Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 515.12

О НАСЛЕДСТВЕННОЙ НОРМАЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ВИДА $\mathscr{F}(X)$

А. В. Иванов, Е. В. Кашуба

Аннотация. В предположении CH построен пример неметризуемого компакта X, который обладает следующими свойствами:

1) X^n наследственно сепарабельно для любого $n \in \mathbb{N}$;

2) $X^n \setminus \Delta_n$ совершенно нормально для любого $n \in \mathbb{N}$ (Δ_n — обобщенная диагональ X^n, т. е. множество точек, у которых хотя бы две координаты совпадают);

3) для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathscr{F}$ пространство $\mathscr{F}_k(X)$ наследственно нормально, где k — второй по величине элемент степенного спектра функтора $\mathscr{F}$ (в частности, наследственно нормальны X^2 и $\lambda_3 X$).

Пример компакта X является усилением принадлежащего Грюнхаге известного примера неметризуемого компакта, имеющего наследственно нормальный и наследственно сепарабельный квадрат.

Ключевые слова: полунормальный функтор, проблема Катетова, наследственная нормальность, совершенная нормальность, наследственная сепарабельность.

Классическая теорема Катетова [1] утверждает, что если для компакта X пространство X^3 наследственно нормально, то X метризуем. В. В. Федорчук[2] доказал обобщение этой теоремы для произвольного нормального функтора $\mathscr{F}$, действующего в категории Comp компактов и непрерывных отображений: если степень $\mathscr{F}$ не меньше 3 и $\mathscr{F}_3(X)$ наследственно нормально, то X метризуемо (все необходимые определения, касающиеся функторов, приведены ниже). Как заметил Т. Ф. Жураев [3], требование наследственной нормальности $\mathscr{F}_3(X)$ в теореме Федорчука можно ослабить до требования наследственной нормальности $\mathscr{F}_3(X)\setminus X$ (в теореме Катетова для метризуемости X достаточно наследственной нормальности $X^3 \setminus \Delta$). В дальнейшем А. П. Комбаров [4] показал, что условие наследственной нормальности пространства $\mathscr{F}_3(X)\setminus X$ можно ослабить до условия σ-компакт-нормальности. Задача распространения теоремы Федорчука на более широкие классы ковариантных функторов $\mathscr{F} : \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ приводит к необходимости рассмотрения степенного спектра $\mathrm{sp}(\mathscr{F})$ функтора $\mathscr{F}$, который определяется как множество степеней точек пространств вида $\mathscr{F}(X)$ [5]. В работе [6] показано, что если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, удовлетворяющий некоторому комбинаторному условию, и $\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{1, k, n, \dots\}$, то наследственная нормальность $\mathscr{F}_n(X) \setminus X$ влечет метризуемость X (здесь n — третий по величине элемент $\mathrm{sp}(\mathscr{F})$ (см. также [7]).

Катетов сформулировал следующий вопрос: верно ли, что из наследственной нормальности X^2 следует метризуемость компакта X? В настоящее время известно, что этот вопрос неразрешим в ZFC. В частности, Грюнхаге [8] в предположении континуум-гипотезы CH построил пример неметризуемого компакта Y, для которого Y^2 наследственно сепарабельно, $Y^2 \setminus \Delta$ совершенно нормально и Y^2 наследственно нормально. Для полунормальных функторов вопрос Катетова имеет следующий аналог: верно ли, что из наследственной нормальности $\mathscr{F}_k(X)$ следует метризуемость X? (Здесь k — второй по величине элемент степенного спектра $\mathscr{F}$.) Заметим, что в [9] объявлено о «наивном» положительном решении этого вопроса для функтора суперрасширения λ.

Основным результатом данной работы является построенный в предположении CH пример неметризуемого компакта X, который обладает перечисленными в аннотации свойствами 1–3.

Пример компакта X является усилением примера Грюнхаге. Из свойств X следует существование счетного набора неметризуемых совершенно нормальных компактов, произведение которых совершенно нормально и наследственно сепарабельно. Ранее такой пример был известен лишь в предположении принципа Йенсена $\diamondsuit$ [10]. Отметим, что X является совершенно нормальным компактом, счетная степень которого наследственно сепарабельна. Ясно также, что X является контрпримером к отмеченному выше утверждению о функторе суперрасширения λ.

Для построения компакта X используется техника вполне замкнутых отображений В. В. Федорчука [11] и развитые в [10, 12] методы применения этой техники для построения произведений с заданными свойствами. Идея использования лузинского множества для получения наследственной нормальности заимствована из [8].

В дальнейшем мы рассматриваем только компактные хаусдорфовы пространства. Все отображения непрерывны. Через $[A]$ обозначается замыкание множества $A \subset X$, через $f^\sharp(A)$ — малый образ множества A при отображении $f : X \to Y$.

Напомним необходимые определения, касающиеся ковариантных функторов в категории Comp. Функтор $\mathscr{F}$ называется *мономорфным*, если для любого вложения $i : Y \to X$ отображение $\mathscr{F}(i) : \mathscr{F}(Y) \to \mathscr{F}(X)$ также является вложением. Для мономорфного функтора $\mathscr{F}$ и замкнутого подмножества $Y \subset X$ пространство $\mathscr{F}(Y)$ естественно отождествляется с подпространством $\mathscr{F}(i)(\mathscr{F}(Y))$ пространства $\mathscr{F}(X)$.

Мономорфный функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет пересечения*, если для любого компакта X и любой системы $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ замкнутых подмножеств X имеет место равенство

$$\mathscr{F}\left(\bigcap\{Y_\alpha : \alpha \in A\}\right) = \bigcap\{\mathscr{F}(Y_\alpha) : \alpha \in A\}.$$

Если $\mathscr{F}$ — мономорфный функтор, то для любой точки $a \in \mathscr{F}(x)$ определен *носитель* $\operatorname{supp}(a)$ следующим образом:

$$\operatorname{supp}(a) = \bigcap\{Y \subset X : a \in \mathscr{F}(Y)\}.$$

Для любого натурального n положим

$$\mathscr{F}_n(X) = \{a \in \mathscr{F}(X) : |\operatorname{supp}(a)| \le n\}.$$

Если $\mathscr{F}$ — мономорфный сохраняющий пересечения функтор, то подпространство $\mathscr{F}_n(X)$ замкнуто в $\mathscr{F}(X)$ для любого X и любого n. Более того, соответствие $X \to \mathscr{F}_n(X)$ однозначно определяет подфунктор $\mathscr{F}_n$ функтора $\mathscr{F}$ (см. [13]).

Функтор $\mathscr{F}$ называется *непрерывным*, если он перестановочен с операцией перехода к пределу обратного спектра. Непрерывный мономорфный сохраняющий пересечения функтор называется *полунормальным*, если он сохраняет точку и пустое множество [13]. Если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, то для любого натурального n функтор $\mathscr{F}_n$ также полунормален. При этом $\mathscr{F}_1(X) = X$ и мы можем считать X подпространством $\mathscr{F}(X)$. Если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор и $f : X \to Y$, то $f(\operatorname{supp}(a)) \supset \operatorname{supp}(\mathscr{F}(f)(a))$ для любого $a \in \mathscr{F}(X)$ (см. [13]).

Функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет прообразы*, если для любого отображения $f : X \to Y$ и любого $A \subset Y$

$$(\mathscr{F}(f))^{-1}\mathscr{F}(A) = \mathscr{F}(f^{-1}A).$$

Функтор $\mathscr{F}$ называется *эпиморфным*, если он сохраняет эпиморфизмы. Функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет вес*, если $w(X) = w(\mathscr{F}(X))$ для любого бесконечного X. Полунормальный эпиморфный функтор $\mathscr{F}$, сохраняющий вес и прообразы, называется *нормальным* [14]. Функтор возведения компакта в степень n является нормальным функтором.

Следующая ниже конструкция отображения π_n предложена в [15]. В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, \dots, n-1\}$. Отображение

$$\pi_n : X^n \times \mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}(X)$$

определяется равенством $\pi_n(x, \xi) = \mathscr{F}(x)(\xi)$, в котором каждая точка $x \in X^n$ отождествляется с отображением $x : n \to X$. Для любого непрерывного функтора $\mathscr{F}$ и любого компакта X отображение π_n непрерывно [15]. Как показано в [13], для полунормального функтора $\mathscr{F}$ будет $\operatorname{Im}\pi_n = \mathscr{F}_n(X)$. Следуя [13], для каждого $n \geq 2$ введем обозначения:

$$\mathscr{F}_{nn}(X) = \mathscr{F}_n(X) \setminus \mathscr{F}_{n-1}(X), \quad \Pi_n(X) = \pi_n^{-1}(\mathscr{F}_{nn}(X)),$$

Степенным спектром $\mathscr{F}$ называется [5] множество

$$\operatorname{sp}(\mathscr{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_{kk}(k) \neq \varnothing\}.$$

Очевидно, что степенной спектр любого полунормального функтора содержит 1. В [5] показано, что для любого подмножества $K \subset \mathbb{N}$ ($1 \in K$) существует функтор $\exp^K$, удовлетворяющий всем условиям нормальности, кроме сохранения прообразов, для которого $\operatorname{sp}(\exp^K) = K$. Степенной спектр нормального функтора либо равен $\mathbb{N}$, либо совпадает с начальным отрезком натурального ряда.

Будем говорить, что полунормальный функтор $\mathscr{F}$ *сохраняет точки взаимной однозначности*, если для любого отображения $f : X \to Y$ и любой точки $y \in Y$ такой, что $|f^{-1}(y)| = 1$, отображение $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ также взаимно однозначно в точке $y \in Y \subset \mathscr{F}(Y) : |(\mathscr{F}(f))^{-1}y| = 1$. Если функтор сохраняет прообразы, то он сохраняет точки взаимной однозначности. Суперрасширение λ является примером функтора, который не сохраняет прообразы, но сохраняет точки взаимной однозначности. Упомянутый выше функтор $\exp^K$ из [5] не сохраняет точки взаимной однозначности при $K = \{1, 3\}$.

Для построения основного примера используем конструкцию $B(X, Y_x, h_x)$ В. В. Федорчука [11] (в зарубежной литературе эта конструкция известна под названием *resolution*). Пусть X и Y_x ($x \in X$) — компакты и $h_x : X \setminus \{x\} \to Y_x$ — непрерывные отображения. Тогда пространство $B\{X, Y_x, h_x\}$ есть дискретное объединение $\bigoplus Y_x$ «слоев» Y_x с топологией, открытую базу которой образуют множества вида

$$O(x, U, V) = V \cup \pi^{-1}\big(h_x^{-1}V \cap U\big),$$

где $x \in X$, U — окрестность точки x в X, V — открытое подмножество Y_x, а $\pi : B \to X$ — естественная проекция, определяемая формулой $\pi(y) = x$ при $y \in Y_x$. Известно, что для любых компактов X, Y_x и любых непрерывных отображений h_x пространство B является хаусдорфовым компактом. Отображение π всегда непрерывно. Если $x_0 \in X$ и для всех $x \neq x_0$ множество Y_x состоит из одной точки, то пространство B будем обозначать так:

$$B = B\{X, Y_{x_0}, h_{x_0} \mid x_0 \text{ фиксировано}\}$$

(в этом случае нет необходимости описывать отображения h_x при $x \neq x_0$ — они определены однозначно).

Теорема 1 (CH). *Существует неметризуемый компакт X такой, что*

1) X^n *наследственно сепарабельно для любого* $n \in \mathbb{N}$*;*

2) *если F — замкнутое подмножество X^n и $[F \setminus \Delta_n] = F$, то F — G_δ-множество в X;*

3) $X^n \setminus \Delta_n$ *совершенно нормально;*

4) *для любого сохраняющего вес полунормального функтора $\mathscr{F}$ и любого $n \in \mathrm{sp}(\mathscr{F})$ пространство $\mathscr{F}_n(X)$ наследственно сепарабельно и $\mathscr{F}_{nn}(X)$ совершенно нормально;*

5) *для любого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности полунормального функтора $\mathscr{F}$ со степенным спектром $\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{1, k, \dots\}$ пространство $\mathscr{F}_k(X)$ наследственно нормально (в частности, наследственно нормальны X^2 и $\lambda_3 X$).*

Доказательство. Пусть A — некоторое множество и $E \subset A^n$, $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что E *лежит в общем положении в* A^n, если каждая проекция $p_i : A^n \to A$ произведения на i-й сомножитель ($i = 1, \dots, n$) взаимно однозначна на E и $p_i E \cap p_j E = \varnothing$ при $i \neq j$ (другими словами, все координаты всех точек E различны).

Лемма. *Пусть $f : X \to Y$ — отображение множества X на нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек Y, при котором лишь одна точка $a \in Y$ имеет нетривиальный прообраз, причем $|f^{-1}(a)| = 2$. Пусть $\{E_k : k \in \mathbb{N}\}$ — счетное семейство множеств такое, что E_k для любого k лежит в общем положении в некотором Y^{n_k} ($n_k \in \mathbb{N}$) и координаты всех точек E_k отличны от a. Тогда можно определить топологию на X так, что*

1) *X — нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек;*

2) *отображение f непрерывно и неприводимо;*

3) $[(f^{n_k})^{-1} E_k] = (f^{n_k})^{-1}[E_k]$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$[1)].

Доказательство леммы. Положим

$$G^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} = \{y = (y_1, \dots, y_{n_k}) \in Y^{n_k} : y_i = a \Leftrightarrow i \in \{j_1, \dots, j_m\}\},$$

где $j_1, \dots, j_m$ — различные натуральные числа, не превосходящие n_k, и $1 \leq m \leq n_k$. Заметим, что всегда $G^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} \cap E_k = \varnothing$.

В каждом множестве $G^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} \cap [E_k]$ выберем счетное плотное в нем подмножество $D^{(k)}_{j_1,\dots,j_m}$ и положим

$$D = \bigoplus \bigl\{ D^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} : k \in \mathbb{N},\ 1 \leq m \leq n_k,\ j_i \leq n_k,\ j_i \neq j_l \text{ при } i \neq l \bigr\}.$$

[1)] $f^n : X^n \to Y^n$ — произведение отображений $f : X \to Y$.

Точки D занумеруем натуральными числами: $D = \{d^i\}$. Каждая точка d^i из D лежит ровно в одном множестве $D^{(k)}_{j_1,\dots,j_m}$, индексы которого зависят от $i : k = k(i)$, $m = m(i)$, $j_l = j^i_l$, $l = 1, \dots, m(i)$. (Заметим, что $j^i_1, \dots, j^i_{m(i)}$ — это номера координат точки d^i, которые равны a.) По построению

$$D^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} \subset G^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} \cap [E_k].$$

Поэтому для каждого i в $E_{k(i)}$ существует последовательность C_i, сходящаяся к d^i. Положим

$$H = \bigcup_i \bigcup_{l=1}^{m(i)} p_{j^i_l} C_i.$$

Покажем, что можно выбрать подпоследовательности $C'_i \subset C_i$ так, что множество H (если оно непусто)[2)] будет последовательностью, сходящейся к a, и при этом $p_{j^i_l} C'_i \cap p_{j^{i'}_{l'}} C'_{i'} = \varnothing$ при $i \neq i'$ и любых l, l' таких, что $1 \le l \le m(i)$, $1 \le l' \le m(i')$. Все проекции $p_{j^i_l}$ взаимно однозначны на C_i, так как $C_i \subset E_{k(i)}$ и $E_{k(i)}$ лежит в общем положении в Y^{n_k}. Следовательно, множества $p_{j^i_l} C_i$ являются последовательностями, сходящимися к a. Пусть $\{O_n\}$ — открытая счетная база в точке a в Y такая, что $O_{n+1} \subset O_n$ для любого n. Обозначим через P биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^2$. Пусть $P(i) = (u(i), g(i))$, $i \in \mathbb{N}$.

Теперь построим подпоследовательности $C'_i \subset C_i$ по рекурсии. В последовательности $C_{g(1)}$ возьмем точку c^1 такую, что

$$\bigcup_{l=1}^{m(g(1))} \{p_{j^{g(1)}_l} c^1\} \subset O_1.$$

Предположим, что в последовательностях $C_{g(i)}$, $i \le n-1$, уже выбраны точки c^i так, что выполняется условие:

(A_{n-1}) $\bigcup_{l=1}^{m(g(i))} \{p_{j^{g(i)}_l} c^i\} \subset O_i$ при $i \le n-1$ и все точки вида $p_{j^{g(i)}_l} c^i$ ($i \le n-1$, $1 \le l \le m(g(i))$) попарно различны.

Пусть

$$O = O_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \bigcup_{l=1}^{m(g(i))} \{p_{j^{g(i)}_l} c^i\}.$$

Возьмем в последовательности $C_{g(n)}$ точку c^n так, что

$$\bigcup_{l=1}^{m(g(n))} \{p_{j^{g(n)}_l} c^n\} \subset O.$$

Условие (A_n) при этом будет выполнено.

Продолжая рекурсию, получим искомые бесконечные подпоследовательности $C'_i = \{c^k : k \in g^{-1}(i)\} \subset C_i$ выбранных точек. Для упрощения символики будем обозначать эти подпоследовательности также через C_i.

Итак, в силу условия (A_n) H есть последовательность, сходящаяся к a.

[2)] Мы не исключаем, что D может оказаться конечным и даже пустым.

Зафиксируем нумерацию точек каждой последовательности C_i: $C_i = \{x^i_k : k < \omega\}$. Тем самым мы также зафиксируем нумерацию в каждой проекции C_i в Y. Для каждого n выберем биекцию

$$b_n : \{0, \dots, 2^n - 1\} \to \prod_{i=1}^{n} \{0, 1\}_i,$$

и пусть

$$t_k : \prod_{i=1}^{n} \{0, 1\}_i \to \{0, 1\}_k$$

— проекция произведения двоеточий на k-й сомножитель.

Определим теперь отображение $h : H \to \{0, 1\}$ следующим образом. Пусть x^i_k — точка из C_i. Положим

$$h\bigl(p_{j^i_l}(x^i_k)\bigr) = t_l(b_{m(i)}(k(\operatorname{mod} 2^{m(i)}))).$$

Легко проверить, что отображение h корректно определено и непрерывно на множестве H. Поскольку Y — нульмерный метризуемый компакт и H — последовательность, сходящаяся к точке a, отображение $h : H \to \{0, 1\}$ может быть продолжено до непрерывного отображения $h_a : Y \setminus \{a\} \to \{0, 1\}$. (Если $H = \varnothing$, то в качестве $h_a : Y \setminus \{a\} \to \{0, 1\}$ возьмем любое непрерывное отображение, удовлетворяющее условию $\bigl[h_a^{-1}(0)\bigr]_Y \cap \bigl[h_a^{-1}(1)\bigr]_Y = \{a\}$.)

Положим, наконец,

$$X = B\{Y, \{0, 1\}_a, h_a : a \text{ фиксировано}\}.$$

При этом отображение $f : X \to Y$ мы отождествляем с проекцией π пространства B на Y, а прообраз $f^{-1}(a)$ точки a — с двоеточием $\{0, 1\}_a$. Из свойств конструкции B сразу следует (см. [11]), что X — нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек и отображение f непрерывно и неприводимо.

Проверим выполнение условия 3. Пусть $y \in [E_k]$. Если ни одна координата точки y не равна a, то отображение f^{n_k} взаимно однозначно в y и, следовательно, $(f^{n_k})^{-1}y \subset [(f^{n_k})^{-1}E_k]$.

Пусть теперь точка $y = (y_1, \dots, y_{n_k}) \in [E_k]$ имеет координаты, равные a. Тогда y принадлежит некоторому множеству $G^{(k)}_{j_1,\dots,j_m}$. Пусть $x \in (f^{n_k})^{-1}y$, и пусть Ox — произвольная окрестность точки x. Покажем, что $(f^{n_k})^\sharp Ox \cap E_k \neq \varnothing$. Тогда $Ox \cap (f^{n_k})^{-1}E_k \neq \varnothing$ и, следовательно, $x \in [(f^{n_k})^{-1}E_k]$, что и требуется доказать.

Возьмем окрестность O точки x такую, что $O \subset Ox$ и

$$O = \prod_{j=1}^{n_k} O_{x_j},$$

где O_{x_j} — базисные окрестности координат точки x. Заметим, что $(f^{n_k})^\sharp O = \prod f^\sharp O_{x_j}$ и множества $U_j = f^\sharp O_{x_j}$ суть окрестности точек y_j при $j \neq j_1, \dots, j_m$. Каждая окрестность $O_{x_{j_l}}$, $l = 1, \dots, m$, имеет вид

$$O_{x_{j_l}} = \{s_l\} \cup f^{-1}\bigl(U_{j_l} \cap h_a^{-1}(s_l)\bigr),$$

где s_l либо 0, либо 1, а U_{j_l} — окрестность точки a в Y. Множество

$$U = \prod_{j=1}^{n_k} U_j$$

является окрестностью точки y в Y^{n_k}, следовательно, существует точка

$$d^i \in D^{(k)}_{j_1,\dots,j_m} \subset D$$

такая, что $d^i \in U$. Построенная выше последовательность $C_i = \{x^i_k : k < \omega\} \subset E_k$ сходится к d^i. Значит, все члены этой последовательности начиная с некоторого номера m_0 лежат в U. Возьмем точку $s = (s_1,\dots,s_m) \in \prod\limits_{l=1}^{m}\{0,1\}_l$ и положим $k_0 = b_m^{-1}(s)$, где b_m — отображение, введенное при построении h_a. Возьмем далее $k_1 > m_0$ так, что $k_1 = k_0 (\operatorname{mod} 2^m)$. Покажем, что $x^i_{k_1} \in (f^{n_k})^\sharp O$. Поскольку $x^i_{k_1} \in U$, достаточно показать, что $p_{j_l}(x^i_{k_1}) \in h_a^{-1}(s_l)$ при $l = 1,\dots,m$. По определению отображения h_a

$$h_a\bigl(p_{j_l}(x^i_{k_1})\bigr) = t_l(b_m(k_1(\operatorname{mod} 2^m))) = t_l(b_m(k_0)) = t_l(s) = s_l.$$

Лемма доказана.

Пусть X_0 — канторово совершенное множество и L — лузинское подмножество X_0. Последнее означает, что L несчетно, и любое несчетное подмножество L где-то плотно в X_0. (Такое множество L существует в X_0 в предположении CH, см. [8].) Занумеруем точки L счетными порядковыми числами: $L = \{x_\beta : \beta < \omega_1\}$. Положим $L_\alpha = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$.

Пусть $p : X_0 \times \{0,1\} \to X_0$ — проекция. Будем считать, что на множестве $X_0 \times \{0,1\}$ пока нет никакой топологии. Для каждого $\alpha \le \omega_1$ определим на $X_0 \times \{0,1\}$ отношение эквивалентности R_α следующим образом: если $x \ne y$ $(x, y \in X_0 \times \{0,1\})$, то $xR_\alpha y \Leftrightarrow p(x) = p(y) \in X_0 \setminus L_\alpha$. Положим $X_\alpha = X_0 \times \{0,1\}/R_\alpha$. При $\alpha > \beta$ фактор-множества X_α и X_β связаны естественной проекцией $p^\alpha_\beta : X_\alpha \to X_\beta$. Система множеств и отображений $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\}$ образует обратный спектр множеств, предел которого X можно отождествить с X_{ω_1}, а предельные проекции $p_\alpha : X \to X_\alpha$ — с отображениями $p^{\omega_1}_\alpha$.

Пусть $\alpha < \omega_1$ и $n \in \mathbb{N}$. Счетное множество $E \subset X^n_\alpha$ назовем *αn-допустимым*, если E находится в X^n_α в общем положении и $\bigl|(p^n_\alpha)^{-1} x\bigr| = 1$ для любой точки $x \in E$. Пусть $A_{\alpha n}$ — семейство всех αn-допустимых подмножеств и

$$A = \bigcup \{A_{\alpha n} : \alpha < \omega_1,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Поскольку $|A| = c$, в предположении CH элементы A можно занумеровать счетными ординалами: $A = \{E_\beta : \beta < \omega_1\}$. При этом потребуем, чтобы выполнялось следующее условие: если E_β — αn-допустимое подмножество, то $\beta \ge \alpha$.

Теперь по рекурсии проведем топологизацию спектра S.

На X_0 задана топология канторовского совершенного множества. Предположим, что для каждого $\beta < \alpha$ на X_β уже определена топология так, что

(1_α) спектр $S_\alpha = \{X_\beta, p^\beta_{\beta'} : \beta, \beta' < \alpha\}$ является непрерывным спектром из нульмерных метризуемых компактов без изолированных точек с неприводимыми проекциями;

(2_α) если $\beta + 1 < \alpha$ и E_δ $(\delta \le \beta)$ — γn-допустимое множество, то

$$\bigl[\bigl((p^{\beta+1}_\gamma)^n\bigr)^{-1} E_\delta\bigr] = \bigl((p^{\beta+1}_\beta)^n\bigr)^{-1}\bigl[\bigl((p^\beta_\gamma)^n\bigr)^{-1} E_\delta\bigr].$$

Если α — предельное число, то на X_α зададим топологию предела спектра $S_\alpha : X_\alpha = \lim S_\alpha$. В силу условия (1_α) X_α есть нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек и все отображения p^α_β, $\beta < \alpha$, неприводимы. Следовательно, условия $(1_{\alpha+1})$ и $(2_{\alpha+1})$ будут выполнены.

Теперь рассмотрим случай $\alpha = \xi + 1$. В этом случае зададим топологию на X_α с помощью доказанной выше леммы, где в качестве отображения f рассмотрим $p^\alpha_\xi : X_\alpha \to X_\xi$, а к счетному семейству множеств $\{E_k\}$ отнесем все множества вида $\left(\left(p^\xi_\gamma\right)^n\right)^{-1} E_\delta$, где $\delta \le \xi$ и E_δ γn-допустимо. (Из построения спектра S и определения αn-допустимого множества следует, что все условия леммы выполнены.) Из условий 1–3 леммы вытекает выполнение условий $(1_{\alpha+1})$, $(2_{\alpha+1})$.

В результате топологизации мы получим непрерывный спектр из компактов $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta < \omega_1\}$, для которого выполнены условия (1_{ω_1}), (2_{ω_1}). Предел этого спектра и есть искомый компакт X. Сразу отметим, что вес X несчетен, поскольку все проекции спектра S не являются гомеоморфизмами.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

(F) если E_δ (αn)-допустимо, то для любого $\beta \ge \delta$

$$\left[\left(p^n_\alpha\right)^{-1} E_\delta\right] = \left(p^n_\beta\right)^{-1}\left[\left(\left(p^\beta_\alpha\right)^n\right)^{-1} E_\delta\right].$$

Утверждение (F) сразу вытекает из условия (2_{ω_1}). В самом деле, по условию (2_{ω_1}) в семействе замкнутых множеств $\left[\left(\left(p^\beta_\alpha\right)^n\right)^{-1} E_\delta\right] \subset X^n_\beta$, $\beta \ge \delta$, каждое последующее множество является полным прообразом предыдущего при отображении $\left(p^{\beta+1}_\beta\right)^n$. Отсюда следует (F).

Докажем условие 1 теоремы.

Известно, что если квадрат компакта X является наследственно суслинским, то X наследственно сепарабелен (см. [10]). Поэтому достаточно проверить, что для любого n в X^n нет несчетного дискретного подпространства. Докажем вначале, что в X^n нет несчетного дискретного подмножества, лежащего в общем положении. Пусть существует $D \subset X^n$ с указанными свойствами. Без ограничения общности можно считать, что отображение p^n_0 взаимно однозначно на D. Пусть G — счетное всюду плотное множество в $p^n_0 D$, $E' = \left(p^n_0\right)^{-1} G \cap D$ и $\alpha < \omega_1$ таково, что $\left(p^n_\alpha\right)^{-1}\left(p^n_\alpha E'\right) = E'$. Поскольку D лежит в общем положении в X^n, множество $E = p^n_\alpha E'$ αn-допустимо. Следовательно, E имеет некоторый номер β в нумерации αn-допустимых множеств: $E = E_\beta$. В силу (F)

$$\left[\left(p^n_\alpha\right)^{-1} E\right] = \left(p^n_\beta\right)^{-1}\left[\left(\left(p^\beta_\alpha\right)^n\right)^{-1} E\right]. \tag{1}$$

Докажем, что для почти всех (т. е. для всех, за исключением, быть может, счетного множества) точек $x \in p^n_\beta D$ имеет место равенство

$$\{x\} = \left(\left(p^\beta_0\right)^n\right)^{-1}\left(p^\beta_0\right)^n x. \tag{2}$$

В самом деле, если для некоторой точки $x \in p^n_\beta D$ (2) не выполнено, то хотя бы одна координата точки $\left(p^\beta_0\right)^n x$ принадлежит L_β. Следовательно, у точки $x' \in D$, для которой $p^n_\beta x' = x$, хотя бы одна координата принадлежит $p_0^{-1} L_\beta$. Но последнее множество счетно. Так как D находится в X^n в общем положении, любая точка из $p_0^{-1} L_\beta$ может быть координатой не более чем одной точки из D. Значит, множество точек x, для которых не выполняется условие (2), не более чем счетно.

Поскольку G всюду плотно в $p_0^n D$ и $\left(p_0^\alpha\right)^n E = G$, все точки $x \in p_\beta^n D \setminus \left(\left(p_\alpha^\beta\right)^n\right)^{-1} E$, для которых выполняется равенство (2), будут предельными точками $((p_\alpha^\beta)^n)^{-1}E$. И тогда в силу (1) «накрывающие» их точки $x' \in D$ будут предельными для E'; противоречие с дискретностью D.

Теперь по индукции докажем, что в X^n нет несчетных дискретных подмножеств.

Пусть $n = 1$. В этом случае любое подмножество X находится в общем положении. Как показано выше, это подмножество не может быть дискретным.

Предположим, что наше утверждение доказано при $k < n$, и пусть D — несчетное дискретное подмножество X^n. Обобщенная диагональ $\Delta_n \subset X^n$ является объединением конечного числа подпространств, гомеоморфных X^{n-1}. Следовательно, по предположению индукции $D \cap \Delta_n$ счетно. Таким образом, можно считать, что $D \subset X^n \setminus \Delta_n$. Все пересечения D со «слоями» X^n вида $\{(x_1, \dots, x_n) : x_k = c\}$ где $c \in X$, $1 \le k \le n$, также счетны, поскольку эти слои гомеоморфны X^{n-1}. В такой ситуации легко построить несчетное подмножество $D' \subset D$, лежащее в X^n в общем положении. Получено противоречие.

Покажем, что компакт X удовлетворяет условию 2 нашей теоремы. Индукция по n.

Пусть $n = 1$. Пусть F — замкнутое подмножество X. Возьмем счетное всюду плотное подмножество $E' \subset F$, и пусть $\alpha < \omega_1$ таково, что $p_\alpha^{-1} p_\alpha x = \{x\}$ для любой точки $x \in E'$. Тогда множество $E = p_\alpha E'$ $\alpha 1$-допустимо. Следовательно, $E = E_\beta$, $\beta \ge \alpha$. Далее, $\left(p_\alpha^\beta\right)^{-1} E$ всюду плотно в $p_\beta F$, и в силу равенства (1)

$$F = \left[p_\alpha^{-1} E\right] = p_\beta^{-1}\left[\left(p_\alpha^\beta\right)^{-1} E\right].$$

Таким образом, F — G_δ-подмножество X.

Предположим, что условие 2 выполняется для всех $k < n$, и пусть F — замкнутое подмножество X^n, $[F \setminus \Delta_n] = F$.

Положим $A = \{x \in F :$ для любой окрестности Ox множество $Ox \cap F$ не содержится в конечном объединении слоев $X^n\}$. (Напомним, что *слоем* мы называем подмножество X^n, состоящее из точек, одна из координат которых фиксирована). Выберем в A счетное всюду плотное подмножество $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и для каждой точки x_n зафиксируем счетную базу окрестностей $\left\{Ox_n^k : k \in \mathbb{N}\right\}$. По индукции путем последовательного перебора окрестностей Ox_n^k, $n, k \in \mathbb{N}$, легко построить счетное подмножество $C = \{y_m : m \in \mathbb{N}\} \subset F \setminus \Delta_n$, которое лежит в X^n в общем положении и пересекается с каждой окрестностью Ox_n^k, $n, k \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $[C] \supset [A]$. Существует $\alpha < \omega_1$ такое, что множество $C' = p_\alpha^n C$ лежит в X_α^n в общем положении и отображение p_α^n взаимно однозначно в точках C. Тогда C' αn-допустимо. Следовательно, $C' = E_{\alpha_0}$ при некотором $\alpha_0 \ge \alpha$, и в силу равенства (1) $[C] = \left(p_{\alpha_0}^n\right)^{-1}\left[\left(\left(p_\alpha^{\alpha_0}\right)^n\right)^{-1} C'\right]$.

Назовем слой $T \subset X^n$ *F-слоем*, если $[F \setminus T] \ne F$. Если T — F-слой, то положим $U_T = X^n \setminus [F \setminus T]$. Поскольку F сепарабельно, F-слоев в X^n не более чем счетное множество: $\{T_i : i \in \mathbb{N}\}$. Положим $V_i = U_{T_i} \cap F$, $F_i = [V_i]$. Очевидно, $F_i \subset T_i = X^{n-1}$. Так как Δ_n нигде не плотно в F, а V_i открыто в F, имеем

$$F_i = [V_i] = [V_i \setminus \Delta_n] = [F_i \setminus \Delta_n].$$

Следовательно, по предположению индукции множества F_i имеют тип G_δ в слоях T_i, а значит, и в X^n. Таким образом, для каждого i существует $\alpha_i < \omega_1$ такое, что $\left(p_{\alpha_i}^n\right)^{-1} p_{\alpha_i}^n (F_i) = F_i$.

Докажем теперь, что

$$[C] \cup \bigcup_i F_i = F. \tag{3}$$

Пусть $x \in F$ и $x \notin A$, т. е. существует окрестность Ox в X^n такая, что $Ox \cap F$ лежит в конечном объединении слоев X^n. Пусть $T^1, \dots, T^k$ — минимальный набор слоев X^n, объединение которых содержит $Ox \cap F$. Тогда каждый слой T^j является F-слоем, т. е. $T^j = T_{i_j}$. Покажем, что $x \in \bigcup F_{i_j}$. Предположим противное. Пусть $O'x = Ox \setminus \bigcup F_{i_j}$. Имеем $\varnothing \neq O'x \cap F \subset \bigcup T^j$ и, следовательно, для некоторого T^j

$$O'x \cap F \not\subset [(O'x \cap F) \setminus T^j].$$

Но тогда $(O'x \cap F) \cap F_{i_j} \neq \varnothing$; противоречие. Итак, равенство (3) доказано.

Пусть теперь $\beta > \alpha_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$. В силу (3) и выбора ординалов $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ имеем $\left(p^n_\beta\right)^{-1} p^n_\beta(F) = F$. Следовательно, F имеет тип G_δ в X^n. Условие 2 теоремы 1 доказано.

Докажем условие 3. Из условия 2 сразу следует, что для любого n всякое замкнутое подмножество в $X^n \setminus \Delta_n$ имеет тип G_δ. Покажем, что $X^n \setminus \Delta_n$ нормально. Пусть $A_1, A_2 \subset X^n \setminus \Delta_n$ — замкнутые непересекающиеся множества. Положим $B_i = [A_i]_{X^n}$, $i = 1, 2$. Поскольку $[B_i \setminus \Delta_n] = B_i$, в силу условия 2 найдется $\alpha < \omega_1$ такое, что $\left(p^n_\alpha\right)^{-1} p^n_\alpha(B_i) = B_i$. Множества $p^n_\alpha B_1 \setminus p^n_\alpha B_2$ и $p^n_\alpha B_2 \setminus p^n_\alpha B_1$ имеют в X^n_α непересекающиеся окрестности U_1 и U_2. Положим $V_i = \left(p^n_\alpha\right)^{-1} U_i$. Тогда $A_i \subset V_i$. В самом деле, если $x \in A_1$ и $p^n_\alpha(x) \notin U_1$, то $p^n_\alpha(x) \in p^n_\alpha B_2$ и, следовательно, $x \in B_2$, что невозможно. Итак, V_1, V_2 — непересекающиеся окрестности A_1, A_2. Условие 3 теоремы 1 доказано.

Перейдем к доказательству условия 4. Пусть $\mathscr{F}$ — сохраняющий вес полунормальный функтор, и пусть $n \in \operatorname{sp}(\mathscr{F})$. Пространство $(X^n \setminus \Delta_n) \times \mathscr{F}(n)$ совершенно нормально, поскольку $w(\mathscr{F}(n)) \le \omega_0$. Имеет место включение

$$\Pi_n(X) = \pi_n^{-1}(\mathscr{F}_{nn}(X)) \subset (X^n \setminus \Delta_n) \times \mathscr{F}(n),$$

значит, $\Pi_n(X)$ также совершенно нормально. В силу замкнутости отображения $\pi_n|_{\Pi_n(X)}$ отсюда получаем, что $\mathscr{F}_{nn}(X)$ также совершенно нормально. Наследственная сепарабельность $\mathscr{F}_n(X)$ вытекает из наследственной сепарабельности $X^n \times \mathscr{F}(n)$, поскольку произведение наследственно сепарабельного пространства на пространство со счетной базой наследственно сепарабельно.

Докажем условие 5. Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, сохраняющий вес и точки взаимной однозначности, и $\operatorname{sp}(\mathscr{F}) = \{1, k, \dots\}$ (k — второе по величине число из степенного спектра $\mathscr{F}$). Ясно, что $\mathscr{F}_k(X) = \lim \mathscr{F}_k(S)$, где

$$\mathscr{F}_k(S) = \left\{\mathscr{F}_k(X_\alpha), \mathscr{F}_k\left(p^\alpha_\beta\right) : \alpha, \beta < \omega_1\right\}.$$

Пусть A и B — два отделимых по Хаусдорфу подмножества $\mathscr{F}_k(X)$. Покажем, что существует счетное открытое покрытие множества A, замыкания элементов которого не пересекают B. Отсюда в силу нормализующей леммы (см. [16]) будет следовать существование непересекающихся окрестностей множеств A и B. Разобьем B на два подмножества: $B_1 = B \setminus X$, $B_2 = B \cap X$ ($X \subset \mathscr{F}_k(X)$). Множество $A \cap X$ финально компактно как подмножество совершенно нормального компакта X. Поэтому существует счетное покрытие γ' множества $A \cap X$, замыкания элементов которого не пересекают B_1. Множества $A \setminus X$ и B_1 лежат в совершенно нормальном пространстве $\mathscr{F}_k(X) \setminus X$ (в силу условия 4). Следовательно, $A \setminus X$ обладает окрестностью, замыкание которой (в $\mathscr{F}_k(X)$)

не пересекает B_1. Добавим эту окрестность к семейству γ' и получим счетное покрытие γ множества A, замыкания элементов которого не пересекают B_1.

Рассмотрим множество $T = \mathscr{F}_k(p_0)[B_2] \cap \mathscr{F}_k(p_0)A \subset X_0 \subset \mathscr{F}_k(X_0)$. Поскольку функтор $\mathscr{F}_k$ сохраняет точки взаимной однозначности и отображение $p_0 : X \to X_0$ взаимно однозначно в точках $x \notin L$, множество T лежит в L.

Докажем, что T счетно. Предположим противное. Тогда существует непустое открытое в X_0 множество $U \subset [T]$, для которого $U \cap \mathscr{F}_k(p_0)A$ всюду плотно в U и $U \subset [\mathscr{F}_k(p_0)B_2]$. Возьмем точку $x \in B_2$ так, что $\mathscr{F}_k(p_0)(x) = p_0(x) \in U$. Пусть Ox — окрестность точки x в X такая, что $[A] \cap Ox = \varnothing$ и $p_0(Ox) \subset U$. Имеем $\varnothing \neq p_0^\sharp Ox \subset U$. Так как дополнение до L всюду плотно в X_0, в $p_0^\sharp Ox$ найдется точка $t \notin L$. Для этой точки t имеем $|(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t| = 1$ и, значит, $(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t \subset Ox$. Следовательно, $t \in Ot = \mathscr{F}_k(X_0) \setminus \mathscr{F}_k(p_0)[A]$ и $Ot \cap \mathscr{F}_k(p_0)A = \varnothing$. Получено противоречие, поскольку $U \cap \mathscr{F}_k(p_0)A$ всюду плотно в U, а $Ot \cap U$ открыто в U и непусто.

Итак, T счетно. Множество $A \setminus (\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}\mathscr{F}_k(p_0)[B_2]$ имеет счетное открытое покрытие δ', замыкания элементов которого не пересекают B_2. В самом деле, множество $\mathscr{F}_k(p_0)A \setminus \mathscr{F}_k(p_0)[B_2]$ обладает счетным открытым в $\mathscr{F}_k X_0$ покрытием, замыкания элементов которого не пересекают $\mathscr{F}_k(p_0)[B_2]$. Прообразы элементов этого покрытия при отображении $\mathscr{F}_k(p_0)$ дадут искомое покрытие δ'.

Пересечение $A \cap (\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}\mathscr{F}_k(p_0)[B_2]$ можно представить в виде

$$A \cap (\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}\mathscr{F}_k(p_0)[B_2] = \bigcup_{t \in T} (\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t \cap A.$$

Прообраз $p_0^{-1}t$ содержит ровно две точки: t_0 и t_1. Следовательно, $(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t \cap X = \{t_0, t_1\}$. Характер $\mathscr{F}_k(X)$ в точках t_0, t_1 счетен, поскольку существует $\alpha < \omega_1$ такое, что $p_\alpha^{-1}p_\alpha t_i = \{t_i\}$, $i = 0, 1$, и тогда $(\mathscr{F}_k(p_\alpha))^{-1}\mathscr{F}_k(p_\alpha)t_i = \{t_i\}$, $i = 0, 1$. Пространство $B(t) = (\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t \setminus X$ совершенно нормально, так как оно лежит в совершенно нормальном $\mathscr{F}_{kk}(X) = \mathscr{F}_k(X) \setminus X$. Компакт $(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t$ отличается от $B(t)$ наличием двух дополнительных точек t_0, t_1 счетного характера. Следовательно, $(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t$ также совершенно нормально. Значит, $(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t \cap A$ финально компактно.

Таким образом, для любого $t \in T$ существует счетное открытое в $\mathscr{F}_k(X)$ покрытие множества $(\mathscr{F}_k(p_0))^{-1}t \cap A$, замыкания элементов которого не пересекают B_2. Объединив все эти покрытия с построенным выше покрытием δ', получим счетное открытое покрытие δ множества A, замыкания элементов которого не пересекают B_2. Наконец, семейство множеств $\{U \cap V : U \in \gamma,\ V \in \delta\}$ есть искомое счетное открытое покрытие A, замыкания элементов которого не пересекают B.

Отметим, что функтор возведения в квадрат $(\ )^2$ и функтор суперрасширения λ удовлетворяют условиям, наложенным на $\mathscr{F}$ в условии 5 (см. [14]), и $\mathrm{sp}((\ )^2) = \{1, 2\}$, $\mathrm{sp}(\lambda) = \{1, 3, 4, \dots\}$. Следовательно, пространства X^2 и $\lambda_3 X$ наследственно нормальны.

Теорема доказана.

Замечание. Можно доказать, что $\exp_3^K X$ не наследственно нормально при $K = \{1, 3\}$, где $\exp^K$ — функтор, определенный в [5] ($\mathrm{sp}(\exp^K) = K$). Таким образом, условие сохранения точек взаимной однозначности для функтора $\mathscr{F}$ в п. 5 теоремы 1 существенно.

Теорема 2 (CH). *Существует счетный набор неметризуемых компактов*

X_n, $n \in \mathbb{N}$, произведение которых $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ совершенно нормально и наследственно сепарабельно.

Доказательство. Пусть F_n, $n \in \mathbb{N}$, — счетное семейство попарно не пересекающихся замкнутых подмножеств X_0 таких, что $|F_n \cap L| > \omega_0$ для любого n (см. доказательство теоремы 1). Положим $X_n = p_0^{-1}F_n$. Неметризуемость X_n гарантируется несчетностью пересечений $F_n \cap L$. Для каждого k имеем

$$\prod_{n=1}^{k} X_n \subset X^k \setminus \Delta_k.$$

Следовательно, $\prod\limits_{n=1}^{k} X_n$ совершенно нормально для любого k и, кроме того, наследственно сепарабельно. Значит, $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ также совершенно нормально и наследственно сепарабельно (см. [17]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Katetov M.* Complete normality of Cartesian products // Fund. Math. 1948. V. 35. P. 271–274.
2. *Федорчук В. В.* К теореме Катетова о кубе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 4. С. 93–96.
3. *Жураев Т. Ф.* Нормальные функторы и метризуемость бикомпактов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. 2000. № 4. С. 8–11.
4. *Комбаров А. П.* О нормальных функторах степени ≥ 3 // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 147–149.
5. *Иванов А. В.* О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. математика. 2000. Вып. 7. С. 15–28.
6. *Иванов А. В.* Теорема Катетова о кубе и полунормальные функторы // Доступно на http://topology.karelia.ru/ivanov/ST.pdf
7. *Кашуба Е. В.* Обобщенная теорема Катетова для полунормальных функторов // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. математика. 2006. Вып. 13. С. 82–89.
8. *Gruenhage G., Nyikos P.* Normality in X^2 for compact X // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340, N 2. P. 563–586.
9. *Жураев Т. Ф.* Функтор λ и метризуемость бикомпактов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 4. С. 54–56.
10. *Иванов А. В.* О бикомпактах, все конечные степени которых наследственно сепарабельны // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 5. С. 1109–1112.
11. *Федорчук В. В.* Бикомпакт, все бесконечные замкнутые подмножества которого n-мерны // Мат. сб. 1975. Т. 96, № 1. С. 41–62.
12. *Иванов А. В.* О наследственной сепарабельности и размерности произведений бикомпактов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 5. С. 1037–1040.
13. *Fedorchuc V., Todorčević S.* Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125–150.
14. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
15. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1033–1036.
16. *Александров П. С., Пасынков Б. А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
17. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.

Статья поступила 16 февраля 2007 г.

Иванов Александр Владимирович, Кашуба Елена Викторовна
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
кафедра геометрии и топологии
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
ivanov@petrsu.ru, finder_@bk.ru