i^2 \in I$. Заметим, что $\mathrm{End}(e_iR) = e_iRe_i$ для такого e_i является нормальным кольцом эндоморфизмов со свойством замены, тем самым e_iR обладает свойством сокращения согласно [5, теорема 2.5]. Следовательно, C обладает свойством сокращения.

Утверждения (2)–(4) непосредственно следуют из предложения 1.3. $\square$

Для доказательства основного результата этого раздела нам потребуется утверждение, доказываемое аналогично [6, предложение 2.20].

Предложение 1.5. *Пусть* A, B — *проективные* R*-модули со свойством конечной замены и* J — *идеал такой, что* B/BJ *является гомоморфным образом* A/AJ. *Тогда существуют разложения* $A = A_1 \oplus A_2$ *и* $B = B_1 \oplus B_2$ *такие, что* $A_1 \cong B_1$ *и* $B_2 = B_2J$.

Доказательство. Поскольку A проективен, накрывающий гомоморфизм из A/AJ на B/BJ может быть поднят до отображения f из A в B такого, что $B = f(A) + BJ$. По [2, предложение 2.9] существует разложение $B = B_1 \oplus B_2$ такое, что $B_1 \subseteq f(A)$ и $B_2 \subseteq BJ$. Покажем, что $B_2 = B_2J$. Действительно, для $b \in B_2$ найдутся $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ и $j_1, j_2, \dots, j_n \in J$ такие, что $b = b_1j_1 + b_2j_2 + \dots + b_nj_n$. Для каждого i имеем $b_i = b_{1i} + b_{2i}$, так что $b_{1i} \in B_1, b_{2i} \in B_2$. Тогда $b = b_{21}j_1 + \dots + b_{2n}j_n \in B_2J$.

Пусть $A_1' = f^{-1}(B_1)$. Тогда мы получаем короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \longrightarrow A_1' \longrightarrow B_1 \longrightarrow 0.$$

Так как B_1 проективен, найдется подмодуль $A_1 \subseteq A_1'$ такой, что $A_1 \cong B_1$ и $A_1' = A_1 \oplus \operatorname{Ker} f$. Положим $A_2 = f^{-1}(B_2)$. Непосредственно можно проверить, что $A = A_1 \oplus A_2$. Требуемое разложение получено. $\square$

В [12, пример 1] построены регулярное кольцо R и идеал I в R такие, что I и R/I имеют радиус устойчивости один, однако R имеет радиус устойчивости два. В отличие от этого мы получим следующий результат.

Теорема 1.6. *Пусть* I — *нормальный идеал кольца со свойством замены* R. *Тогда* R *имеет радиус устойчивости не более* n *в том и только в том случае, если* R/I *имеет радиус устойчивости не более* n.

Доказательство. $\Rightarrow$ Эта импликация доказывается непосредственно, и она верна, даже если условие нормальности I отсутствует.

$\Leftarrow$ Предположим, что $nR \oplus A \cong R \oplus B$ для некоторого $A, B \in \mathrm{FP}(R)$. Тогда $n(R/RI) \oplus A/AI \cong R/RI \oplus B/BI$ как R/I-модули и согласно [13, теорема 4] A/AI изоморфно прямому слагаемому в B/BI. Согласно предложению 1.5 существуют разложения $A = A_1 \oplus A_2$ и $B = B_1 \oplus B_2$ такие, что $A_1 \cong B_1$ и $A_2 = A_2I$. Далее, имеем

$$nR \oplus A_1 \oplus A_2 \cong R \oplus B_1 \oplus B_2,$$

и из теоремы 1.4(3) следует, что $A_2 \lesssim^{\oplus} B_2$ и тем самым $A \lesssim^{\oplus} B$. Вновь используя [13, теорема 4], приходим к требуемому. $\square$

Следствие 1.7. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены R. Если R/I имеет радиус устойчивости не более чем n, то для любых $A, B, C \in$ $\mathrm{FP}(R)$ из $A \oplus B \cong A \oplus C$ с $nA \lesssim^{\oplus} B$ вытекает, что $B \cong C$.*

Доказательство. По теореме 1.6 и [14, следствие 1.10] $\mathrm{End}_R(A)$ является кольцом со свойством замены с радиусом устойчивости не более чем n. Пусть D — R-модуль такой, что $B \cong nA \oplus D$. Тогда $(n+1)A \oplus D \cong A \oplus C$. Согласно [15, теорема 3.2] существует $G \in \mathrm{FP}(R)$, для которого $nA \cong A \oplus G$ и $C \cong A \oplus D \oplus G$. Поэтому $B \cong C$. $\square$

2. Моноид $V(I)$

Сначала напомним некоторые определения из [16]. Моноид M называют *коническим*, если $x + y = 0$ для любых $x, y \in M$ только когда $x = y = 0$. Существует естественный предпорядок $\leq$ в M, определяемый соотношением $x \leq y \Leftrightarrow y = x + z$ для некоторого $z \in M$. Подмножество в M называют *порядковым идеалом* в M, если S — подмоноид в M такой, что для любых $x \in M$, $y \in S$ из $x \leq y$ вытекает, что $x \in S$. Для любого идеала I кольца R множество $V(I)$ является порядковым идеалом конического моноида $V(R)$ и группа Гротендика $K_0(R)$ в R — группой Гротендика в $V(R)$ [17]. В случае, когда R — кольцо со свойством замены, имеем $V(R/I) \cong V(R)/V(I)$ [15, предложение 1.4], соответственно $K_0(R/I) = K_0(R)/H$, где H — подгруппа, порожденная образом $V(I)$ в $K_0(R)$. Пусть N — пространство всех неотрицательных целых чисел с дискретной топологией. Тогда множество $C(\mathrm{Specc}(R), N)$ непрерывных отображений из $\mathrm{Specc}(R)$ в N представляет собой конический моноид. В этом разделе мы докажем, что если I — нормальный идеал кольца со свойством замены, то существует инъективный моноидный гомоморфизм из $V(I)$ в $C(\mathrm{Specc}(R), N)$, более того, образ $V(I)$ является порядковым идеалом в $C(\mathrm{Specc}(R), N)$. Легко заметить, что один из основных результатов [5], в котором говорится, что если R — кольцо со свойством замены, то $K_0 R \cong C(\mathrm{Spec}(R), Z)$, является прямым следствием нашего результата.

Идеал $\bigcap \mathrm{Specc}(R)$ будем обозначать через $\mathrm{N}_1(R)$.

Лемма 2.1. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены R. Тогда $\mathrm{N}_1(R) \cap I \subseteq J(R)$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $a \in \mathrm{N}_1(R) \cap I$ не лежит в $J(R)$. Существует ненулевой идемпотент e в aR. Покажем, что $ea^n \neq 0$ для любого n. Пусть $r \in R$ таков, что $e = ar$. Во-первых,

$$(ar)^2 = arar = are = aer = a^2r^2,$$

и индукцией по n получаем, что

$$(ar)^n = a^{n-1}r^{n-1}e = a^{n-1}er^{n-1} = a^n r^n.$$

Тем самым $ea^n = a^{n+1}r \neq 0$ для каждого n, так как $a^{n+1}r^{n+1} = e^{n+1} \neq 0$.

Далее, $a^n \notin (1-e)R$ для любого n, так что $\{a^n \mid n > 0\}$ — мультипликативно замкнутое множество, не включающее $(1-e)R$. По лемме 1.2 найдется первичный P такой, что $(1-e)R \subseteq P$ и $a \notin P$. Как и в доказательстве предложения 1.3, имеем $P \in \mathrm{Specc}(R)$, тем самым $a \notin \mathrm{N}_1(R)$; противоречие. $\square$

Заметим, что любой нормальный идеал полупростого кольца со свойством замены имеет конечный индекс нильпотентности (см. разд. 1), как вытекает из доказательства леммы 2.1.

Предложение 2.2. *Пусть R — полупримитивное кольцо со свойством замены и I — идеал в R. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *R нормально;*

(2) *R/I и I нормальны одновременно.*

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1) Для идемпотента e и $r \in R$ имеем $\bar{e}\bar{r}(\bar{1} - \bar{e}) = 0$, так что $er(1-e) \in I$. Поскольку I имеет индекс не менее чем 1 и $(er(1-e))^2 = 0$, то $er(1-e) = 0$. Поэтому $eR(1-e) = 0$ для любого идемпотента e, и требуемое доказано.

(1) $\Rightarrow$ (2) Очевидно. $\square$

Для любого идеала I в R и $a \in R$ положим

$$\mathrm{U}(a) = \{P \in \mathrm{Specc}(R) : a \notin P\}, \quad \mathrm{U}(I) = \{P \in \mathrm{Specc}(R) : I \nsubseteq P\}.$$

Тогда множества $\mathrm{U}(I) = \bigcup_{a \in I} \mathrm{U}(a)$, где I — идеал в R, удовлетворяют аксиомам для открытых множеств в некоторой топологии на $\mathrm{Specc}(R)$, называемой *топологией Зариского.*

Следующие леммы связаны с открыто-замкнутыми множествами в $\mathrm{Specc}(R)$ и будут полезны в доказательстве основного результата.

Лемма 2.3. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены. Если e — ненулевой идемпотент в I и A — открыто-замкнутое множество, содержащееся в $\mathrm{U}(eR)$, то найдется идемпотент $f \in I$ такой, что $A = \mathrm{U}(fR)$.*

Доказательство. Существует открыто-замкнутое множество B такое, что $\mathrm{U}(eR) = A \dot{\cup} B$. Положим $A = \mathrm{U}(J_1)$, $B = \mathrm{U}(J_2)$ для идеалов J_1, J_2. Можно считать, что $J_1, J_2 \subseteq eR$, заменяя J_i на $J_i \cap eR$, $i = 1, 2$. Покажем, что $J_1 + J_2 = eR$. Действительно, в противном случае найдется первичный идеал $P \in \mathrm{Spec}(R)$ такой, что $J_1 + J_2 \subseteq P$ и $e \notin P$ по лемме 1.2. Поскольку $eR(1-e) = 0 \subseteq P$, имеем $1 - e \in P$ и тем самым ef для некоторого идемпотента $f \in R$ лежит в центре R и $(1-e)f \in P$. Следовательно, $P \in \mathrm{Specc}(R)$ по лемме 1.1; противоречие. Найдем $a \in J_1$ и $b \in J_2$ такие, что $a + b = e$. Так как $A \cap B = \varnothing$, то $a(e-a) \subseteq \mathrm{N}_1(R)$. Заметим, что $a \in eR$, тем самым $\bar{a}$ — идемпотент в $R/\mathrm{N}_1(R)$, поэтому существует идемпотент $f_1 \in R$ такой, что $\bar{a} = \bar{f}_1$. Положим $f = ef_1$. Поскольку $a - f = e(a - f_1) \in \mathrm{N}_1(R)$, имеем

$$\mathrm{U}(f) = \mathrm{U}(a) \subseteq A, \quad \mathrm{U}(e-f) = \mathrm{U}(b) \subseteq B.$$

Учитывая, что $\mathrm{U}(eR) = \mathrm{U}(f) \dot{\cup} \mathrm{U}(e-f)$, получаем требуемое. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены. Если e — ненулевой идемпотент в I и*

$$\mathrm{U}(eR) = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_n,$$

где каждое A_i открыто-замкнуто, то существует набор ортогональных идемпотентов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in eR$ такой, что $e = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ и $A_i = \mathrm{U}(f_i)$ для каждого i.

Доказательство. По лемме 2.3 найдется идемпотент $f_i \in eR$ такой, что $A_i = \mathrm{U}(f_i)$ для любого i. Для каждой пары $i \neq j$ ввиду $\mathrm{U}(f_i) \cap \mathrm{U}(f_j) = \varnothing$ имеем $f_i f_j \in \mathrm{N}_1(R)$, тем самым $f_i f_j = 0$ по лемме 2.1. Остальное очевидно. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть I — нормальный идеал кольца со свойством замены. Тогда моноид $V(I)$ вложен как порядковый идеал в $C(\mathrm{Specc}(R), N)$.*

Доказательство. Для $[A] \in V(I)$ определим $\phi_A : \mathrm{Specc}(R) \to N$, полагая

$$\phi_A(P) = \mathrm{rank}_{R/P}(A/AP)$$

для каждого $P \in \mathrm{Specc}(R)$. Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ — полное множество ортогональных идемпотентов такое, что $A \cong \bigoplus\limits_1^n t_i(e_i R)$. Для доказательства непрерывности ϕ_A обозначим через g_m сумму e_i с $t_i = m$. Тогда $g_0, g_1, \dots, g_k$ — полное множество ортогональных идемпотентов такое, что $A \cong \bigoplus\limits_0^k t_j(g_j R)$, более того, $g_j \in I$ для $j > 0$, потому что $A \in \mathrm{FP}(I)$. Заметив, что

$$\phi_A^{-1}(m) = \{P \in \mathrm{Specc}(R) \mid g_m \notin P\} = \mathrm{U}(g_m)$$

для любого $m \in N$, получаем, что ϕ_A непрерывно. Согласно предложению 1.3 отображение

$$F : V(I) \to C(\mathrm{Specc}(R), N),$$

определенное равенством $F([A]) = \phi_A$, является инъективным моноидным морфизмом.

Для $\phi \in C(\mathrm{Specc}(R), \mathrm{N})$ такого, что $\phi \leq \phi_A$, и для $A \in \mathrm{FP}(I)$ покажем, что существует $B \in \mathrm{FP}(I)$, для которого $\phi = \phi_B$. Пусть $e_0, e_1, \dots, e_n$ — полное множество ортогональных идемпотентов в R такое, что $A = \bigoplus\limits_0^n t_i(e_i R)$. Очевидно, если $i > 0$, то $e_i \in I$. Для фиксированного $i > 0$ имеем $\phi(P) \leq i$ для всех $P \in \mathrm{U}(e_i)$. Допустим, что $\phi(\mathrm{U}(e_i)) = \{k_{i,1}, k_{i,2}, \dots, k_{i,n_i}\}$. Тогда

$$\mathrm{U}(e_i) = \dot{\bigcup_{j=1}^{n_i}} (\phi^{-1}(k_{i,j}) \cap \mathrm{U}(e_i))$$

и по лемме 2.4 существует набор ортогональных идемпотентов $e_{i,1}, e_{i,2}, \dots, e_{i,n_i}$ такой, что

$$\phi^{-1}(k_{i,j}) \cap \mathrm{U}(e_i) = \mathrm{U}(e_{i,j})$$

и $\sum e_{ij} = e_i$. Положим

$$B \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n_i} k_{i,j}(e_{i,j} R).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $\phi = \phi_B$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Crawley P., Jónsson B.* Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems // Pacific J. Math. 1964. V. 14. P. 797–855.
2. *Nicholson W. K.* Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 229. P. 269–287.
3. *Ara P.* Extensions of exchange rings // J. Algebra. 1997. V. 197, N 2. P. 409–423.
4. *Tuganbaev A. A.* Rings and modules with exchange properties // J. Math. Sci. 2002. V. 110, N 1. P. 2348–2421.
5. *Wu T. S., Tong W. T.* Finitely generated projective modules over exchange rings // Manuscripta Math. 1995. V. 86, N 2. P. 149–157.
6. *Goodearl K. R.* Von Neumann regular rings. Malabar, Florida: Krieger Publ. Comp., 1991.

7. *Warfield R. B.* A Krull–Schmidt theorem for infinite sums of modules // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. P. 460–465.

8. *Silvester J. R.* Introduction to algebraic K-theory. London; New York: Chapman and Hall, 1981.

9. *Faith C.* Algebra I: Rings, modules and categories. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1981. (Grundl. der Math. Wiss.; V 190).

10. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. New York: Springer-Verl., 1973.

11. *Lu D. C., Li Q. Sh., Tong W. T.* Comparability, stability, and completions of ideals // Comm. Algebra. 2004. V. 32, N 7. P. 2617–2634.

12. *Menal P., Moncasi J.* On regular rings with stable range 2 // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 24. P. 25–40.

13. *Wu T. S., Xu Y. H.* On the stable range condition of exchange rings // Comm. Algebra. 1997. V. 25, N 7. P. 2355–2363.

14. *Warfield R. B.* Cancellation of modules and groups and stable range of endomorphism rings // Pacific J. Math. 1980. V. 91. P. 457–485.

15. *Ara P., Goodearl K. R., O'Meara K. C., Pardo E.* Separative cancellation for projective modules over exchange rings // Israel J. Math. 1998. V. 105. P. 105–137.

16. *Pardo E.* Comparability, separativity, and exchange rings // Comm. Algebra. 1996. V. 24, N 9. P. 2915–2929.

17. *Rosenberg J.* Algebraic K-theory and its applications. New York: Springer-Verl., 1994.

Статья поступила 8 ноября 2006 г.

Lu Dancheng (Лу Даньчэн)
Department of Mathematics
Suzhou University
Suzhou 215006, P. R. China
ludancheng@yahoo.com.cn

Wu Tongsuo (У Тунсо)
Department of Mathematics
Shanghai Jiaotong University
Shanghai 200030, P. R. China
tswu@sjtu.edu.cn